Kompaktheit in topologischen Räumen

Joel Gotsch

21. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Notation und Allgemeines

Die in dieser Arbeit angeführten Definitionen und Beispiele sind dem Buch *Counterexamples in Topology*(SJ95) entnommen. Für die grundlegenden Definitionen der Topologie, offener - bzw. abgeschlossener Mengen, Basis, Subbasis und Umgebung sei auf das Analysis 2 Skriptum (Kal10) verwiesen. Wir übernehmen die Notation aus dem Skript und schreiben

- $\mathcal{U}(x)$ für die Umgebungsbasis von x,
- $\overline{B}$ für den Abschluss von B,
- B° für das Innere von B,
- $\tau|_E$ für die Spurtopologie von τ auf E für $E \subseteq X$.

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Topologie X trägt, schreiben wir auch kurz X statt (X, τ).

2 Definitionen

2.1 Allgemeine Definitionen

Zunächst bringen wir einige Definitionen von Eigenschaften die eng mit Kompaktheit verknüpft sind:

Definition (2.1). Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **T1**, wenn gilt:

$$\forall x \neq y \in X : (\exists O_x \in \tau : x \in O_x \wedge y \notin O_x) \wedge (\exists O_y \in \tau : y \in O_y \wedge x \notin O_y)$$

Definition (2.2). Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $B \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von B, wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) : (B \backslash \{x\}) \cap U \neq \emptyset$$

Gilt sogar $|(B \backslash \{x\}) \cap U| \geq \aleph_0$, so heißt x **ω-Häufungspunkt** von B.

Die folgenden Definitionen von Grenzwerten beziehungsweise Häufungspunkten von Folgen sollten bereits bekannt sein. Um den Unterschied zur Definition des selben Begriffes für Mengen hervorzuheben sei erinnert:

Definition (2.3). Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Grenzwert der Folge** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) : \exists i \in \mathbb{N} : x_j \in U \quad \forall j \geq i$$

Ähnlich heißt $x \in X$ **Häufungspunkt der Folge** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn gilt:

$\forall U \in \mathcal{U}(x)$: Es liegen unendlich viele Folgenglieder in U.

Bemerkung (2.4). Wenn man die Menge der Folgenglieder einer Folge bildet, so stimmen die Definitionen von Häufungspunkt der Folge und Häufungspunkt eben dieser Menge nicht überein. Man zeigt leicht, wenn ein Punkt ω-Häufungspunkt der Menge ist, so ist er Häufungspunkt der Folge. Wenn ein Punkt Häufungspunkt der Folge ist, so ist er entweder ω-Häufungspunkt der Menge oder er tritt unendlich oft als Folgenglied auf.

2.2 Globale Kompaktheitseigenschaften

Hier werden verschiedene Formen von Kompaktheit definiert, die sich jeweils auf ganz X beziehen.

Definition (2.5). Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **σ-kompakt**, wenn X Vereinigung höchstens abzählbar vieler in τ kompakter Mengen ist.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Lindelöf**, wenn jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **abzählbar kompakt**, wenn jede abzählbare offene Überdeckung $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

Bemerkung (2.6). Offensichtlich gilt: kompakt $\Rightarrow$ σ-kompakt $\Rightarrow$ Lindelöf sowie kompakt $\Rightarrow$ abzählbar kompakt. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht, wie später gezeigt wird. Allerdings gilt kompakt $\Leftrightarrow$ abzählbar kompakt und Lindelöf, wie leicht einzusehen ist.

Lemma (2.7). Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (X, τ) ist abzählbar kompakt

(ii) Jede abzählbar unendliche Menge hat einen ω - Häufungspunkt in X

(iii) Jede Folge hat einen Häufungspunkt in X

(iv) Jede abzählbare Familie abgeschlossener Mengen mit leerem Durchschnitt hat eine endliche Teilfamilie mit leerem Durchschnitt

Beweis : (i)$\Rightarrow$(iv):
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.
Also $X\backslash(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = X$. Nach De Morgans Regel gilt $X = X\backslash(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = X \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^C = X \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C$.
Also ist $(A_n^C)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X.
Nach Voraussetzung existieren $i_1, ..., i_n$, sodass $(A_{i_j}^C)_{j=1,..,n}$ bereits X überdeckt. Damit muss aber schon $\bigcap_{j=1}^n A_{i_j} = \emptyset$ gelten.

(iv)$\Rightarrow$(i):
Sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie offener Mengen mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.
Also $\emptyset = X\backslash(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n^C$. Nach Voraussetzung existieren $i_1, ..., i_n$, sodass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(O_{i_j}^C)_{j=1,..,n} = \emptyset$. Damit muss aber schon $\bigcup_{j=1}^n O_{i_j} = X$ gelten.

(ii)$\Rightarrow$(iii):
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Sind alle bis auf endlich viele Folgenglieder gleich x, so ist x bereits Häufungspunkt. Andernfalls ist die Menge der Folgenglieder $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ unendlich und hat nach Voraussetzung einen ω - Häufungspunkt in X. Es sind also in jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ unendlich viele Folgenglieder.

(iii)$\Rightarrow$(ii):
Sei eine abzählbar unendliche Menge gegeben. Wir fassen die Menge als Folge auf (in der jedes Element nur einmal vorkommt). Nach Voraussetzung hat diese Folge einen Häufungspunkt und nach Bemerkung 2.4 folgt, dass der Häufungspunkt der Folge auch ω - Häufungspunkt der Menge ist.

(ii)$\Rightarrow$(i):
Sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie offener Mengen mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$. Angenommen $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hätte keine endliche Teilüberdeckung. Wir können also eine Folge mit disjunkten Folgengliedern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so konstruieren, dass gilt: $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n O_i$. Diese Folge kann keinen Häufungspunkt besitzen, da es für jeden Punkt x in X eine offene Menge der Familie gibt (oBdA O_k), sodass $x \in O_k$. Die Folge ist jedoch so konstruiert, dass nur $k-1$ Folgenglieder in O_k liegen können.

Wir haben für alle x in X eine Umgebung gefunden sodass nur endlich viele Folgenglieder in dieser Umgebung liegen. Daher muss $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzen.

(i)$\Rightarrow$(ii):
Sei $S \subseteq X$ eine abzählbar unendliche Menge ohne ω - Häufungspunkt. Also gilt $\forall x \in X : \exists O_x : |O_x \cap S| < \aleph_0$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von S. $\mathcal{F}$ ist also abzählbar.
Wir definieren für $F \in \mathcal{F}$ $O_F := \bigcup\{O_x | O_x \cap S = F\}$.
Somit ist O_F eine abzählbare Überdeckung von S, da ja jedes Element x aus S in einem O_x enthalten ist und damit auch in $O_{O_x \cap S}$. Nun enthält jede endliche Vereinigung der O_F nach Konstruktion nur endlich viele Punkte aus S, was der Voraussetzung widerspricht. Da S beliebig war hat jede unendliche Menge einen ω - Häufungspunkt. $\square$

Definition (2.8). Sei (X, τ) ein topologischer Raum.
(X, τ) heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

(X, τ) heißt **schwach abzählbar kompakt**, wenn jede abzählbare Menge einen Häufungspunkt hat.

(X, τ) heißt **pseudokompakt**, wenn jede stetige reellwertige Funktion beschränkt ist.

Bemerkung (2.9). Es gilt X abzählbar kompakt $\Rightarrow$ X pseudokompakt. Dies sieht man ein, wenn man die Mengen $S_n := \{x \in X | |f(x)| < n\}$ betrachtet, wobei f eine stetige reellwertige Funktion ist. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine abzählbare Überdeckung von X für die es nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $S_{i_1}, .., S_{i_k}$ gibt. Somit ist f durch $\texttt{max}\{i_1, .., i_k\}$ beschränkt.
Da überabzählbare Mengen abzählbare Teilmengen enthalten ist schwach abzählbar kompakt äquivalent dazu, dass jede unendliche Menge einen Häufungspunkt hat. Die selbe Argumentation zeigt auch, dass abzählbar kompakt äquivalent zu „jede unendliche Menge hat einen ω - Häufungspunkt in X“ ist.
Folgenkompaktheit und schwache Kompaktheit sind mit abzählbarer Kompaktheit eng verwandt. Da der Grenzwert einer Teilfolge immer Häufungspunkt und weiters jeder ω - Häufungspunkt auch Häufungspunkt ist, gilt folgenkompakt $\Rightarrow$ abzählbar kompakt $\Rightarrow$ schwach abzählbar kompakt.
Im Allgemeinen gelten die Umkehrungen nicht, es gilt jedoch folgendes Lemma.

Lemma (2.10). Sei (X, τ) ein T1-Raum, dann gilt:

(X, τ) abzählbar kompakt $\Leftrightarrow$ (X, τ) schwach abzählbar kompakt

Beweis : Es bleibt zu zeigen (X, τ) schwach abzählbar kompakter T1-Raum $\Rightarrow$ (X, τ) abzählbar kompakt:
Sei A eine abzählbar unendliche Menge in X. Nach Voraussetzung hat A einen Häufungspunkt x. Wir müssen also zeigen, dass x auch ω - Häufungspunkt von A ist.
Angenommen x wäre kein ω - Häufungspunkt von A. Es existiert also ein $O_x \in X$ mit $x \in O_x$ sodass nur endlich viele Punkte von A in O_x liegen, seien diese Punkte $\{x_1, ..., x_n\}$. Aufgrund der T1-Eigenschaft existieren offene Mengen $O_{x_1}, ..., O_{x_n}$ mit $x \in O_{x_i} \wedge x_i \notin O_{x_i} \forall i \in \{1, ..., n\}$. Somit ist $\bigcap_{i=1}^{n} O_{x_i}$ offen und nur x liegt im Schnitt dieser Menge mit A. Somit ist x aber kein Häufungspunkt von A. $\square$

Die Zusammenhänge der behandelten Kompaktheiten sind im folgenden Diagramm zusammengefasst:

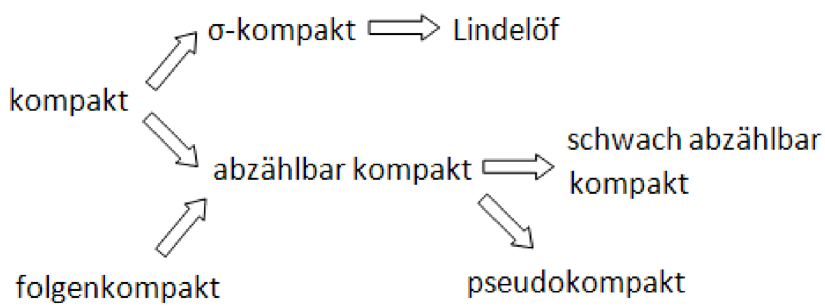

Abbildung 1

2.3 Lokale Kompaktheitseigenschaften

Wir betrachten nun Formen der Kompaktheit, die sich nicht auf ganz X beziehen.

Definition (2.11). Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **stark lokal kompakt**, wenn jeder Punkt in X eine offene Umgebung besitzt deren Abschluss in einer kompakten Menge enthalten ist.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt σ **- lokal kompakt**, wenn (X, τ) σ - kompakt und lokal kompakt ist.

Bemerkung (2.12). Da der Abschluss bezüglich τ jeder Teilmenge von X in X enthalten ist, folgt aus kompakt stark lokal kompakt. Aus stark lokal kompakt folgt klarer Weise auch lokal kompakt. Trivialer Weise folgt auch aus σ - lokal kompakt die lokale Kompaktheit.
Für σ - lokal kompakt reicht es Lindelöf und lokal kompakt zu fordern. Aus der lokalen Kompaktheit folgt, dass es für alle $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x gibt. Die K_x° überdecken ganz X. Wegen Lindelöf gibt es also abzählbar viele $(K_{x_i}^\circ)_{i\in\mathbb{N}}$ die schon ganz X überdecken. Also ist X Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen $(K_{x_i})_{i\in\mathbb{N}}$.
In Hausdorff-Räumen ist stark lokal kompakt zu lokal kompakt äquivalent, da dort kompakte Mengen abgeschlossen sind. Somit ist gewährleistet, dass der Abschluss des Inneren einer kompakten Menge wieder in der kompakten Menge enthalten ist.

Wir fassen die Ergebnisse im folgenden Diagramm zusammen:

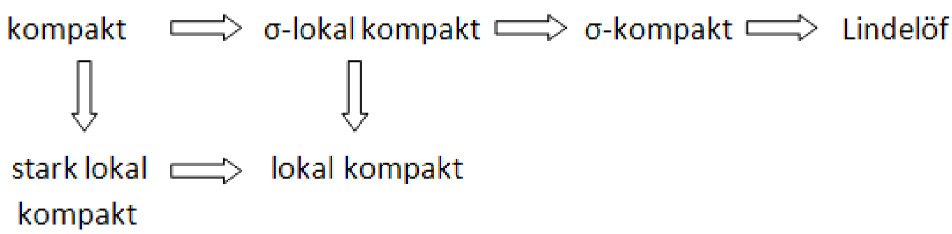

Abbildung 2

Definition (2.13). Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

Sind $(O_i)_{i\in I}$ und $(D_k)_{k\in K}$ zwei Überdeckungen von X, so heißt $(D_k)_{k\in K}$ **feiner** als $(O_i)_{i\in I}$, wenn es zu jedem $k \in K$ einen Index $i \in I$ gibt, so dass $D_k \subset O_i$ gilt.
Das Mengensystem $(D_k)_{k\in K}$ wird dann **Verfeinung** von $(O_i)_{i\in I}$ genannt.

Eine Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X heißt **punktendlich**, wenn jeder Punkt $p \in X$ nur in endlich vielen O_i liegt.

Eine Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X heißt **lokalendlich**, wenn es für jeden Punkt $p \in X$ eine Umgebung $U_p \in \mathcal{U}(p)$ gibt, die nur mit endlich vielen O_i nichtleeren Schnitt hat.

Eine Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X heißt **irreduzibel**, wenn gilt: $\nexists i_0 \in I$: $(O_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ ist Überdeckung von X. Man kann aus der Überdeckung also kein Element entfernen ohne die Überdeckungseigenschaft zu verlieren.

Definition (2.14). Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(X, τ) heißt **parakompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine offene lokalendliche Verfeinerung hat.
(X, τ) heißt **metakompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine offene punktendliche Verfeinerung hat.

Bemerkung (2.15). Klarer Weise impliziert lokalendlich bereits punktendlich. Daher gilt auch parakompakt $\Rightarrow$ metakompakt.
Ein kompakter topologischer Raum (X, τ) ist parakompakt: Jede offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ hat eine endliche Teilüberdeckung $(O_j)_{j\in\{1,..n\}}$. Diese ist bereits eine lokalendliche Verfeinerung.
Diesen Sachverhalt kann man auch anders einsehen. Wir zeigen jetzt eine zu Kompaktheit äquivalente Definition:
Wenn jede offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X eine offene punktendliche Teilüberdeckung hat, ist X kompakt:
Sei O_{i_0} eine nichtleere Menge der offenen Überdeckung. Wir definieren eine weitere offene Überdeckung $U_i := O_i \cup O_{i_0}$. Sei $x \in O_{i_0}$, dann ist nach Konstruktion $x \in U_i \ \forall i \in I$. Nach Voraussetzung hat U_i eine punktendliche Teilüberdeckung, speziell liegt x nur in endlich vielen $U_{i_j}, j \in \{1, .., n\}$. Somit ist aber $(O_i)_{i\in\{0,1,..,n\}}$ eine endliche Teilüberdeckung.
Die Umkehrungen der Implikationen gelten im Allgemein nicht, allerdings gilt folgendes Lemma:

Lemma (2.16). Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Es gelten:

(i) Ist (X, τ) abzählbar kompakt und metakompakt $\Rightarrow$ (X, τ) ist kompakt.

(ii) Ist (X, τ) abzählbar kompakt und parakompakt $\Rightarrow$ (X, τ) ist kompakt.

Beweis : Da (i) schon (ii) impliziert, reicht es (i) zu zeigen:
Sei (X, τ) abzählbar kompakt und metakompakt und $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Sei weiters $(U_k)_{k\in K}$ eine offene punktendliche Verfeinerung von $(O_i)_{i\in I}$.
1. Schritt: Nun existiert eine irreduzible Teilüberdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von $(U_k)_{k\in K}$ mit $J \subset K$:
Ordnen wir die Menge aller Teilüberdeckungen mit der Mengeninklusion, so ist der Durchschnitt einer Kette von Teilüberdeckungen wieder eine Teilüberdeckung (andernfalls wäre ein Element der Kette keine Teilüberdeckung, ein Widerspruch).

2. Schritt: Für alle $U_j, j \in J$ muss es nun ein x_j geben, dass nur in U_j liegt: Andernfalls können wir U_j aus der Teilüberdeckung entfernen und es wäre immer noch eine Teilüberdeckung, also wäre $(U_j)_{j \in J}$ nicht irreduzibel.
3. Schritt: J ist endlich:
Wäre J nicht endlich, wäre $\{x_j | j \in J\}$ eine unendliche Menge ohne ω-Häufungspunkt, da ja der Schnitt der offenen Menge U_j nur x_j ist.
Wir haben für jede beliebige offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung konstruiert, womit die Kompaktheit bewiesen ist. $\square$

3 Ausgewählte Beispiele

3.1 Der Countable Fort Space

Sei X eine abzählbar unendliche Menge und p ein Punkt aus X.
Wir definieren $\tau := \{O \subset X : p \in O^C \vee |O^C| < \aleph_0\}$.

(i) τ ist eine Topologie.

(ii) (X, τ) ist kompakt.

(iii) (X, τ) ist folgenkompakt.

Beweis :
Zu i)

- $\emptyset \in \tau$, da $p \in X = \emptyset^C$
- $X \in \tau$, da $|X^C| = |\emptyset| < \aleph_0$
- Für $O_1, O_2 \in \tau : O_1 \cap O_2 \in \tau$:
  2 Fälle sind zu unterscheiden:
  -) $|O_1^C| < \aleph_0 \wedge |O_2^C| < \aleph_0$, daraus folgt aber schon $|(O_1 \cap O_2)^C| < \aleph_0$
  -) $|O_1^C| \geq \aleph_0 \vee |O_2^C| \geq \aleph_0$, daraus folgt zunächst $p \in O_1^C \vee p \in O_2^C$ und weiter $p \in O_1^C \cup O_2^C$. Somit ist $p \in (O_1 \cap O_2)^C$ und damit $O_1 \cap O_2 \in \tau$.
- Für $(O_i)_{i \in I} \in \tau$ gilt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$:
  Wieder sind 2 Fälle zu unterscheiden:
  -) $p \in O_i^C \forall i \in I$. Daraus folgt $p \in \bigcap_{i \in I} O_i^C$ also $p \in (\bigcup_{i \in I} O_i)^C$
  -) andernfalls $\exists i_0 : p \in O_{i_0}$ daher muss $O_{i_0}^C$ endlich sein. Klarer Weise gilt $\bigcap_{i \in I} O_i^C \subset O_{i_0}^C$, also muss auch $(\bigcup_{i \in I} O_i)^C = \bigcap_{i \in I} O_i^C$ endlich sein.

Zu ii)
Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir konstruieren nun eine endliche Teilüberdeckung:
Es muss eine offene Menge O_{i_0} der Überdeckung geben, sodass $p \in O_{i_0}$ liegt. Aufgrund der Bauart der Topologie muss $O_{i_0}^C$ endlich sein. Sei oBdA $O_{i_0}^C = \{x_i : i \in \{1, .., n\}\}$. Für diese endlich vielen Punkte x_j können wieder Mengen der Überdeckung O_{i_j} gefunden werden, sodass $x_j \in O_{i_j}$. Somit ist $(O_{i_j})_{j\in\{0,1,..,n\}}$ eine endliche Teilüberdeckung.

Zu iii)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.
Kommt ein Punkt q unendlich oft vor, so ist die Teilfolge, die als Folgenglieder die Punkte die q sind hat, trivialer Weise konvergent.
Andernfalls ist die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen p:
Da jede Umgebung eine offene Menge enthält und jede offene Menge, die p enthält endliches Komplement hat, ist auch das Komplement jeder Umgebung von p endlich. Es können also für jede Umgebung U von p nur endlich viele Folgenglieder nicht in U liegen. Somit folgt die Behauptung die Folge konvergiere gegen p. Insgesamt erhalten wir also, dass jede Folge eine konvergente Teilfoge hat, womit die Folgenkompaktheit gezeigt ist. $\square$

Bemerkung (3.1). Aufgrund der Abbildungen 1 und 2 sowie Bemerkung 2.15 folgen daraus schon alle weiteren, in diesem Dokument definierten, Kompaktheitseigenschaften.

3.2 Der Fortissimo Space

Die Definition weicht nur leicht von der Definition des Countable Fort Space ab, jedoch hat dieser Raum gänzlich andere Kompaktheitseigenschaften.
Sei X eine überabzählbar unendliche Menge und p ein Punkt aus X.
Wir definieren $\tau := \{O \subset X : p \in O^C \vee |O^C| \leq \aleph_0\}$.

(i) τ ist eine Topologie.

(ii) (X, τ) ist Lindelöf.

(iii) (X, τ) ist nicht σ - kompakt.

(iv) (X, τ) ist nicht schwach abzählbar kompakt.

(v) (X, τ) ist nicht pseudokompakt.

Beweis :
Zu i)

- $\emptyset \in \tau$, da $p \in X = \emptyset^C$
- $X \in \tau$, da $|X^C| = |\emptyset| \leq \aleph_0$
- Für $O_1, O_2 \in \tau : O_1 \cap O_2 \in \tau$:
  2 Fälle sind zu unterscheiden:
  -) $|O_1^C| \leq \aleph_0 \wedge |O_2^C| \leq \aleph_0$, daraus folgt aber schon $|(O_1 \cap O_2)^C| \leq \aleph_0$
  -) $|O_1^C| > \aleph_0 \vee |O_2^C| > \aleph_0$, daraus folgt zunächst $p \in O_1^C \vee p \in O_2^C$ und weiter $p \in O_1^C \cup O_2^C$. Somit ist $p \in (O_1 \cap O_2)^C$ und damit $O_1 \cap O_2 \in \tau$.
- Für $(O_i)_{i \in I} \in \tau$ gilt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$:
  Wieder sind 2 Fälle zu unterscheiden:
  -) $p \in O_i^C \forall i \in I$. Daraus folgt $p \in \bigcap_{i \in I} O_i^C$ also $p \in (\bigcup_{i \in I} O_i)^C$
  -) andernfalls $\exists i_0 : p \in O_{i_0}$ daher muss $O_{i_0}^C$ abzählbar sein. Klarer Weise gilt $\bigcap_{i \in I} O_i^C \subset O_{i_0}^C$, also muss auch $(\bigcup_{i \in I} O_i)^C = \bigcap_{i \in I} O_i^C$ abzählbar sein.

Zu ii)
Sei $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir konstruieren nun eine abzählbare Teilüberdeckung:
Es muss eine offene Menge O_{i_0} der Überdeckung geben, sodass $p \in O_{i_0}$ liegt. Aufgrund der Bauart der Topologie muss $O_{i_0}^C$ abzählbar sein. Sei oBdA $O_{i_0}^C = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Für diese abzählbar vielen Punkte x_j können wieder Mengen der Überdeckung O_{i_j} gefunden werden, sodass $x_j \in O_{i_j}$. Somit ist $(O_{i_j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine abzählbare Teilüberdeckung.

Zu iii)
Wir müssen also zeigen, dass X nicht als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen darstellbar ist. Im folgenden sei K eine kompakte Menge:
1. Schritt: $p \notin K \Rightarrow |K| < \aleph_0$
Dies folgt aus der Beobachtung, dass $\forall q \neq p \in X : \{q\} \in \tau$ da ja $p \in \{q\}^C$. Wäre K unendlich, wären die Punkte von K eine irreduzible unendliche Überdeckung von K. K muss also endlich sein.
2. Schritt: $p \in K \Rightarrow |K| \leq \aleph_0$
Angenommen $\exists K : |K| > \aleph_0$. Wähle zunächst eine abzählbar unendliche

Teilmenge $A := \{x_n : n \in N \wedge x_n \neq p \wedge x_n \in K\}$ von K. A^C ist offen, da ja nach Konstruktion $|A^{C^C}| = |A| = \aleph_0$. Die einpunktigen Teilmengen aus A sind offene Mengen, da ja nach Konstruktion $p \notin A$. Wir definieren nun eine offene Überdeckung von K, die keine endliche Teilüberdeckung hat: Sei $U_0 := A^C$ und weiters $U_j := x_j, j \in \mathbb{N}$. $(U_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist nun eine irreduzible abzählbar unendliche offene Überdeckung. Somit kann K nicht kompakt sein.
3. Schritt: Es existieren nicht abzählbar viele kompakte Mengen die X überdecken:
Es sind also alle kompakten Mengen höchstens abzählbar. Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder eine abzählbare Menge. X ist jedoch überabzählbar.

Zu iv)
Wir müssen also zeigen, dass eine unendliche Menge V existiert, die keinen Häufungspunkt hat. Sei also V eine abzählbar unendliche Menge deren Komplement ebenfalls unendlich ist. Außerdem fordern wir $p \notin V$. Somit ist sowohl V (p ist in V^C) als auch V^C ($|V^{C^C}| = \aleph_0$ nach Konstruktion) offen. Angenommen q sei Häufungspunkt von V. Wir unterscheiden 2 Fälle:
-) $q \neq p$. Somit ist $\{q\}$ offen und somit eine Umgebung von q. Jedoch ist $\{q\} \cap V \backslash \{q\} = \emptyset$ was im Widerspruch zu q ist Häufungspunkt steht.
-) $q = p$. Da ja $p \notin V$ ist V^C offene Umgebung von p. Jedoch ist $V^C \cap V \backslash \{p\} = \emptyset$ was im Widerspruch zu p ist Häufungspunkt steht.

Zu v)
Wir müssen also eine stetige Funktion konstruieren, die nicht beschränkt ist. Dazu wählen wir eine offene Menge O_p so dass $p \in O_p$ und $|O_p^C| = \aleph_0$. Sei $O_p^C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit x_n paarweise verschieden.
Wir definieren nun die Funktion:
$$f : X \mapsto \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in O_p \\ n, & x = x_n \end{cases}$$
Da ja $x_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sind alle Mengen $\{x_n\}$ offen. f ist stetig, da das Urbild einer beliebigen Menge als Vereinigung offener Mengen wieder offen ist (oder leer und somit offen). Offensichtlich ist f unbeschränkt, da $\forall n \in \mathbb{N} : f(x_{n+1}) = n + 1 > n$. □

Bemerkung (3.2). Aus Abbildung 1 folgt schon, dass (X, τ) nicht kompakt, nicht abzählbar kompakt und auch nicht folgenkompakt sein kann.

3.3 Die Nested Interval Topology

Sei $X = (0, 1)$ das offene Einheitsintervall. Wir definieren zunächst die Intvervalle $U_n := (0, 1 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.
$\tau := \{U_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$

(i) τ ist eine Topologie.

(ii) $\emptyset; X; [1 - \frac{1}{n}, 1), n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, sind schon alle abgeschlossenen Mengen.

(iii) Für alle $U_n, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, gilt: U_n ist kompakt.

(iv) (X, τ) ist lokalkompakt.

(v) (X, τ) ist nicht stark lokalkompakt.

(vi) (X, τ) ist σ - kompakt.

(vii) (X, τ) ist pseudokompakt.

(viii) (X, τ) ist schwach abzählbar kompakt.

(ix) (X, τ) ist nicht abzählbar kompakt.

(x) (X, τ) ist nicht metakompakt.

Beweis :
Zu i)

- $\emptyset, X \in \tau$ nach Konstruktion.
- Für $O_1, O_2 \in \tau : O_1 \cap O_2 \in \tau$:
  Sei oBdA (die Fälle in denen eine Menge leer oder X ist, sind trivial) $O_1 = (0, 1 - \frac{1}{n_1}), O_2 = (0, 1 - \frac{1}{n_2})$. Dann ist $O_1 \cap O_2 = (0, 1 - \frac{1}{\mathtt{min}\{n_1, n_2\}})$ und somit wieder in τ

- Für $(O_i)_{i \in I} := U_{n_i} \in \tau$ gilt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$:
  Ist I endlich, so ist $\bigcup_{i \in I} O_i = U_{\mathtt{max}\{n_i : i \in I\}}$.
  Ist I unendlich, so gilt schon $\bigcup_{i \in I} O_i = X$. In jedem Fall ist die Vereinigung wieder in τ.

Zu ii)
Abgeschlossene Mengen sind definitionsgemäß die Komplemente abgeschlossener Mengen. $\emptyset, X, [1 - \frac{1}{n}, 1) : n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sind genau die Komplemente der Elemente in τ.

Zu iii)
Wir können die Mengen in τ mit der Mengeninklusion richten. Die Topologie besteht aus einer einzigen Kette: $\emptyset \subset U_2 \subset U_3 \subset ... \subset U_n \subset U_{n+1} \subset ... \subset X$. Für $U_n, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ muss daher jede Überdeckung eine Menge U_j enthalten (oder schon ganz X) sodass $j \geq n$. Dieses U_j alleine überdeckt also schon U_n.

Zu iv)
Dies folgt direkt aus iii), da jeder Punkt $x \in X$ in einem U_n liegt.

Zu v)
Aus i) und ii) folgt, dass der Abschluss jeder offenen nichtleeren Menge schon ganz X ist. Jede Umgebung enthält eine offene Menge, daher ist insbesondere auch der Abschluss jeder Umgebung ganz X. X ist jedoch nicht kompakt, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}}$ ist eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

Zu vi)
Nach iii) ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}} U_n = X$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

Zu vii)
Wir zeigen, dass jede stetige reellwertige Funktion f schon konstant ist und somit insbesondere beschränkt.
Angenommen $f(X)$ enthält zwei verschiedene Punkte x_1, x_2. In $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie existieren nun aufgrund der Hausdorffeigenschaft offene O_{x_1}, O_{x_2} sodass $x_1 \in O_{x_1}, x_2 \in O_{x_2}$ und $O_{x_2} \cap O_{x_1} = \emptyset$. Nun müssten auch $f^{-1}(O_{x_1})$ und $f^{-1}(O_{x_2})$ zwei offene disjunkte Mengen sein. Da aber in τ alle offenen Mengen $O \neq \emptyset$ nichtleeren Schnitt haben, muss schon eines der Urbilder leer sein.

Zu viii)
Wir zeigen, dass sogar jede Menge, die zwei verschiedene Punkte enthält einen Häufungspunkt enthält. Seien also x_1, x_2 zwei verschiedene Punkte einer Menge. Sei oBdA $x_2 > x_1$. Da jede Umgebung von x_2 eine offene Menge enthält die x_2 enthält und da in diesen offenen Mengen auch immer alle kleineren $x \in X$ liegen, liegt insbesondere auch x_1 in jeder Umgebung. Somit ist x_1 Häufungspunkt.

Zu ix)
$(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ ist eine abzählbare offene Überdeckung ohne endlicher Teilüberdeckung. Eine endliche Teilüberdeckung hätte ein (in der Kette die durch Richtung der offenen Mengen durch die Mengeninklusion ensteht) maximales Element. Dieses überdeckt aber nicht X.

Zu x)
$(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ hat auch keine punktendliche offene Verfeinerung, da ja $\frac{1}{4}$ in jeder offenen Menge enthalten ist und nach ix) überdecken endlich viele dieser offene Mengen nicht X.
$\square$

Bemerkung (3.3). Aus den Abbildungen 1 und 2 folgt schon, dass (X,τ) Lindelöf, aber nicht folgenkompakt oder kompakt ist. Nach iv) und vi) ist (X,τ) auch σ-lokalkompakt. Aus Bemerkung 2.15 folgt auch, dass (X,τ) nicht parakompakt ist.

3.4 Irrational Slope Topology

Sei $X = \{(x,y)\in\mathbb{Q}^2 : y \geq 0\}$ und θ eine irrationale Zahl. Wir definieren nun die Subbasis $\mathcal{S}$ der Topologie τ:
$\mathcal{S} := \{N_\epsilon : \epsilon > 0\}$ wobei $N_\epsilon((x,y)) = \{(x,y)\} \cup B_\epsilon(x+\frac{y}{\theta}) \cup B_\epsilon(x-\frac{y}{\theta})$. Dabei ist $B_\epsilon(x) := \{(r,0) : r\in\mathbb{Q} \wedge |r-x| < \epsilon\}$.
Die Subbasiselemente haben also die folgende Form (wobei die Geraden Steigung θ haben:

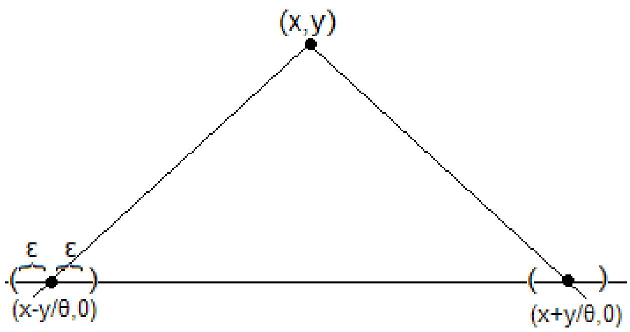

Abbildung 3

(i) Jede offene nichtleere Menge enthält ein offenes Intervall auf der x-Achse.

(ii) Der Abschluss jeder offenen nichtleeren Menge O enthält 2 Streifen mit Steigung $\pm\theta$ ausgehend von jedem offenen Intervall auf der x-Achse in O (Siehe Abbildung 4).

(iii) Der Schnitt der Abschlüsse zweier offener nichtleerer Mengen ist nicht leer.

(iv) (X, τ) ist pseudokompakt.

(v) (X, τ) ist σ - kompakt.

(vi) (X, τ) ist nicht schwach abzählbar kompakt.

(vii) (X, τ) ist Hausdorff.

(viii) (X, τ) ist nicht lokal kompakt.

Beweis :

Zu i)

Wir betrachten die Basis von τ die durch die endlichen Durchschnitte der Subbasis $\mathcal{S}$ entsteht. Ein Punkt $(x, y), y > 0$ ist nur im (endlichen) Schnitt von Subbasiselementen, wenn jedes der Elemente (x, y) enthält. Diese Subbasiselemente können also oBdA als $N_{\epsilon_i}((x, y)), i \in \{1, ..., n\}$, angeschrieben werden. Dann sind sogar zwei Intervalle im Schnitt enthalten: bezeichne $\epsilon_{min} = \mathtt{min}\{\epsilon_i : i \in \{1, ..., n\}\}$. Die beiden Intervalle $B_{\epsilon_{min}}(x - \frac{y}{\theta})$ und $B_{\epsilon_{min}}(x + \frac{y}{\theta})$ sind also im Schnitt enthalten. Alle Elemente der Basis enthalten also ein Intervall auf der x-Achse oder sind leer. Da die Topologie aus Vereinigungen von Basiselementen besteht, gilt die Aussage für alle offenen Megen. Wir erhalten außerdem, dass jede offene Menge, die einen Punkt (x, y) enthält, der nicht auf der x-Achse liegt, auch dazugehörige Intervalle $B_\epsilon(x \pm \frac{y}{\theta})$ auf der x-Achse enthält.

Zu ii)

Sei $O \in \tau$ eine nichtleere offene Menge. Wir zeigen, dass jede offene Menge $U \in \tau$, die mit den in Abbildung 4 veranschaulichten Streifen nichtleeren Schnitt hat, auch mit O nichtleeren Schnitt hat. Da ja definitionsgemäß $\overline{O} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P$ wobei $\mathcal{P} = \{P \in \tau : P \subset O^C\}$ folgt dann $U \notin \mathcal{P}$ und damit die Behauptung.

Nach i) enthält jede offene Menge ein Intervall. Enthalte O oBdA das Intervall (x_1, x_2) auf der x-Achse. Alle Punkte $(x, y) : y > 0$ in X die mittels einer Geraden der Steigung $\pm\theta$ auf eine reelle Zahl $x_1 < z < x_2$ auf der x-Achse projiziert werden $(z = x - \frac{y}{\theta} \vee z = x + \frac{y}{\theta})$, können in keiner offenen Menge enthalten sein, die mit O nichtleeren Schnitt hat. Dies folgt aus i) da ja jede

offene Menge die (x, y) enthält auch die dazugehörigen $B_\epsilon(z)$ welches mit (x_1, x_2) nichtleeren Schnitt hat.
Abbildung 4 veranschaulicht die Form des Abschlusses wenn die offene Menge ein Intervall auf der x-Achse ist:

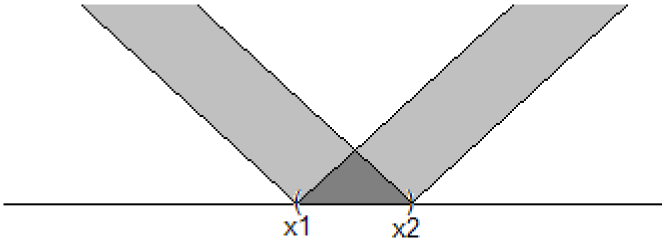

Abbildung 4

Zu iii)
Seien O_1, O_2 offen und nichtleer. Sie enthalten also nach i) offene Intervalle auf der x-Achse $(x_1, x_2) \subset O_1$ bzw $(y_1, y_2) \subset O_2$. OBdA sei $x_1 < y_1$. Der Streifen mit Steigung θ ausgehend von (x_1, x_2) hat dann mit dem Streifen mit Steigung $-\theta$ ausgehend von (y_1, y_2) nichtleeren Schnitt.

Zu iv)
Wir zeigen, dass jede stetige reellwertige Funktion f schon konstant ist und somit insbesondere beschränkt.
Angenommen $f(X)$ enthält zwei verschiedene Punkte x_1, x_2. In $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie existieren nun aufgrund der Normalität offene O_{x_1}, O_{x_2} sodass $x_1 \in O_{x_1}, x_2 \in O_{x_2}$ und $\overline{O_{x_2}} \cap \overline{O_{x_1}} = \emptyset$. Nun müssten auch $f^{-1}(\overline{O_{x_1}})$ und $f^{-1}(\overline{O_{x_2}})$ zwei abgeschlossene disjunkte Mengen sein, die offene Mengen enthalten. Da nach ii) in τ die Abschlüsse offener Mengen nichtleeren Schnitt haben, muss schon eines der Urbilder leer sein.

Zu v)
Da einpunktige Mengen kompakt sind und X selbst abzählbar ist, kann X als Vereinigung seiner Elemente geschrieben werden.

Zu vi)
Die abzählbar unendliche Menge $S = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ hat keinen Häufungspunkt:
Angenommen $(x, y) \in X$ sei Häufungspunkt von S. Wir unterscheiden 3 Fälle:

- $y = 0 \land x \notin \mathbb{Z}$: Nach ii) ist das Intervall $(\frac{x - \lfloor x \rfloor}{2}, \frac{\lceil x \rceil - x}{2})$ auf der x-Achse offene Umgebung von (x, y) welches mit S leeren Schnitt hat.

- $y = 0 \wedge x \in \mathbb{Z}$: Nach ii) ist das Intervall $I := (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ auf der x-Achse offene Umgebung von (x, y) und es gilt $I \cap S \backslash \{(x, y)\} = \emptyset$.
- $y > 0$ da $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt sicher $x \pm \frac{y}{\theta} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Daher existiert ein ϵ sodass $N_\epsilon((x, y)) \cap S = \emptyset$.

Zu vii)
Seien (x_1, x_2) und (y_1, y_2) zwei Punkte in X. Wir zeigen die Behauptung in 2 Schritten:
1. Schritt: (x_1, x_2) ist der einzige Punkt in X der auf die Punkte $(x \pm \frac{y}{\theta}, 0)$ projeziert wird.
Wir zeigen die Aussage für $p := (x + \frac{y}{\theta}, 0)$, der andere Fall kann analog gezeigt werden. Da θ irrational ist, ist kann auf der Geraden mit Steigung $-\theta$ nur ein Punkt aus $\mathbb{Q}^2$ liegen, nach Voraussetzung (x_1, x_2). Auch die Gerade mit Steigung θ kann höchstens einen Punkt aus $\mathbb{Q}^2$ enthalten. Dieser ist $(x_1, -x_2)$ und daher nur in X wenn $x_2 = 0$. In diesem Fall ist (x_1, x_2) der Schnittpunkt der beiden Geraden und wieder der einzige Punkt in X der auf einer der beiden Geraden liegt.
2. Schritt: Aus Schritt 1 folgt, dass die Projektionen von (x_1, x_2) und (y_1, y_2) disjunkt sind. Sei ϵ die Hälfte des kleinsten Abstandes zwischen den Projektionen von (x_1, x_2) und (y_1, y_2). Somit sind $N_\epsilon((x_1, x_2))$ und $N_\epsilon((y_1, y_2))$ zwei disjunkte offene Mengen, die (x_1, x_2) bzw (y_1, y_2) enthalten.

zu viii)
Tatsächlich hat kein Punkt in X eine kompakte Umgebung. Sei $(x, y) \in X$ und $U \in \mathcal{U}((x, y))$. Nach vii) müssen kompakte Mengen abgeschlossen sein. Nach ii) enthält $\overline{U}$ zwei Streifen die jeweils abzählbar viele Elemente aus X enthalten. Wir wählen als Überdeckung die Subbasis $\mathcal{S}$ selbst. Diese hat also keine endliche Teilüberdeckung. $\square$

3.5 I^I

Sei $I = [0, 1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall und sei $I^I = \Pi_{i \in I} I_i$ das Produkt der Einheitsintervalle. τ sei dann die Produkttopologie wobei I mit der euklidischen Topologie versehen wird.

(i) (I^I, τ) ist kompakt.

(ii) Punkte $(x_i)_{i \in I} \in I^I$ können als Funktionen $f_x : I \to I$ aufgefasst werden.

(iii) Eine Folge $((x_{i,\alpha})_{i\in I})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $(x_i)_{i\in I}$, wenn die dazugehörigen Funktionen $f_{x,\alpha}$ punktweise gegen f_x konvergieren.

(iv) (I^I, τ) ist nicht folgenkompakt.

Beweis :

Zu i)

Nach dem Satz von Tychonoff ist (I^I, τ) kompakt.

Zu ii)

Mit $f_x(y) := x_y$ folgt die Behauptung.

Zu iii)

Aus der Analysis 3 Vorlesung ist bekannt, dass eine Folge $((x_{i,\alpha})_{i\in I})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $(x_i)_{i\in I}$ konvergiert, wenn $\forall i \in I : (x_{i,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen (x_i). Identifizieren wir die Punkte wie in ii) mit Funktionen erhalten wir $\forall i \in I : (f_{x_\alpha}(i))_{\alpha\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f_x(i)$, was genau punktweise Konvergenz bedeutet.

Zu iv)

Wir zeigen dass die Folge von Funktionen
$f_n(x) :=$ `n-te Stelle der Binärdarstellung von x` $n \in \mathbb{N}$ keine gegen eine Funktion f punktweise konvergente Teilfolge besitzt. Nach iii) ist dies äquivalent dazu, dass eine Folge in I^I existiert die keine konvergente Teilfolge besitzt.
Angenommen $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine konvergente Teilfolge. Betrachte den Punkt $p = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{n_{2\cdot k}}$. Somit gilt:
$f_{n_k}(p) = \begin{cases} 0, & \text{wenn k ungerade} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
Für jede Teilfolge kann also ein Punkt gefunden werden an dem diese nicht konvergiert. $\square$

Literatur

[Kal10] Kaltenbäck, Michael: *Analysis 2.* Februar 2010

[SJ95] Steen, Lynn A. ; Jr., J. Arthur S.: *Counterexamples in Topology.* Dover Publications, 1995. – ISBN 9780486687353