Differenzieren von Funktionen zwischen Banachräumen

Ingmar Getzner

In dieser Seminararbeit wollen wir das Differenzieren auf Funktionen zwischen Banachräume verallgemeinern. In unendlichdimensionalen Räumen gibt es keine Koordinaten, deshalb gibt es keine partielle Differnzierbarkeit. Jedoch lassen sich die Begriffe Richtungsableitung und totales Differntial auf Banachräume verallgemeinern. Wir beginnen mit der Gateaux-Ableitung, welche eine Verallgemeinerung der Richtungsableitung darstellt. Leider ist die Gateaux-Ableitung nicht einheitlich in der Literatur definiert. Wir halten uns hier an folgende Definition, entnommen aus [Zei85]:

Definition 1 Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to Y$, dann nennt man f *Gateaux-differenzierbar* an x_0, falls ein Operator $T(x_0) \in \mathcal{B}(X, Y)$, der Menge aller beschränkten, linearen Abbildungen von X nach Y, existiert, sodass

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tT(x_0)(v)\|_Y}{t} = 0, \qquad \forall v \in X : \|v\|_X = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für $T(x_0)(v)$ schreibt man $d_G f(x_0)(v)$ und nennt es die *Gateaux-Ableitung* an der Stelle x_0 in Richtung v.

Definition 2 Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to Y$, dann nennt man f *Fréchet-differenzierbar* an x_0, falls ein Operator $T(x_0) \in \mathcal{B}(X,Y)$ existiert, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \qquad h \in X.$$

Für $T(x_0)$ schreibt man $df(x_0)$ und nennt es die *Fréchet-Ableitung* an der Stelle x_0.

Satz 1 Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to Y$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i). f ist Fréchet-differenzierbar an x_0.

(ii). f ist Gateaux-differenzierbar an x_0 und die Grenzwertbildung in Definition 1 ist gleichmäßig bzgl. der Einheitssphäre in X, das heißt:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \quad |t| < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{\|f(x_0+tv) - f(x_0) - df(x_0)(tv)\|_Y}{t} < \delta$$

wobei δ nicht von v mit $\|v\| \leq 1$ abhängt.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$ Da obiges δ nicht von v abhängt gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \quad |t| < \epsilon \;\Rightarrow\; \sup_{\|v\|=1} \frac{\|f(x_0+tv) - f(x_0) - df(x_0)(tv)\|_Y}{t} \leq \delta$$

Wir machen eine Polarzerlegung $h = tv$ mit $t := \|h\|$ und $v := \frac{h}{\|h\|}$. Somit gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein δ, sodass gilt:

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} = \frac{\|f(x_0+tv) - f(x_0) - df(x_0)(tv)\|_Y}{t} \leq$$

$$\leq \sup_{\|v\|=1} \frac{\|f(x_0+tv) - f(x_0) - df(x_0)(tv)\|_Y}{t} \leq \delta \qquad \forall h : \; \|h\| = |t| < \epsilon.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Setzt man $h = tv$ in Definition 2, so gilt

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0)(h)\|_Y}{\|h\|_X} < \delta \quad \forall h : \; \|h\| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{\|v\|=1} \frac{\|f(x_0+tv) - f(x_0) - df(x_0)(tv)\|_Y}{t} \leq \delta \quad \forall t : \; |t| = \|h\| < \epsilon.$$

$\blacksquare$

Satz 2 Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x \in U$, $h \in X$ fest und $f : U \to Y$ ist Gateaux-differenzierbar. Außerdem soll die Abbildung $z \to d_G f(z)(h)$ stetig sein an jedem Punkt der Strecke $S = \{x + \lambda h : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ und $S \subseteq U$. Dann gilt für jedes $\Lambda \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\|f(x+h) - f(x) - \Lambda(h)\|_Y \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|d_G f(x+th) - \Lambda\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \|h\|_X .$$

Beweis. Sei $\phi(t) := f(x + th)$. Nach Definition der Gateaux-Ableitung gilt

$$\phi'(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\phi(t+\epsilon) - \phi(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + (t+\epsilon)h) - f(x+th)}{\epsilon} = d_G f(x+th)(h).$$

Mit einer Folgerung des Hauptsatzes der Analysis (vgl. [Kri04]) gilt

$$\begin{aligned} \phi(1) - \phi(0) &= \int_0^1 \phi'(t)\ dt, \\ f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 d_G f(x+th)(h)\ dt. \end{aligned}$$

Sei $\Lambda \in \mathcal{B}(X, Y)$ dann gilt

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - \Lambda(h)\| &= \left\| \int_0^1 d_G f(x+th)(h)\ dt - \Lambda(h) \right\| = \\ = \left\| \int_0^1 (d_G f(x+th) - \Lambda)(h)\ dt \right\| &\leq \int_0^1 \|(d_G f(x+th) - \Lambda)(h)\|\ dt \leq \\ \leq \int_0^1 \|d_G f(x+th) - \Lambda\| \|h\| \, dt &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|d_G f(x+th) - \Lambda\| \|h\| . \end{aligned}$$

■

Satz 3 Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x \in U$ und $f : U \to Y$ Gateaux-differenzierbar auf U. Außerdem sei $x \to d_G f(x)$ stetig auf U. Dann ist f Fréchet-differenzierbar und es gilt $d_G f(x) = df(x)$.

Beweis. Da $x \to d_G f(x)$ stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|d_G f(x+h) - d_G f(x)\| < \epsilon.$$

Da für $\|h\| < \delta$ auch $\|th\| < \delta$ für alle $t \in [0, 1]$, gilt für $\|h\| < \delta$ auch

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|d_G f(x+th) - d_G f(x)\| \leq \epsilon.$$

Mit Satz 2 gilt nun

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - d_G f(x)(h)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h \to 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|d_G f(x+th) - d_G f(x)\| \|h\|}{\|h\|} = 0.$$

■

Ein einfaches Beispiel zeigt, dass aus Gateaux-Differenzierbarkeit im Allgemeinen nicht Fréchet-Differenzierbarkeit folgt.

Beispiel. Wählen Banachräume $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ und

$$f(x, y) := \frac{xy^3}{x^2 + y^4} \qquad \text{für} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Für beliebige Richtungen $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$d_G f(0,0)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tab^3}{a^2 + t^2 b^4} = 0. \tag{1}$$

Bildet man jedoch den Grenzwert entlang $x = t^2$ und $y = t$ erhält man

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{xy^3}{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{t}{2\sqrt{t^4 + t^2}} = \frac{1}{2}.$$

Somit existiertdie Fréchet-Ableitung an 0 nicht. Ausserdem kann man mit Satz 2 schließen, dass die Konvergenz in (1) nicht gleichmäßig ist.

Analog zur Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ gelten auch beim Differenzieren von Funktionen zwischen Banachräumen die Summenregel, Produktregel und Kettenregel (vgl. [Zei85]).

Definition 3 Seien X, Y, Z Banachräume $O \subseteq X \times Y$ offen, $(x_0, y_0) \in O$ und $f : O \to Z$. Sei $g(x) := f(x, y_0)$. Falls g eine Fréchet- bzw. Gateaux-Ableitung besitzt, so definieren wir die *partielle Ableitung* von f in (x_0, y_0) bezüglich x durch $df_x(x_0, y_0) = dg(x_0)$.

Satz 4 Die Menge $\mathcal{B}(X, Y)$ aller beschränkten, linearen Abbildungen, wobei X, Y Banachräume sind, ist versehen mit der Abbildungsnorm selbst ein Banachraum.

Beweis. vgl. [Kal10] ■

Definition 4 Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \to Y$ und es gelte

- $f : U \to Y$ ist Fréchet-differenzierbar auf einer Umgebung von x_0.
- $df : U \to \mathcal{B}(X, Y)$ ist Fréchet-differenzierbar an x_0.

dann nennt man f *2-mal differenzierbar* und $d^2 f(x_0)$ die zweite Ableitung von f an x_0.

Man bemerke:

$$\begin{aligned} f: &\quad U \subseteq X \to Y \\ df: &\quad U \subseteq X \to \mathcal{B}(X,Y) \\ d^2 f: &\quad U \subseteq X \to \mathcal{B}(X,\mathcal{B}(X,Y)) \\ \vdots & \end{aligned}$$

Somit wird der Bildraum bei höheren Ableitungen immer komplizierter.

Definition 5 Die Abbildung

$$M : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y, \qquad X_i, Y \text{ Banachräume},$$

ist *n-linear und beschränkt*, falls M linear in jedem Argument ist und es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass gilt

$$\|M(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq C \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_n\| \qquad \forall x_i \in X_i, \quad i = 1, .., n.$$

Die kleinstmögliche Konstante C, für die obige Ungleichung stimmt, ist

$$\|M\| = \sup_{\|x_1\| = \cdots = \|x_n\| = 1} \|M(x_1, \ldots, x_n)\| .$$

Zur Vereinfachung identifizieren wir die Elemente von $\mathcal{B}(X,\mathcal{B}(X,Y))$ mit jenen aus $\mathcal{B}^{(2)}(X,Y)$, dem Raum aller beschränkten, bilinearen Abbildungen von $X \times X$ nach Y. Für jedes $T \in \mathcal{B}(X,\mathcal{B}(X,Y))$ definieren wir $\phi_T(x,y) := T(x)(y),\ (x,y) \in X \times X$. Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{B}(X,\mathcal{B}(X,Y)) \to \mathcal{B}^{(2)}(X,Y) \\ \qquad T \qquad\quad \mapsto \quad \phi_T \end{cases}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus, da

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} \|T(x)(y)\| =$$

$$= \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|T(x)(y)\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} \|\phi_T(x,y)\| = \|\phi_T\|$$

Sei $\phi \in \mathcal{B}^{(2)}(X,Y)$ gegeben. Die Abbildung $T_{x_0} : y \mapsto \phi(x_0, y)$ ist aus $\mathcal{B}(X,Y)$, da sie offensichtlich linear ist und

$$\|T_{x_0}(y)\| = \|\phi(x_0,y)\| \leq \|\phi\| \|x_0\| \|y\| .$$

Daraus folgt $\|T_{x_0}\| \leq \|\phi\| \|x_0\|$. Weiters ist die Abbildung $T : x \mapsto \phi(x, \cdot) = T_x(\cdot)$ aus $\mathcal{B}(X,\mathcal{B}(X,Y))$, da sie linear in x ist und

$$\|T(x)\| = \|T_x\| \leq \|\phi\| \|x\| .$$

Somit gilt $\phi(x,y) = T(x)(y) = \phi_T(x,y),\ (x,y) \in X \times X$, also ist Ψ auch surjektiv. Analog können Räume stetiger, n-linearer Funktionen eingeführt werden.

Beispiel. Wir zeigen, dass in einem Hilbertraum H die Funktion $f(x) := \|x\|_H^2$ stetig Fréchet-differenzierbar ist. Zuerst zeigen wir die Gateaux-differnzierbarkeit:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\|_H^2 - \|x\|_H^2}{t} = \\ = \lim_{t\to 0} \frac{2t(x,h)_H - t^2\|h\|_H^2}{t} &= 2(x,h)_H\end{aligned}$$

$2(x,h)_H$ ist linear und beschränkt in h. Deshalb ist f Gateaux-differenzierbar.
Die Gateaux-Ableitung ist auch ein Kanditat für die Fréchet-Ableitung. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{|f(x+h)-f(x)-d_G f(x)(h)|}{\|h\|_H} &= \\ = \frac{\|x+h\|_H^2 - \|x\|_H^2 - 2(x,h)_H}{\|h\|_H} &= \|h\|_H \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0\end{aligned}$$

Somit ist f Fréchet-differenzierbar. f ist sogar stetig Fréchet-differenzierbar, da die Abbildung $df : H \to \mathcal{B}(H,\mathbb{R}) = H' : x \to 2(x,\cdot)_H$ linear und beschränkt ist, denn aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|df\|_{\mathcal{B}(H,H')} = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|h\|=1} |df(x)(h)| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|h\|=1} |2(x,h)_H| \leq 2$$

Beispiel. Wählen $X = Y = C[0,1]$ und $f(x) = \sin(x(.))$. Sei $x \in C[0,1]$ eine beliebige Stelle und $h \in C[0,1]$ eine beliebige Richtung. Für die Gauteaux-Ableitung berechnen wir zuerst für beliebiges $t \in [0,1]$

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\sin(x(t)+\tau h(t)) - \sin(x(t))}{\tau} = \frac{d}{d\tau}\Big(\sin(x(t)+\tau h(t))\Big)\Big|_{\tau=0} = \cos(x(t))h(t)$$

was ein Kanditat für die Gateaux-Ableitung ist. Um die Konvergenz in $C[0,1]$ zu zeigen sei $t \in [0,1]$ beliebig aber fest. Mit dem Mittelwertsatz gilt für ein $\lambda(t) \in [0,1]$

$$\left|\frac{\sin(x(t)+\tau h(t)) - \sin(x(t))}{\tau} - \cos(x(t))h(t)\right| =$$

$$= |\cos(x(t)+\lambda(t)\tau h(t)) - \cos(x(t))||h(t)| \leq L(t)\lambda(t)\tau|h(t)|^2.$$

Wobei $L(t)$ die Lipschitzkonsante ist, welche als 1 gewählt werden kann. Da $t \in [0,1]$ beliebig war, folgt mit $\tau \to 0$ die Konvergenz in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ gegen 0.
$h(\cdot) \mapsto \cos(x(\cdot))h(\cdot)$ ist linear in h und beschränkt, da

$$\sup_{t\in[0,1]} |\cos(x(t))h(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\cos(x(t))| \|h\|_{C[0,1]} \leq \|h\|_{C[0,1]}.$$

Somit folgt $d_G f(x)(h) = \cos(x(\cdot))h(\cdot)$ Die Gateaux-Ableitung ist sogar die Fréchet-Ableitung:
Zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes liefert für ein $\lambda(t) \in [0,1]$ und für jedes $t \in [0,1]$

$$|\sin(x(t)+h(t)) - \sin(x(t)) - \cos(x(t))h(t)| \leq |(\cos(x(t)+\lambda(t)h(t)) - \cos(x(t)))h(t)|$$

$$\leq |-\sin(x(t)+\lambda(t)h(t))\lambda(t)h(t)^2| \leq |h(t)|^2,$$

woraus

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - d_G f(x)(h)\|_{C_{[0,1]}}}{\|h\|_{C[0,1]}} \leq \sup_{t\in[0,1]} \frac{|h(t)|^2}{\|h\|_{C[0,1]}} = \|h\|_{C[0,1]} \to 0 \quad \text{für} \quad \|h\|_{C[0,1]} \to 0$$

und somit die Fréchet-differenzierbarkeit von f folgt.

Literatur

[Jos05] Jürgen Jost. *Postmodern Analysis*, Springer, 2005.

[Zei85] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1985.

[Wer11] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*, Springer, 2011.

[Kri04] Andreas Kriegl. *Analysis 2*, 2004.

[Kal10] Michael Kaltenbaeck. *Analysis 2*, 2010.