Eine Einführung in die Theorie der Uniformen Räume

Mario Grasel

13. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Motivation

Man kann uniforme Räume als Verallgemeinerungen von metrischen Räumen betrachten. Der Zusammenhang hierbei ist jener, das jeder metrische Raum auch ein uniformer ist, und das der vom metrischen, bzw uniformen Raum induzierte topologische Raum übereinstimmt.

Bevor wir zu den uniformen Strukturen kommen, noch zur Definition von zwei Mengenoperationen und daraus folgenden Aussagen. Sei X eine beliebige Menge und $A, B \subseteq X \times X$ dann ist die Inverse

$$A^{-1} := \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in A\},$$

sowie das Relationenprodukt

$$A \cdot B := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists\, z \in X \text{ mit } (x, z) \in A \wedge (z, y) \in B\}.$$

Eine Menge heißt symmetrisch, wenn $A = A^{-1}$.
Weiters sei A^n induktiv definiert mit $A^1 := A$ und $A^{k+1} := A^k \cdot A \quad \forall\, k \geq 1$.
Aus diesen Definitionen und mit der Diagonale von X: $\Delta := \{(x, x) \in X \times X\}$ folgt:
$A \subseteq B \Rightarrow A \cdot C \subseteq B \cdot C$ für alle $C \subseteq X \times X$ und, da $A \cdot \Delta = \Delta \cdot A = A$, gilt $\Delta \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A^n$.
Man betrachte nun einen metrischer Raum (X, d) und die Mengen $U_\epsilon := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ für $\epsilon > 0$ beliebig. Diese Mengen besitzen nun diese, aus der Definition einer Metrik folgenden, Eigenschaften:

1. $\Delta \subseteq U_\epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0$ (dies folgt aus $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$)
2. für $\epsilon_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ gilt: $\bigcap_{i=1}^n U_{\epsilon_i} = U_\epsilon$ mit $\epsilon := \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{\epsilon_i\}$
3. $U_\epsilon^{-1} = U_\epsilon$ (da $d(x, y) = d(y, x)$)
4. $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ sodass $U_\delta \cdot U_\delta \subseteq U_\epsilon$ (das wiederum folgt aus: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ und der Definition des Mengenproduktes oben. Für δ kann man zum Beispiel $\frac{\epsilon}{2}$ wählen.)

Sei wieder X eine beliebige nicht leere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ mit:

(i) $\Delta \subset U \quad \forall\, U \in \mathcal{U}$

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt: $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}$

(iii) $U \in \mathcal{U}$ und $V \in \mathcal{P}(X \times X)$ mit $U \subseteq V \quad \Rightarrow \quad V \in \mathcal{U}$

(iv) $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad U^{-1} \in \mathcal{U}$

(v) $\forall\, U \in \mathcal{U} \quad \exists\, W \in \mathcal{U}$ mit $W^2 \subseteq U$

nennt man **uniforme Struktur**, bzw. Nachbarschaftsfilter auf der Menge X. $(X, \mathcal{U})$ heißt dann uniformer Raum. Dass $\mathcal{U}$ tatsächlich ein Filter ist, folgt aus (i), (ii) und (iii). Eine Filterbasis von $\mathcal{U}$ nennt man Fundamentalsystem; das ist ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ mit $\forall\, U \in \mathcal{U}\ \exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$. Wenn man nun solch ein Mengensystem nimmt, und es mit den U_ϵ eines metrischen Raumes vergleicht, so sieht man, dass insbesondere (i), (ii), (iv) und (v) den Eigenschaften der U_ϵ entsprechen. Offensichtlich ist also jeder metrischer Raum auch ein uniformer, mit dem Fundamentalsystem $\{U_\epsilon, \epsilon > 0\}$.

Umgekehrt induziert natürlich ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ mit:

$$\Delta \subset B \quad \forall\, B \in \mathcal{B} \tag{1}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{gilt:} \quad B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{B} \tag{2}$$

$$B \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} \in \mathcal{B} \tag{3}$$

$$\forall\, B \in \mathcal{B} \quad \exists\, V \in \mathcal{B} \quad \text{mit} \quad V^2 \subseteq B \tag{4}$$

einen Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$ auf X mit $\mathcal{U} := \{U \subseteq X \times X \mid \exists\, B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subseteq \mathcal{B}\}$.
Für spätere Überlegungen benötigen wir die Tatsache, das auch die symmetrischen, sowie Potenzen von, Nachbarschaften ein Fundamentalsystem bilden.

Satz 1.1. *Ist $\mathcal{B}$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{U}$, so sind auch*

1. $\mathcal{B}^s := \{B \cap B^{-1} \mid B \in \mathcal{B}\}$
2. $\mathcal{B}^n := \{B^n \mid B \in \mathcal{B}\}$, *wobei $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ beliebig.*

Fundamentalsysteme von $\mathcal{U}$.

Beweis:

ad 1.) trivial, da natürlich $B \cap B^{-1} \subseteq B$

ad 2.) für $U \in \mathcal{U}$ wähle $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$; $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{B}$ $k \in \mathbb{N}$ mit: $2^k > n$ $B_1^2 \subseteq C_1 \subseteq U$ $B_{i+1}^2 \subseteq C_{i+1} \subseteq B_i^2$ $\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Dies ist möglich, da $\Delta \subseteq B_i$, und damit $B_i^2 \in \mathcal{U}$ $\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Dann ist $B_k^{2^k} \subseteq U$, und damit $B_k^n \subseteq B_k^{2^k} \subseteq U$.

$\square$

2 Topologie uniformer Räume

Ein uniformer Raum (X, $\mathcal{U}$) induziert, ähnlich wie ein metrischer, eine Topologie auf X.

Definition 2.1. *Sei (X,$\mathcal{U}$) ein uniformer Raum. Dann heißt eine Menge $O \subseteq X$ offen, wenn*

$$\forall\, x \in O\; \exists\, U \in \mathcal{U} \quad \textit{sodass} \quad U(x) \subseteq O.$$

Dabei ist $U(x) := \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$.

Diese Definition einer Topologie in einem uniformen Raum ist also völlig analog zu der in einem metrischen Raum, indem einfach statt den $U_\epsilon(x)$ die oben definierten $U(x)$ als Basis der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ verwendet werden.

Definition 2.2. *Für eine Menge $A \subseteq X$, heißt $U(A) := \bigcup_{x \in A} U(x)$ gleichmäßige Umgebung von A.*

Satz 2.3.

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(A)$$

Bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen noch eine Vorbemerkung:

Bemerkung 2.4. *Betrachte $\mathcal{V} := \{V \in \mathcal{U} \mid V$ symmetrisch$\}$. Bekannterweise ist $\mathcal{V}$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{U}$. Nun gilt:* $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}} V$.

Beweis:
"$\subseteq$": Folgt aus der Tatsache das $\mathcal{V}$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{U}$ ist, und somit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ gilt.

"$\supseteq$": Sei $(x,y) \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}} V$, $U \in \mathcal{U}$ beliebig. Dann folgt das es ein $V \in \mathcal{V}$ gibt, mit $V \subseteq U$. Damit ist $(x,y) \in U$ und, da U beliebig war, $(x,y) \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U$. □

Nun zum Beweis von Satz 1:

Beweis (von Satz 2.1):
Da die $\{V(x) : V \in \mathcal{V}\}$ eine Basis des Umgebungsfilters $\mathfrak{U}(x)$ bilden, folgt aus Analysis 2: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow V(x) \cap A \neq \emptyset \; \forall \; V \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists y \in A : (x,y) \in V \; \forall \; V \in \mathcal{V} \Leftrightarrow (y,x) \in V \; \forall \; V \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \; x \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}} V(A) \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U(A)$.

□

Korollar 2.5. *Jeder uniforme Raum erfüllt T3*

Beweis:
Aus [ANA2] ist bekannt, das T3, also $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen, $x \in A^c \quad \exists \, O_x, O_A \in \mathfrak{T}$, $O_x \cap O_A = \emptyset$ mit $x \in O_x, A \subseteq O_A$, äquivalent dazu ist, das die abgeschlossenen Mengen eine Umgebungsbasis bilden. Da die gleichmäßigen Umgebungen per Definition eine Umgebungsbasis bilden, reicht es zu zeigen, dass $\forall \; x \in X \;, \forall \; U \in \mathcal{U} \; \exists A \in \mathfrak{U}(x)$ abgeschlossen, mit $A \subseteq U(x)$.
Sei nun $U \in \mathcal{U}$ beliebig und wähle $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subseteq U$. Dann folgt mit Satz 2.1 :

$$\overline{V(x)} \subseteq V(V(x)) = V^2(x) \subseteq U$$

□

Korollar 2.6.

$$(X,\mathcal{U}) \quad \textit{ist Hausdorff} \quad \Leftrightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" $x, y \in X \;\; x \neq y \Rightarrow \exists U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $U_1(x) \cap U_2(y) = \emptyset$
setze nun $U_1 \cap U_2 = U \in \mathcal{U}$ dann folgt:

$$U(x) \cap U(y) = \emptyset \Rightarrow (x,y),\; (y,x) \notin U$$

Somit haben wir für zwei verschiedene Punkte x,y ein $U \in \mathcal{U}$ gefunden, das weder (x,y) noch (y,x) enthält. Deshalb muss $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$ gelten.

"$\Leftarrow$ " $x, y \in X\ x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}$ mit $(x,y) \notin U$
wähle nun $W \in \mathcal{U},\ W = W^{-1}$ und $W^2 \subseteq U$ dann folgt: $W(x) \cap W(y) = \emptyset$. Denn angenommen es existiert ein $z \in W(x) \cap W(y)$ dann wäre $(x,z),\ (z,y) \in W$ und $(x,y) \in W^2$ also folglich $(x,y) \in U$ was zu einem Widerspruch führt.

$\square$

Für kompakte Teilmengen K eines uniformen Raumes gelten folgende Aussagen:

Satz 2.7. *1. Jede Umgebung von K enthält auch gleichmäßige Umgebungen*

2. Sei zusätlich A eine abgeschlossene Menge mit $A \cap K = \emptyset$ dann gilt: K und A besitzen disjunkte gleichmäßige Umgebungen.

Beweis:

ad (1) Es gilt: $U \in \mathfrak{U}(K) \Rightarrow \forall x \in K \exists\ V_x \in \mathcal{U}\ V_x(x) \subseteq U$ Wähle nun $W_x \in \mathcal{U}$ mit $W_x^2 \subseteq V_x$, dann ist $(\overset{\circ}{W}_x(x))_{x \in K}$ mit $\overset{\circ}{M} := \bigcup\limits_{O \in \mathfrak{T},\ O \subseteq M} O$, eine offene Überdeckung von K.

Da K kompakt ist, folgt: $\exists\ L = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad$ sodass $K \subseteq \bigcup\limits_{x \in L} \overset{\circ}{W}_x(x)$.

Betrachte nun $W := \bigcap\limits_{x \in L} W_x$, dann gilt $W(K) \subseteq U \quad W \in \mathcal{U}$.

Das folgt aus: $y \in W(K) \Leftrightarrow \exists x \in K$ mit $(x,y) \in W$ und $\exists z \in L$ mit $x \in W_z(z)$ also $(z,x) \in W_z$ somit ist $(z,y) \in W_z \cdot W \subseteq W_z^2 \subseteq V_z$ also $y \in V_z(z) \subseteq U$.

ad (2) Da $A \cap K \Leftrightarrow K \subseteq A^c$, folgt aus (1) die Existenz eines $W \in \mathcal{U}$ mit $W(K) \subseteq A^c$. Wähle nun $V \in \mathcal{U}$ symmetrisch mit $V^2 \subseteq W$, dann folgt $V(K) \cap V(A) = \emptyset$.
Wäre nämlich $z \in V(K) \cap V(A)$ so folgt $\exists\ x \in K,\ y \in A$ mit $(z,x), (z,y) \in V$ und, da V symmetrisch ist, $(x,y) \in V^2 \subseteq W$. Da somit $y \in W(K)$ sowie $y \in A$ ist dies ein Widerspruch zu $W(K) \cap A = \emptyset$.

$\square$

2.1 Gleichmäßig stetige Abbildungen

Es sei wieder an die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit von Funktionen zwischen metrischen Räumen erinnert:
Sein $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische Räume, sowie $f : X_1 \to X_2$ eine Funktion. Dann heißt f gleichmäßig stetig wenn:

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ :\ \forall\ x, y \in X_1 \text{ mit } d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Das ist aber, mit der Definition der U_ϵ von oben und$(f \times f) : X_1 \times X_1 \to X_2 \times X_2$, äquivalent zu:

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ mit } (f \times f)(U_\delta^{X_1}) \subseteq U_\epsilon^{X_2}, \text{ wobei } (f \times f)(x,y) := (f(x), f(y))$$

Definition 2.8. *Sein nun $(X_1, \mathcal{U}_1), (X_2, \mathcal{U}_2)$ uniforme Räume, dann heißt eine Funktion $f : X_1 \to X_2$ gleichmäßig stetig, wenn:*

$$\forall\ V \in \mathcal{U}_2\ \exists\ U \in \mathcal{U}_1\ : (f \times f)(U) \subseteq V \tag{5}$$

Lemma 2.9. *Äquivalent zu Definition 2.1.1 ist:*

$$\forall\ V \in \mathcal{U}_2\ :\ (f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_1$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $V \in \mathcal{U}_2$ beliebig, dann $\exists\ U \in \mathcal{U}_1\ : (f \times f)(U) \subseteq V$, also $U \subseteq (f \times f)^{-1}((f \times f)(U)) \subseteq (f \times f)^{-1}(V)$ und, da $\mathcal{U}_1$ ein Filter ist, folgt $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_1$

"$\Leftarrow$" Da $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_1\ \forall\ V \in \mathcal{U}_2$ und $(f \times f)((f \times f)^{-1}(V)) \subseteq V$, folgt das zu beweisende mit $U := (f \times f)^{-1}(V)$

□

Korollar 2.10. *Eine gleichmäßig stetige Abbildung f zwischen uniformen Räumen $(X_1,\mathcal{U}_1), (X_2,\mathcal{U}_2)$ ist stetig bezüglich den induzierten Topologien.*

Beweis:
Sei $x \in X_1$ und $V \in \mathfrak{U}(f(x))$. Dann folgt $\exists W \in \mathcal{U}_2$ mit $W(f(x)) \subseteq V$ sowie $\exists U \in \mathcal{U}_1$ mit $(f \times f)(U) \subseteq W$; daher ist $f(U(x)) \subseteq W(f(x)) \subseteq V$ □

Korollar 2.11. *Sein $(X_1,\mathcal{U}_1)$, $(X_2,\mathcal{U}_2)$, $(X_3,\mathcal{U}_3)$ unifome Räume, sowie $f : X_1 \to X_2$, $\quad g : X_2 \to X_3$ gleichmäßig stetige Funktionen. Dann ist auch $g \circ f : X_1 \to X_3$ gleichmäßig stetig.*

Beweis:
Es gilt $(g \times g)^{-1}(U_3) \in \mathcal{U}_2\ \forall\ U_3 \in \mathcal{U}_3$, sowie $(f \times f)^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}_1\ \forall\ U_2 \in \mathcal{U}_2$, also insbesondere $(g \circ f \times g \circ f)^{-1}(U_3) = ((f \times f)^{-1}((g \times g)^{-1}(U_3) \in \mathcal{U}_1\ \forall\ U_3 \in \mathcal{U}_3$ □

Definition 2.12. *Eine bijektive, gleichmäßig stetige Funktion $f\ :\ X_1\ \to\ X_2$ zwischen zwei uniformen Räumen $(X_1,\mathcal{U}_1)$, $(X_2,\mathcal{U}_2)$, für die auch $f^{-1} : X_2 \to X_1$ gleichmäßig stetig ist, heißt Isomorphismus. Zwei uniforme Räume X_1, X_2 heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : X_1 \to X_2$ gibt.*

2.2 Initiale uniforme Strukturen

Für zwei uniforme Strukturen $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ auf einer Menge X, mit $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ sagt man $\mathcal{U}_1$ ist *gröber* als $\mathcal{U}_2$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2$ ist *feiner* als $\mathcal{U}_1$.

Seien nun Mengen X und I, eine Familie von uniformen Räumen $(X_i,\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ zusammen mit einer Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Abbildungen, wobei $f_i : X \to X_i$, gegeben.

Definition 2.13. *Dann heißt jene uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X, die als Fundamentalsystem $\mathcal{B}$ besitzt, wobei:*

$\mathcal{B} := \{B_L \mid L \subseteq I \; |L| < \infty\}$ *mit Mengen B_L folgender Gestalt:* $B_L := \bigcap\limits_{l \in L} (f_l \times f_l)^{-1}(U_l)$ *für gewisse $U_l \in \mathcal{U}_l$*

die initiale uniforme Struktur auf X bezüglich den $(f_i)_{i \in I}$.

Für diese gilt:

1. Das Mengensystem $\mathcal{B}$ ist tatsächlich ein Fundamentalsystem auf $X \times X$
2. $\mathcal{U}$ ist die gröbste uniforme Stuktur auf X, bezüglich derer alle $(f_i)_{i \in I}$ gleichmäßig stetig sind. Also mit anderen Worten: Wenn $\mathcal{V}$ eine uniforme Struktur auf X ist, mit $(f_i \times f_i)^{-1}(U_i) \in \mathcal{V} \; \forall \; i \in I, \; U_i \in \mathcal{U}_i$, dann folgt schon $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$.
3. Eine Abbildung $h : Z \to X$ wobei $(Z, \mathcal{Z})$ ein uniformer Raum ist und X die initiale uniforme Struktur der $(f_i)_{i \in I}$ besitzt, ist genau dann gleichmäßig stetig wenn alle $f_i \circ h : Z \to X_i \; , \; i \in I$ gleichmaßig stetig sind.
4. Die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}}$ ist gleich der initalen Topologie $\mathfrak{T}_{in}$ auf X bezüglich der $(f_i)_{i \in I}$

Beweis:

ad 1) **B1)** Sei $(x, x) \in X \times X$ beliebig. Dann ist $(f_i(x), f_i(x)) \in U_i \; \forall \; i \in I, U_i \in \mathcal{U}_i$. Damit ist also $(x, x) \in (f_i \times f_i)^{-1}(U_i) \; \forall x \in X, i \in I, U_i \in \mathcal{U}_i$ also $\Delta \subseteq B_L \; \forall \; B_L \in \mathcal{B}$

B2) trivial

B3) Mit U4) folgt: $(x, y) \in B_L = \bigcap_{l \in L} (f_l \times f_l)^{-1}(U_l) \Leftrightarrow (f_l(x), f_l(y)) \in U_l \; \forall \; l \in L \Leftrightarrow (f_l(y), f_l(x)) \in U_l^{-1} \; \forall \; l \in L \Leftrightarrow (y, x) \in \bigcap_{l \in L} (f_l \times f_l)^{-1}(U_l^{-1}) = B_L^{-1} \in \mathcal{B}$

B4) Sei $B_L = \bigcap_{l \in L} (f_l \times f_l)^{-1}(U_l)$ beliebig und $V_l \in \mathcal{U}_l$ mit $V_l^2 \subseteq U_l \; , \; l \in L$. Dann folgt mit $W_L = \bigcap_{l \in L} (f_l \times f_l)^{-1}(V_l) \in \mathcal{B}$: $\quad (x, y) \in W_L^2 \Leftrightarrow \exists \; z \in X : \; (x, z), (z, y) \in W_L \Rightarrow (f_l(x), f_l(z)), (f_l(z), f_l(y)) \in V_l \; \forall \; l \in L \Rightarrow (f_l(x), f_l(y)) \in V_l^2 \subseteq U_l \; \forall \; l \in L \Rightarrow (x, y) \in B_L$.

ad 2) Offensichtlich sind alle $(f_i)_{i \in I}$ gleichmäßig stetig bezüglich $\mathcal{U}$. Sei $\mathcal{V}$ ein Nachbarschaftsfilter auf X. Falls $(f_i) i \in I$ gleichmäßig stetig bezüglich $\mathcal{V}$ ist, folgt $(f_i \times f_i)^{-1}(U_i) \in \mathcal{V} \; \forall \; U_i \in \mathcal{U}_i$ und damit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$. Somit gilt $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U \in \mathcal{V}$, also $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$.

ad 3) **"$\Rightarrow$"** Da h, $f_i \; \forall \; i \in I$ gleichmäßig stetig sind, sind es auch $f_i \circ h \; \forall \; i \in I$, siehe Korollar 2.9.

"$\Leftarrow$" Sei $U \in \mathcal{U}$ beliebig. Zu zeigen ist somit, das $(h \times h)^{-1}(U) \in \mathcal{Z}$. Mit der Definition von $\mathcal{U}$ folgt: $\exists \; L \subseteq I$ endlich, $U_l \in \mathcal{U}_l \; \forall l \in L$, sodass $\bigcap_{l \in L} (f_l \times f_l)^{-1}(U_l) = B_L \subseteq U, B_L \in \mathcal{U}$. Damit ist $(h \times h)^{-1}(U) \supseteq (h \times h)^{-1}(B_L) = V$ mit $V := \bigcap_{l \in L} (h \times h)^{-1}((f_l \times f_l)^{-1}(U_l)) = \bigcap_{l \in L} (f_l \circ h \times f_l \circ h)^{-1}(U_l)$. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit aller $f_i \circ h, i \in I$ ergibt sich nun: $V \in \mathcal{Z}$, und damit, da $\mathcal{Z}$ ein Filter ist, $(h \times h)^{-1}(U) \in \mathcal{Z}$.

ad 4) Aus der gleichmäßiger Stetigkeit der $(f_i)_{i \in I}$ folgt die Stetigkeit dieser Abbildungen bezüglich $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}}$. Da $\mathfrak{T}_{in}$ die gröbste Topologie ist bezüglich der die $(f_i)_{i \in I}$ stetig sind, folgt $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}} \supseteq \mathfrak{T}_{in}$.
Sei nun $x \in X$ beliebig. Betrachte nun den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}_{in}(x)$ von $\mathfrak{T}_{in}$. Aus den

Eigenschaften der initialen Topologie folgt: $O_x \in \mathfrak{U}_{in}(x) \Rightarrow \exists L \subseteq I$ endlich $V_l(f_l(x)) \in \mathfrak{U}_l(f_l(x)) \; \forall \; l \in L$, mit $\bigcap\limits_{l \in L} f_l^{-1}(V_l(f_l(x))) \subseteq O_x$. Nun ist aber $\mathcal{U}_l(f_l(x))$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}_l(f_l(x)) \; \forall \; l \in L$. Damit folgt: $\forall \; l \in L \; \exists \; U_l \in \mathcal{U}_l$ mit $U_l(f_l(x)) \subseteq V_l(f_l(x)) \Rightarrow B_L(x) = \bigcap\limits_{l \in L} f_l^{-1}(U_l(f_l(x)) \subseteq \bigcap\limits_{l \in L} f_l^{-1}(V_l(f_l(x)) \subseteq O_x$. Also sind die $B_L(x) \in \mathfrak{U}_{\mathcal{U}}(x)$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}_{in}(x)$ und somit $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathfrak{T}_{in}$.

□

Definition 2.14. *Eine Teilmenge A eines uniformen Raumes $(X,\mathcal{U})$, zusammen mit der initialen uniformen Struktur bezüglich der Einbettungsabbildung $\iota : A \to X$ mit $\iota(x) = x$ heißt Teilraum von X.*

Definition 2.15. *Für eine Familie von uniformen Räumen $(X_i,\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ mit beliebiger Indexmenge I, heißt $X := \prod_{i\in I} X_i$, versehen mit der induzierten uniformen Struktur der Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ mit $\pi_i((x_j)_{j\in J}) = x_i$, Produktraum von $(X_i,\mathcal{U}_i)_{i\in I}$.*

3 Vollständige uniforme Räume

Zur Erinnerung: In einem metrischen Raum heißt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $x \in X$, wenn:

$$\forall \; \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \epsilon \; \forall \; n \geq N$$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn:

$$\forall \; \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \epsilon \; \forall \; n, m \geq N$$

Offensichtlich ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.
Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn auch jede Cauchyfolge konvergiert.

Bevor wir nun zu den uniformen Räumen komme, wollen wir noch Bemerkungen zur Konvergenz in topologischen Räumen treffen.

Bemerkung 3.1. *Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf X heißt konvergent, wenn es ein $x \in X$ gibt, sodass $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}(x)$. In Zeichen: $x \in \lim \mathfrak{F}$. Falls X Hausdorff ist, so ist dieses x eindeutig.*

In [ANA2] wurde die Konvergenz über den Begriff des Netzes eingeführt:

Definition 3.2. *Seinen ein toplogischer Raum X, eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$, sowie ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ gegeben. Dann heißt dieses Netz konvergent gegen $x \in X$, wenn*

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \; \exists i_0 \in I \;\; : \;\; \forall i \succeq i_0 \Rightarrow x_i \in U.$$

Da für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X die Mengen $F_i := \{x_j : j \in I, \; i \preceq j\}$ einen Filter bilden - das folgt sofort aus der Definition einer gerichteten Menge - ist diese Definiton konsistent mit dem obigen Begriff der Filterkonvergenz.
Da jede Folge auch ein Netz ist, stimmt obige Definition über Netze auch mit der Konvergenzdefinition in metrischen Räumen überein.

Sei nun ein uniformer Raum $(X,\mathcal{U})$ gegeben.

Definition 3.3. *Eine Menge $A \subset X$ heißt klein von Ordnung V, $V \in \mathcal{U}$ wenn $\forall x \in A : V(x) \supset A$, bzw. äquivalent dazu $A \times A \subset V$.*

Definition 3.4. *Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf X heißt nun Cauchyfilter, wenn*

$$\forall U \in \mathcal{U} \; \exists F \in \mathfrak{F} : F \times F \subset U$$

Da die U_ϵ eine Basis des Nachbarschaftsfilters in metrischen Räumen bilden, folgt das der von einer Cauchyfolge induzierte Filter $\mathfrak{F}$ mit der Fiterbasis $F_i := \{x_j : j \in \mathbb{N},\ i \leq j\}$ auch ein Cauchyfilter ist.

Bemerkung 3.5. *Sei nun wieder ein uniformer Raum $(X,\mathcal{U})$ und ein symmetrisches $U \in \mathcal{U}$ gegeben, dann gilt:*

$$U(x) \times U(x) \subseteq U^2$$

Beweis:
$(y, z) \in U(x) \times U(x) \Leftrightarrow (x, y), (x, z) \in U \Leftrightarrow (y, x), (x, z) \in U \Rightarrow (y, z) \in U^2$. $\square$

Da diese Mengen eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathfrak{U}(x)$ bilden, folgt das dieser, und damit jeder konvergente Filter, ein Cauchyfilter ist.

Definition 3.6. *Ein uniformer Raum heißt nun, analog zu den metrischen, vollständig, wenn jeder Cauchyfilter konvergiert.*

Satz 3.7. *Sein $(X_1,\mathcal{U}_1)$, $(X_2,\mathcal{U}_2)$ zwei uniforme Räume und $f : X_1 \to X_2$ eine gleichmäßig stetige Abbildung, sowie $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter auf X_1. Dann folgt: $f(\mathfrak{F})$ ist ein Cauchyfilter auf X_2.*

Beweis:
Sei ein beliebiges $U_2 \in \mathcal{U}_2$ gegeben. Da f gleichmäßig stetig ist, folgt $(f \times f)^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}_1$. Da $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter auf X_1 ist, gilt: $\exists F \in \mathfrak{F} : F \times F \subset (f \times f)^{-1}(U_2) \Rightarrow (f \times f)(F \times F) \subset U_2$. $\square$

Satz 3.8. *Sein eine Menge X, sowie ein uniformer Raum $(Y, \mathcal{V})$ mit einer Funktion $f : X \to Y$ gegeben. Weiters sei X mit der von f induzierten, initialen uniformen Struktur versehen, sowie $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter auf Y. Falls $\mathfrak{F}$ ein Urbild bezüglich f besitzt, so ist dieses wieder ein Cauchyfilter.*

Beweis:
Sei ein beliebiges $U \in \mathcal{U}_{in}$ gegeben. Da $\mathcal{U}_{in}$ der initiale Nachbarschaftsfilter bezüglich f ist, gilt (mit der Definition eines Fundamentalsystems): $\exists V \in \mathcal{V} : (f \times f)^{-1}(V) \subseteq U$. Nun folgt aber, da $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter ist, dass: $\exists F \in \mathfrak{F} : F \times F \subset V \Rightarrow (f \times f)^{-1}(F \times F) \subset (f \times f)^{-1}(V) \subseteq U$. $\square$

Korollar 3.9.
1. *Ein abgeschlossener Teilraum A eines vollständigen uniformen Raumes $(X,\mathcal{U})$ ist vollständig*
2. *Ein vollständiger Teilraum A eines uniformen Hausdorff-Raumes $(X,\mathcal{U})$ ist abgeschlossen*

Beweis:

ad (1) Sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter auf A, $\iota : A \to X : \iota(x) = x$ die Einbettungsabbildung, sowie $\mathfrak{F}' := \iota(\mathfrak{F})$. Da ι gleichmäßig stetig ist, folgt aus Satz 3.6, das auch $\mathfrak{F}'$ ein Cauchyfilter auf X ist. Nun ist X aber vollständig und somit ist $\mathfrak{F}'$ konvergent. Also $\exists x \in X : x \in \lim \mathfrak{F}'$. Da A abgeschlossen ist, folgt also $x \in A \Rightarrow x \in \lim \mathfrak{F}$.

ad (2) Sei $x \in \overline{\mathrm{A}}$ beliebig, ι wieder die Einbettungsabbildung und $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x. Betrachte nun $\mathfrak{F} := \iota^{-1}(\mathfrak{U}(x)) = \mathfrak{U}(x) \cap A$. Da $\mathfrak{U}(x)$ ein Cauchyfilter auf X ist, folgt aus Satz 3.7, das auch $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter auf A ist. Nun ist A aber vollständig, also ist $\mathfrak{F}$ konvergent, also $\exists y \in A : y \in \lim \mathfrak{F}$. Die Fortsetzung von $\mathfrak{F}$ auf X konvergiert auch gegen y, und da sie feiner als $\mathfrak{U}(x)$ ist, auch gegen x. Da X aber Haudorff ist, muss x=y gelten.

$\square$

Literatur

[ANA2] **M. Kaltenbäck**, Analysis 2 für Technische Mathematik, Vorlesungsskript an der TU Wien, 2012

[Top] **H. Schubert**, Topologie; eine Einführung, Teubner, Stuttgart, 1964

[MT] **B. von Querenburg**, Mengentheoretische Topologie, Springer, Berlin, 2001