Seminararbeit: Umkehrung des Banachschen Fixpunktsatzes

Johannes Kaiser, Matr.Nr. 1225752

20. Juli 2015

1 Einleitung

Die folgende Aussage, bekannt als der Banachsche Fixpunktsatz, ist ein fundamentales Instrument um auf Existenz von Fixpunkten zu schließen:

Satz 1.1. *Jede Kontraktion auf einem nichtleeren vollständigen metrischen Raum besitzt genau einen Fixpunkt.*

In dieser Arbeit möchten wir uns in erster Linie mit der Umkehrung des Banachschen Fixpunktsatzes beschäftigen, welche auch unter dem Namen Bessagas Theorem läuft. Dieses beschäftigt sich mit der Frage inwiefern die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten auf die Existenz einer (möglicherweise vollständigen) Metrik schließen lassen. Danach werden wir einige ähnliche Sätze, die unabhängig vom Auswahlaxiom sind zeigen. Im letzten Abschnitt beschäftige wir uns mit der Frage, inwiefern die Banachsche Fixpunkteigenschaft Vollständigkeit impliziert. Die Beweise die wir anführen stammen dabei aus [1] und [2].

2 Umkehrung des Banachschen Fixpunktsatzes

Satz 2.1 (Satz von Bessaga)**.** *Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $F : \Omega \mapsto \Omega$ und $\alpha \in (0,1)$. Sei vorausgesetzt, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion F^n genau einen Fixpunkt besitzt. Dann existiert eine vollständigen Metrik d, mit $d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)$ für alle $x, y \in \Omega$.*

Im Beweis des Satzes verwenden wir folgendes Lemma:

Lemma 2.2. *Sei F eine Selbstabbildung einer Menge Ω und sei $\alpha > 0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert eine vollständige Metrik d für Ω, sodass $d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)$ für alle $x, y \in \Omega$.

(ii) Es existiert eine Abbildung ϕ, sodass

$$\phi : \Omega \mapsto [0, \infty), \phi(Fx) \leq \alpha\phi(x). \tag{1}$$

erfüllt ist und $\phi^{-1}(\{0\})$ einelementig ist,

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat F einen Fixpunkt z. Setze $\phi(x) = d(x, z)$, womit $\phi^{-1}(\{0\}) = \{z\}$, das heißt $\phi^{-1}(\{0\})$ ist einelementig. Es gilt außerdem:

$$\phi(F(x)) = d(F(x), z) \leq \alpha d(x, z) = \alpha\phi(x).$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Definiere $d(x, y) := \phi(x) + \phi(y)$ wenn $x \neq y$ und $d(x, x) = 0$. Damit ist d offensichtlich eine Metrik und wegen $\phi(Fx) \leq \alpha\phi(x)$ ist F eine Kontraktion. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge.

Angenommen die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ habe endliche Mächtigkeit, dann existiert eine konstante Teilfolge, welche trivialerweise konvergent ist. Damit muss dann aber die ganze Folge konvergieren. Wenn obige Mächtigkeit unendlich ist, existiert nach Definition eine Teilfolge für die gilt

$$d(x_{k_n}, x_{k_m}) = \phi(x_{k_n}) + \phi(x_{k_m}), n \neq m.$$

Damit folgt aber $\phi(x_{k_n}) \to 0$ weil sonst $d(x_{k_n}, x_{k_m})$ nicht gegen 0 ginge. Wegen (ii) ist $\phi(z) = 0$ für ein $z \in \Omega$ und damit gilt $d(z, x_{k_n}) \to 0$, und deswegen konvergiert auch x_n gegen z.

$\square$

Beweis. (Satz von Bessaga)
Unsere Annahme war, dass F^n genau einen Fixpunkt z besitzt, womit wegen

$$F(z) = F(F^n(z)) = F^n(F(z))$$

folgt, dass $F(z)$ Fixpunkt von F^n ist. Damit und mit der Eindeutigkeit des Fixpunktes gilt $Fz = z$. Analog erhält man, dass z ein Fixpunkt jeder Iterierten von F ist. Wir wollen nun mit dem Lemma von Zorn zeigen, dass es ein $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ so gibt, dass $\phi(Fx) \leq \alpha\phi(x)$ erfüllt ist und $\phi^{-1}(\{0\}) = \{z\}$ gilt.

$\Phi := \{\phi : D_\phi \to [0, \infty) \mid z \subseteq D_\phi \subseteq \Omega, \phi^{-1}(\{0\}) = \{z\}, F(D_\phi) \subseteq D_\phi$ und (1) gilt auf $D_\phi\}$

Damit ist Φ nichtleer, da für $D_{\phi_*} := \{z\}$ und $\phi_*(z) := 0$ gilt, dass $\phi_* \in \Phi$. Nun versieht man Φ mit folgender partieller Ordnung:

$$\phi_1 \preceq \phi_2 \Leftrightarrow D_{\phi_1} \subseteq D_{\phi_2} \text{ und } \phi_2 |_{D_{\phi_1}} = \phi_1.$$

Sei nun $\Phi_0 \subseteq \Phi$ eine Kette und sei $D := \bigcup_{\phi \in \Phi_0} D_\phi$. Dann gilt $F(D) \subseteq D$ und eine Funktion ψ auf D ist definiert als $\psi(x) = \phi(x)$ wenn $x \in D_\phi$. Damit erfüllt ψ (1) und man hat eine obere Schranke für Φ_0 gefunden.
Dann folgt mit dem Lemma von Zorn, dass es ein maximales Element $\phi_0 : D_0 \to \mathbb{R}_+$ in $(\Phi, \preceq)$ gibt. Es genügt nun zu zeigen, dass $D_0 = \Omega$. Man nehme nun das Gegenteil an, also dass ein $x_0 \in \Omega \setminus D_0$ und setze nun

$$O(x_0) := \{F^{n-1}(x_0) : n \in \mathbb{N}\}. \qquad (2)$$

Schritt 1:
Angenommen $O(x_0) \cap D_0 = \emptyset$. Dann sind die Elemente $F^{n-1}x_0$ unterschiedlich für $n \in \mathbb{N}$, da anderenfalls $z \in O(x_0)$, weil z der einzige Fixpunkt von F^n ist, gelten würde, was ein Widerspruch wäre. Definiere

$D_\phi := O(x_0) \cup D_0, \phi |_{D_0} := \phi_0$ und $\phi(F^{n-1}x_0) := \alpha^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\phi \in \Phi$, $\phi \neq \phi_0$ und $\phi \succeq \phi_0$ was ein Widerspruch ist. Damit folgt, dass $O(x_0) \cap D_0 \neq \emptyset$.

Schritt 2:
Nach Schritt 1 definiere

$$m := \min\{n \in \mathbb{N} : F^n x_0 \in D_0\}.$$

Dann ist $F^{m-1}x_0 \notin D_0$. Definiere $D_\phi := \{F^{m-1}x_0\} \cup D_0$. Dann

$$F(D_\phi) = \{F^m x_0\} \cup F(D_0) \subseteq D_0 \subset D_\phi,$$

also ist D_ϕ F-invariant. Wir definieren nun eine Funktion $\phi : D_\phi \to [0, \infty)$. Setze $\phi\mid_{D_0} := \phi_0$. Dann sind folgende zwei Fälle möglich:

Fall 1: $F^m x_0 = z$:
Setze $\phi(F^{m-1}x_0) := 1$.

Fall 2: $F^m x_0 \neq z$:
Setze $\phi(F^{m-1}x_0) := \phi_0(F^m x_0)/\alpha$, womit jeweils (1) erfüllt ist.
In beiden Fällen ist $\phi \in \Phi, \phi \neq \phi_0$ und $\phi_0 \preceq \phi$, was einen Widerspruch liefert. Daraus folgt, dass $D_0 = \Omega$. Daraus folgt mit Lemma 2.2 die Aussage.

□

Definition 2.3. Wir nennen einen Punkt $x \in \Omega$ periodisch wenn $F^n(x) = x$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.4. *Sei F eine Selbstabbildung auf einer Menge Ω und $\alpha \in (0, 1)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) F hat keine periodischen Punkte.

(ii) die Gleichung

$$\phi : \Omega \to (0, \infty), \phi(Fx) = \alpha\phi(x) \tag{3}$$

hat eine Lösung.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Definiere:

$$\Phi := \{\phi : D_\phi \to (0, \infty) \mid D_\phi \neq \emptyset, D_\phi \subseteq \Omega,\ F(D_\phi) \subseteq D_\phi \text{ und (3) gilt auf } D_\phi\}.$$

Um zu zeigen, dass Φ nichtleer ist fixiert man $x_0 \in \Omega$ und setzt $D_\phi := O(x_0)$, mit $O(x_0)$ analog zu (2). Dann folgt mit (i), dass die Elemente $F^{n-1}x_0$ verschieden sind und man kann eine Funktion ϕ_* definieren indem man $\phi_*(F^{n-1}x_0) := \alpha^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ setzt.
Dann ist $\phi \in \Omega$. Nun können wir das Argument aus der Umkehrung des Banachschen Fixpunktsatzes wiederholen. Man erkennt, dass Funktionen ϕ definiert wie in Schritt 1 und Fall 2 die Gleichung (3) erfüllen und dass Fall 1 nicht auftreten kann.
Um (ii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen nehme man das Gegenteil an, also, dass ein $x_0 \in \Omega$ mit $F^n(x_0) = x_0$ gibt. Aus (3) folgt $\phi(x_0) = \phi(F^n x_0) = \alpha^n(\phi(x_0))$ und damit $\phi(x_0) = 0$, ein Widerspruch.

□

Satz 2.5. *Sei F eine Selbstabbildung einer Menge Ω und $\alpha \in (0, 1)$. Wenn F keine periodischen Punkte hat, dann existiert eine Metrik d, sodass d die diskrete Topologie auf Ω induziert und sodass $d(Fx, Fy) = \alpha d(x, y)$ für alle $x, y \in \Omega$ mit $Fx \neq Fy$ gilt.*

Beweis. Da F keinen periodischen Punkt hat folgt aus Lemma 2.2 die Existenz einer Abbildung $\phi : \Omega \to (0, \infty)$, mit $\phi(Fx) = \alpha\phi(x)$. Nun definieren wir eine Metrik d wie folgt:

$$d(x, y) := \begin{Bmatrix} \phi(x) + \phi(y) & x \neq y \\ 0 & sonst \end{Bmatrix}$$

Dann erkennt man, dass $Fx \neq Fy$ impliziert, dass $d(Fx, Fy) = \alpha d(x, y)$ gilt. Zusätzlich gilt für alle $x \in \Omega$, dass die offene Kugel $U(x, \phi(x))$ einelementig ist. Damit folgt die Aussage. □

Korollar 2.6. *Hat F^n höchstens einen Fixpunkt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann existiert eine Metrik d, sodass $d(Fx, Fy) \leq \alpha d(x, y)$ für alle $x, y \in \Omega$.*

3 Ähnliche Resultate, ohne Benutzung des Auswahlaxioms

Man kann zeigen, dass Satz 2.1 nicht nur aus dem Auswahlaxiom folgt, sondern es auch impliziert. Man kann aber unter speziellen Annahmen, eine Metrik konstruieren ohne das Auswahlaxiom zu verwenden:

Satz 3.1. *Sei F eine Selbstabbildung einer Menge Ω, und $\alpha \in (0,1)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(\Omega)$ *ist einelementig.*

(ii) $\phi(Fx) \leq \alpha\phi(x)$ *hat eine beschränkte Lösung* $\phi : \Omega \to [0,\infty)$ *sodass* $\phi^{-1}(\{0\})$ *einelementig ist.*

(iii) Es existiert eine vollständige und beschränkte Metrik, d *für* Ω*, mit* $d(Fx, Fy) \leq \alpha d(x, y)$ *für alle* $x, y \in \Omega$*.*

Beweis. (i)⇒(ii) Sei $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(\Omega) = \{z\}$. Definiere für $x \neq z$

$$n(x) := \sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x \in F^n(\Omega)\}.$$

Weil die Folge $(F^n(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist impliziert (i), dass $n(x)$ für $x \neq z$ endlich ist. Definiere eine Funktion ϕ durch

$\phi(z) := 0$ und $\phi(x) := \alpha^{n(x)}$ für $x \neq z$.

Offensichtlich ist ϕ beschränkt und $\phi^{-1}(\{0\}) = \{z\}$. Fixiere nun ein $x \in \Omega$. Wenn $Fx = z$, dann gilt (1). Also sei $F(x) \neq z$, dann gilt $n(Fx) \geq n(x) + 1$ und damit

$\phi(Fx) = \alpha^{n(Fx)} \leq \alpha^{n(x)+1} = \alpha\phi(x)$ und damit gilt (ii).

(ii)⇒(iii) Es genügt d so zu definieren wie im Beweis zu Lemma 1((ii)⇒(i)).
(iii)⇒(i) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(F^n(\Omega))$ auf jeden Fall nichtleer und wegen der Tatsache, dass $\operatorname{diam}(F^n(\Omega)) \to 0$ einelementig.

□

Satz 3.2. *Sei F eine Selbstabbildung einer Menge Ω, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) der Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(\Omega)$ *ist leer.*

(ii) Die Ungleichung (1) *hat eine beschränkte Lösung* $\phi : \Omega \to (0,\infty)$

(iii) Es existiert eine beschränkte Metrik d *für* Ω*, sodass* F *eine fixpunktfreie Kontraktion bezüglich* α *und* d *ist.*

Beweis. (i)⇒(ii) Sei $x_0 \notin \Omega$ $\Omega_0 := \Omega \cup \{x_0\}$. Sei $F_0 x_0 := x_0$ und $F_0 \mid_\Omega := F$. Dann folgt aus Satz 3.1 ((ii)⇒(i)), dass es eine Lösung $\phi_0 : \Omega \to [0,\infty)$ von (1) gibt für die gilt, dass $\phi^{-1}(\{0\})$ einelementig ist. Weil $\phi_0(x_0) = 0$, ist $\phi := \phi_0 \mid \Omega$ eine Funktion wie wir sie brauchen.
(ii)⇒(iii) Definiere d so wie im Beweis von Lemma 1 ((ii)⇒(i)). Dann ist F eine Kontraktion bezüglich α und fixpunktfrei; wenn anderenfalls $x_0 = Fx_0$ gilt, dann folgt wegen (1) $\phi(x_0) = 0$, was (ii) verletzt.
(iii)⇒(i) Wegen (iii) folgt $\operatorname{diam}(F^n(\Omega)) \to 0$ und damit $\mid \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(\Omega)) \mid \leq 1$. Angenommen, dass

$\{x_0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty}(F^n(\Omega))$ gilt, dann folgt

$$\{Fx_0\} = F(\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(\Omega)) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{n+1}(\Omega) = \{x_0\},$$

was einen Widerspruch liefert. Daraus schließen wir, dass (i) gilt. □

4 Banachsche Fixpunkteigenschaft

Definition 4.1. Ein metrischer Raum hat die Banachsche Fixpunkteigenschaft (BFPP) genau dann, wenn jede Kontraktion $f : X \to X$ einen Fixpunkt besitzt.

Im Allgemeinen hat wegen dem Banachschen Fixpunktsatz jede Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum einen Fixpunkt. Die Umkehrung gilt allerdings nicht immer wie folgendes Beispiel zeigt:

Satz 4.2. *Sei* $X := \text{graph}(\sin(1/x) \mid_{(0,1]})$. *Dann ist* X *eine nicht abgeschlossene Teilmenge des* $\mathbb{R}^2$, *die die BFPP besitzt.*

Beweis. X ist offensichtlich nicht abgeschlossen. Sei $f : X \to X$ eine Kontraktion bezüglich $\alpha \in (0,1)$. Für $H \subseteq (0,1]$ definiere $X \mid_H = \text{graph}(\sin(1/x) \mid_H)$. Wähle nun $\epsilon > 0$, sodass $\text{diam}(X \mid_{(0,\epsilon)}) < \frac{2}{\alpha}$, womit $\text{diam}(f(X \mid_{(0,\epsilon)})) < 2$.
Daher kann $f(X \mid_{(0,\epsilon)})$ nicht sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum des Graphen enthalten. Diese Menge ist außerdem offensichtlich zusammenhängend, und kann daher höchstens zwei monotone Teile besitzen. Deshalb existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass $f(X \mid_{(0,\epsilon)}) \subset X \mid_{[\delta_1,1]}$. Außerdem existiert offensichtlich ein $\delta_2 > 0$, sodass $f(X \mid_{(\epsilon,1)}) \subset X \mid_{[\delta_1,1]}$. Wenn man nun $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ setzt folgt $f(x) \subset X \mid_{[\delta,1]}$, wobei Zweiteres eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist, und damit selbst vollständig ist.
Daraus folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz eines Fixpunktes von $X \mid_{[\delta,1]}$ und damit auch für dessen Obermenge X. □

Im folgenden Teil werden wir die Frage beantworten, ob es eine offene echte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gibt, die die BFPP besitzt. Dazu zuerst ein Lemma:

Lemma 4.3. *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $X \subset \mathbb{R}^n$, *sodass es* $y, z \in \mathbb{R}^n$ *gibt, wobei* $y \notin X$, *aber* $(y, z) \subset X$ *gelten soll. Dann hat* X *die BFPP nicht.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $y = (0, ..., 0)$ und $z = (1, ..., 0)$. Dann ist die Funktion

$$f(x) = (\frac{1}{2} \arctan |x|, 0, ..., 0)$$

eine Kontraktion. Das erkennt man, da Betragsfunktion und Arcustangens Lipschitz-stetig mit Konstante 1 sind. Das erkennt man im ersten Fall durch die Dreiecksungleichung und im zweiten Fall durch den Mittelwertsatz. Damit gilt für die ganze Funktion:

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b|.$$

Da keine Kontraktion mehr als einen Fixpunkt besitzt und $(0, ..., 0)$ offensichtlich einer von f ist, folgt, dass $f|_X$ keinen besitzt. □

Korollar 4.4. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *stimmt jede offene Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$ *mit der BFPP mit dem ganzen Raum überein und ist daher abgeschlossen.*

Beweis. Sei U echte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, mit der BFPP. Dann existiert ein $z \in U$ und ein $x \notin U$. Sei y nun der nächste Punkt von $[x, z)\backslash U$ zu z: Dann folgt mit dem vorigen Lemma, der Widerspruch das U die BFPP nicht hat. □

Die letzte Frage die ich nun noch bearbeiten möchte ist diese:
Gibt es ein „einfaches“ Beispiel für eine nicht abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der BFPP? Bevor ich mich der Beantwortung der Frage zuwenden kann, muss ich noch einige Dinge definieren:

Definition 4.5. Eine Menge U_A heißt relativ offen, wenn es eine offene Menge U gibt, sodass gilt: $U \cap A = U_A$. Oder anders gesagt wenn U_A bezüglich der Spurtopologie offen in A ist.

Definition 4.6. Eine Menge A wird F_σ-Menge genannt wenn sie als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen darstellbar ist.

Satz 4.7. *Ohne Beweis gelten für eine F_σ-Menge folgende Aussage: Das Komplement einer F_σ-Menge ist eine G_δ-Menge.*

Definition 4.8. Eine ambiguale Menge A ist eine Menge, die sowohl F_σ als auch G_δ ist.
Man beachte, dass das äquivalent dazu ist, dass für jede nichtleere abgeschlossene Menge entweder A, oder A^c eine relativ offene Teilmenge dieser Menge enthalten.

Definition 4.9. Ein zweiseitiger Häufungspunkt einer Menge M ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}$, der sowohl Häufungspunkt von $(-\infty, x) \cap M$ als auch von $(x, \infty) \cap M$ ist.

Lemma 4.10. *Sei $X \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in \overline{X}\backslash X$ und 0 zweiseitigem Häufungspunkt von $(X^c)^\circ$. Dann hat X nicht die BFPP.*

Beweis. Sei $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen in $X^c \cap (0, \infty)$, sodass $b_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Außerdem gelte $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$. Nun sei $z_n \in X$ eine monoton fallende Folge mit

$$|z_n| < \frac{|b_n - a_n|}{2}.$$

Sei jetzt n_x, für ein $x \in X$ der kleinste Index, sodass $b_{n_x} < x$ gilt und setze $f(x) = z_{n_x}$. Analog sei $f(x)$ auf $(-\infty, 0)$ definiert, dann ist f eine Kontraktion. Um das einzusehen betrachte man drei Fälle:

Fall 1: $0 < x < y$:
(1a) $n_x = n_y$:
Nach Definition von f folgt $f(x) = f(y)$.
(1b) $n_x > n_y$:
Es gilt nun

$$|f(x) - f(y)| < |z_{n_y}| < \frac{|b_{n_y} - a_{n_y}|}{2} < \frac{|x - y|}{2},$$

wobei die ersten beiden Ungleichungen wegen der Definitionen von f und z_{n_x} gelten. Die letzte gilt, weil $y > b_{n_y}$ nach Definition gilt und weil $x < a_{n_y}$ sein muss weil die Intervalle aus X^c sein müssen. Damit ist f eine Kontraktion auf $X \cap (0, \infty)$.

Fall 2: $y < x < 0$:
Wird analog zu Fall 1 behandelt.

Fall 3: $x < 0 < y$:
Damit gilt nun

$$|f(x)| < |z_{n_x}| < \frac{|b_{n_x} - a_{n_x}|}{2} < \frac{|x|}{2},$$

woraus mit der Dreiecksungleichung folgt, dass $|f(x) - f(y)| < \frac{|x-y|}{2}$.
Damit ist f eine Kontraktion auf X und weil $0 \notin X$ gilt, folgt wegen der Ungleichung $|f(x)| < \frac{|x|}{2}$, dass f keinen Fixpunkt in X hat. □

Satz 4.11. *Jede ambiguale Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der BFPP ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere ambiguale Menge mit der BFPP. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $0 \in \overline{X} \backslash X$ ist (Translationen). Nach Lemma 4.10 ist 0 ein zweiseitiger Häufungspunkt von $(X^c)^\circ$, also existiert wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein $\epsilon > 0$, sodass X dicht in $[0, \epsilon]$ liegt.
Sei I nun ein beliebiges nichtleeres Teilintervall von $[0, \epsilon]$. Weil X ambigual ist enthält entweder X oder X^c eine relativ offene Teilmenge von I und da X dicht in I liegt muss klarerweise Ersteres gelten. Weil dies für jedes abgeschlossene Teilintervall von $[0, \epsilon]$ funktioniert liegt sogar X° dicht in $[0, \epsilon]$.
Sei nun $F = [0, \epsilon] \backslash X^\circ$, dann ist $F \neq \emptyset$ weil $0 \in F$ ist, also enthält entweder X oder X^c eine relativ offene Teilmenge von F, was aber im all von X offensichtlich nicht möglich ist. Also existiert ein offenes nichtleeres Intervall J, sodass $(F \cap J) \cap X = \emptyset$ und $F \cap J \neq \emptyset$.
Fixiere nun ein $f \in J \backslash X$, und wegen der Dichtheit von X° ein $x \in J \cap X^\circ$. Sei y der nächste Punkt von x zu $(X^c)^\circ$ zwischen x und f. Da $y \in F \cap J$ folgt $y \notin X$ und damit folgt mit Lemma 4.3, dass X nicht die BFPP besitzt. □

5 Literaturverzeichnis

[1] J. Jachymski (2002), *A Short Proof Of The Converse To The Contraction Principle And Some Related Results*,
Journal of the Juliusz Schauder Center

[2] M. Elekes (2011), *On A Converse To Banach's Fixed Point Theorem*,
Proceedings of the American Mathematical Society