Seminararbeit aus Analysis
TU-Wien 2014/2015

Die Invarianzsätze von Brouwer

David Kofler

19. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit beschäftigt sich mit den zwei Sätzen Invariance of domain und Invariance of dimension von Brouwer:

Satz 1.1 (Invariance of domain). *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $f(U)$ offen.*

Satz 1.2 (Invariance of dimension). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ nicht leer und offen mit $m \leq n$. Existiert eine stetige und injektive Funktion $f : U \to V$, dann folgt $n = m$. Insbesondere sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph für $n \neq m$.*

Auf dem ersten Blick scheint die Tatsache, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ nicht homöomorph sind, trivial zu sein. Tatsächlich gibt es stetige und surjektive, aber nicht injektive, Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die von Peano 1890 entdeckten "Peano Kurven". Also ist die Aussage nicht mehr so offensichtlich, dass es keine Homöomorphismen zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ geben kann. Erst 1911 konnte Brouwer beweisen, dass es wirklich keine Homöomorphismen gibt. Der historisch interessierte Leser sei auf Chapter II in [3] verwiesen.
Normalerweise werden diese Sätze mit der Maschinerie aus der algebraischen Topologie bewiesen. Wir werden einen analytischen Beweis angeben, der bis auf den Fixpunktsatz von Brouwer, ohne Resultate aus der algebraischen Topologie auskommt. Dazu kombinieren wir eine Arbeit von Wlasyslaw Kulpa [1] (1998) und von Terence Tao [2] (2011).

2 Grundlagen

Im Folgenden bezeichnen wir mit $U^n_\epsilon(x)$ bzw. $K^n_\epsilon(x)$ die offene bzw. abgeschlossene Kugel um x mit Radius $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}^n$. Mit K^n_1 bezeichnen wir die abgeschlossene Einheitskugel um 0 in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 2.1. $N \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-Nullmenge, d.h. $\lambda_n(N) = 0$, genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge von Quadern $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_k) < \epsilon.$$

Satz 2.2. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset B$ eine Lebesgue-Nullmenge und $f : B \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist $f(A)$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis. Sei $Q \subset B$ ein abgeschlossener Quader. Es genügt zu zeigen, dass $f(A \cap Q)$ eine Nullmenge ist, da sich B als Vereinigung von abzählbar vielen solcher abgeschlossenen Quadern schreiben lässt.
Der Quader Q ist kompakt. Also ist die Ableitung auf Q durch ein $C > 0$ beschränkt:

$$\|Df(x)\|_{op} := \sup_{v\in\mathbb{R}^n} \{|Df(x) \cdot v| : \|v\| \leq 1\} \ \leq \ C, \quad x \in Q.$$

Seien Q und C im Folgenden fest. Da Q konvex ist, ist mit $x, y \in Q$ auch die gesamte Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ in Q enthalten und somit auch in B. Mit

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x)\, dt$$

folgt

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty = \left\| \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x)\, dt \right\|_\infty \ \leq \ C \|(y - x)\|_\infty .$$

Jetzt verwenden wir, dass A eine Nullmenge ist. Sei also $\epsilon > 0$ und $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Würfeln mit Mittelpunkt a_k und Länge d_k, d.h. $W_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a_k\|_\infty < \frac{d_k}{2}\right\}$, sodass

$$A \cap Q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^n < \epsilon.$$

Für $x \in W_k$ gilt

$$\|f(x) - f(a_k)\|_\infty \;\leq\; C\,\|x - a_k\|_\infty \;<\; C\frac{d_k}{2}.$$

Also liegt $f(W_k)$ in einem Würfel $W_k^{'}$ mit Länge $d_k^{'} \leq Cd_k$ und Volumen $\lambda_n(W_k^{'}) \leq (Cd_k)^n$. Da die Menge $A \cap Q$ von der Folge $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ überdeckt wird, gilt $f(A\cap Q) \subset \bigcup_{k=1}^\infty W_k^{'}$ und somit folgt für das Maß

$$\lambda_n(f(A\cap Q)) \;\leq\; \sum_{k=1}^\infty \lambda_n(W_k^{'}) \;\leq\; C^n \sum_{k=1}^\infty d_k^n \;\leq\; C^n\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist $f(A\cap Q)$ eine Nullmenge. □

Wir brauchen folgende Aussagen, die ohne Beweis angegeben sind.

Satz 2.3 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein normaler Raum, d.h. zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ und $B \subset X$ existieren zwei offene Mengen $O_A \in \mathcal{T}$ und $O_B \in \mathcal{T}$ mit $A \subset O_A$, $B \subset O_B$ und $O_A \cap O_B = \emptyset$. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ und $F|_A = f$.*

Satz 2.4. *Metrische Räume sind normal.*

Satz 2.5 (Stone-Weierstrass). *Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra stetiger reeller Funktionen auf einem kompakten Raum X, die punktetrennend ist und die die konstante Funktion 1 enthält, dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C(X, \mathbb{R})$ bzgl. der Supremumsnorm.*

3 Die Invarianzsätze von Brouwer

Nun kommen wir zu den zwei Hauptsätzen dieser Seminararbeit. Wie bereits bemerkt, spielt der folgende Satz eine wichtige Rolle im Beweis der Invarianzsätze:

Satz 3.1 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Sei $f : K_1^n \to K_1^n$ eine stetige Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskugel $K_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in K_1^n$ mit $f(x) = x$.*

Für den Beweis sei auf Satz 7.2.4 in [5] verwiesen.

Sei $f : K_1^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, dann ist die Einschränkung $f : K_1^n \to f(K_1^n)$ eine stetige Bijektion zwischen zwei kompakten Hausdorff-Räume, also ein Homöomorphismus. Insbesondere ist $f^{-1} : f(K_1^n) \to K_1^n$ stetig. Mit dem Fortsetzungssatz von Tietze Satz 2.3 finden wir komponentenweise eine stetige Fortsetzung $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von f^{-1}. Die Abbildung G eingeschränkt auf $f(K_1^n)$ hat genau eine Nullstelle, nämlich bei $f(0)$. Mit dem Fixpunktsatz von Brouwer Satz 3.1 können wir nun zeigen, dass diese Nullstelle in einem gewissen Sinn stabil ist.

Lemma 3.2 (Stabilität). *Sei $f : K_1^n \to f(K_1^n)$ ein Homöomorphismus und $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Fortsetzung von $f^{-1} : f(K_1^n) \to K_1^n$. Weiters sei $H : f(K_1^n) \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, sodass*

$$\|G(y) - H(y)\|_2 \leq 1 \quad \textit{für alle} \quad y \in f(K_1^n).$$

Dann hat H mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $y \in f(K_1^n)$, sodass $H(y) = 0$.

Beweis. Betrachte die stetige Funktion

$$\psi(x) := x - H(f(x)) = G(f(x)) - H(f(x)), \quad x \in K_1^n.$$

Nach Voraussetzung gilt $\|G(y) - H(y)\|_2 \leq 1$ für $y \in f(K_1^n)$. Also ist $\psi(x)$ eine stetige Abbildung von K_1^n nach K_1^n. Nach Satz 3.1 hat $\psi(x)$ einen Fixpunkt x_0, womit

$$x_0 = \psi(x_0) = x_0 - H(f(x_0)).$$

Also gilt $H(y) = 0$ für $y = f(x_0)$. □

Lemma 3.3. *Sei $Y = Y_1 \cup Y_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y_1 kompakt und Y_2 eine Lebesgue-Nullmenge. Weiters sei $G : Y \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit $G(y) \neq 0$ für $y \in Y_1$. Dann existiert zu jedem $\delta > 0$ eine stetige Funktion $Q : Y \to \mathbb{R}^n$, sodass*

$$\|G(y) - Q(y)\|_\infty < \delta$$

und $Q(y) \neq 0$ für alle $y \in Y$ gilt.

Beweis. Wähle $\eta \in \mathbb{R}$ mit $0 < 2\eta < \delta$, sodass

$$G(Y_1) \cap U_{2\eta}(0) = \emptyset.$$

Das ist möglich, da $0 \notin G(Y_1)$, Y_1 kompakt und G stetig ist. Da Y kompakt ist, finden wir mit Satz 2.5 Polynome in n-Veränderlichen $P_1, \ldots, P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sodass

$$\|G(y) - P(y)\|_\infty < \ \eta/\sqrt{n} \ \text{ für alle } y \in Y,$$

wobei $P = (P_1, \ldots, P_n)^T : Y \to \mathbb{R}^n$ ist. Nach Satz 2.2 ist $P(Y_2)$ eine Nullmenge. Somit existiert ein $d \in U_\eta(0) \setminus P(Y_2)$. Für das verschobene Polynom

$$Q(y) := P(y) - d$$

gilt $Q(y) = 0$ genau dann, wenn $d \in P(Y_2)$, womit $0 \notin Q(Y_2)$.
Für ein $y \in Y_1$ gilt

$$\begin{aligned} \|G(y) - Q(y)\|_2 &= \|G(y) - P(y) + d\|_2 \ \leq \ \|G(y) - P(y)\|_2 + \|d\|_2 \\ &\leq \ \sqrt{n}\,\|G(y) - P(y)\|_\infty + \|d\|_2 \ < \ \eta + \eta = 2\eta \ < \ \delta. \end{aligned}$$

Wegen $G(Y_1) \cap U_{2\eta}(0) = \emptyset$ schließen wir auf $0 \notin Q(Y_1)$. □

Proposition 3.4. *Sei $f : K_1^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann liegt $f(0)$ im Inneren von $f(K_1^n)$.*

Den Beweis führen wir durch Widerspruch. Wir nehmen an, $f(0)$ sei nicht im Inneren von $f(K_1^n)$. Aus dieser Tatsache konstruieren wir uns eine nullstellenfreie Störung H der stetigen Fortsetzung G von f^{-1}, die klein genug ist, um die Voraussetzungen von Lemma 3.2 zu erfüllen.

Beweis. Angenommen $f(0)$ sei nicht im Inneren von $f(K_1^n)$. Sei $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die stetige Fortsetzung von f^{-1} wie in Lemma 3.2.
Wähle $\epsilon > 0$, sodass $|G(y)| \leq 0.1$ für $\|y - f(0)\|_2 \leq 2\epsilon$. Das ist möglich, da $f(0)$ eine Nullstelle von G ist.
Da $f(0)$ nicht in $f(K_1^n)^\circ$ ist, existiert ein $c \in f(K_1^n)^c$, sodass $\|f(0) - c\|_2 < \epsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|G(y)\|_2 \leq 0.1 \quad \text{für } \ \|y - c\|_2 \leq \epsilon. \tag{1}$$

Betrachte die Menge $Y := Y_1 \cup Y_2$, wobei

$$Y_1 := \{y \in f(K_1^n) : \|y - c\|_2 \geq \epsilon\} \quad \text{und} \quad Y_2 := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - c\|_2 = \epsilon\}\,.$$

Nach Konstruktion sind Y und Y_1 kompakt. Y enthält nicht den Punkt $f(0)$, da $\|f(0) - c\|_2 < \epsilon$ ist. Insbesondere enthält Y_1 keine Nullstellen von G. Weiters betrachten wir die Funktion $\Phi : f(K_1^n) \to Y$ definiert durch

$$\Phi(y) := \max(\frac{\epsilon}{\|y - c\|_2}, 1)\ (y - c) + c, \tag{2}$$

siehe Abbildung 1. Diese ist stetig und wohldefiniert, da der Punkt c nicht in $f(K_1^n)$ liegt. Der Punkt $\Phi(y)$ liegt in Y für alle $y \in f(K_1^n)$, da für $\|y - c\|_2 > \epsilon$

$$\Phi(y) = y \in f(K_1^n) \quad \text{und} \quad \|\Phi(y) - c\|_2 = \|y - c\|_2 \geq \epsilon$$

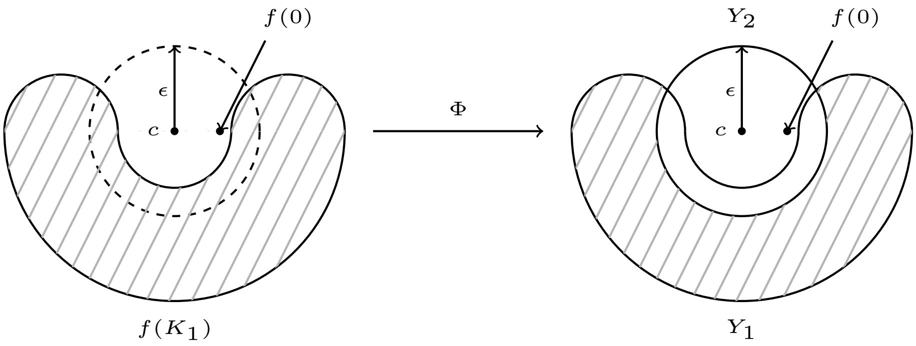

Abbildung 1: Die Abbildung Φ verschiebt alle Punkte innerhalb $U^n_\epsilon(c)$ nach außen.

gilt und für $\|y - c\|_2 \leq \epsilon$

$$\|\Phi(y) - c\|_2 = \epsilon.$$

Da Y kompakt ist, finden wir mit Lemma 3.3 eine stetige Funktion $Q : Y \to \mathbb{R}^n$ mit $0 \notin Q(Y)$ und

$$\|G(y) - Q(y)\|_2 < 0.7 \quad \text{für alle} \quad y \in Y. \tag{3}$$

Wir definieren nun $H : f(K^n_1) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$H(y) := Q(\Phi(y)).$$

Als Zusammensetzung von zwei stetigen Funktionen ist H stetig und besitzt *keine* Nullstellen in $f(K^n_1)$. Um den Abstand zu G abzuschätzen, unterscheiden wir für $y \in f(K^n_1)$ folgende zwei Fälle:

1. $\|y - c\|_2 > \epsilon$:
   Wegen $\Phi(y) = y$ und mit (3) erhalten wir

   $$\|G(y) - H(y)\|_2 < 0.7.$$

2. $\|y - c\|_2 \leq \epsilon$:
   Wegen $\|\Phi(y) - c\|_2 = \epsilon$ und (1) gilt

   $$\|G(\Phi(y))\|_2 \leq 0.1.$$

   Mit (3) und der Dreiecksungleichung folgt

   $$\begin{aligned} \|G(y) - H(y)\|_2 &= \|G(y) - G(\Phi(y)) + G(\Phi(y)) - Q(\Phi(y))\|_2 \\ &\leq \|G(y)\|_2 + \|G(\Phi(y))\|_2 + \|G(\Phi(y)) - Q(\Phi(y))\|_2 \leq 0.9. \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\|G(y) - H(y)\|_2 \leq 1 \quad \text{für} \quad y \in f(K^n_1). \tag{4}$$

Somit sind die Voraussetzung von Lemma 3.2 erfüllt. Also müsste H mindestens eine Nullstelle besitzen. Da wir aber H nullstellenfrei konstruiert haben, erhalten wir einen Widerspruch. $\square$

Satz 3.5 (Invariance of domain). *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $f(U)$ offen.*

Beweis. Sei $u \in U$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es eine offene Kugel $U_\epsilon^n(f(u))$ gibt, die ganz in $f(U)$ liegt. Da U offen ist, finden wir eine Kugel $K_r^n(u)$, die ganz in U liegt mit $0 < r \leq 1$, sodass f auf $K_r(u)$ stetig und injektiv ist. Aufgrund von Translationsinvarianz können wir die Funktion $\tilde{f}(x) := f(rx + u)$ betrachten, die ebenso stetig und injektiv ist und zwar auf K_1^n. Nach Satz 3.4 liegt $\tilde{f}(0) = f(u)$ im Inneren von $\tilde{f}(K_1^n(0)) = f(K_r^n(u))$. Somit existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $U_\epsilon^n(f(u)) \subset f(U)$. Da $u \in U$ beliebig war, ist $f(U)$ offen. $\square$

Korollar 3.6 (Invariance of dimension)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ nicht leer und offen mit $m \leq n$. Existiert eine stetige und injektive Funktion $f : U \to V$, dann folgt $n = m$. Insbesondere sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph für $n \neq m$.*

Beweis. Angenommen $m < n$ und es existierte eine stetige und injektive Abbildung f. Definiere $g : U \to \mathbb{R}^n$ als $g := \iota \circ f$, wobei $\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die stetige und injektive Einbettung $\iota((x_1, \ldots, x_m)) := (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ ist. Die Menge g(U) ist von der Form $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), 0, \ldots, 0)$ und hat somit leeres Inneres. Da die Funktion g aber stetig und injektiv ist, muss im Widerspruch dazu, $g(U)$ nach Satz 3.5 offen sein. $\square$

Also haben wir bewiesen, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ nicht homöomorph sein können, da es keine Homöomorphismen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gibt. Für $n = 1$ und $m > 1$ kann man das direkt zeigen. Denn angenommen es existiert ein Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, dann können wir den Punkt 0 und $f(0)$ rausnehmen, und wir haben immer noch einen Homöomorphismus $\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$. Da $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ zusammenhängend ist und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht, können sie nicht homöomorph sein.

Bemerkung 3.7. Eine Verallgemeinerung von Satz 3.5 auf Banachräume:

Satz: *Seien X, Y Banachräume und $U \subset X$ offen. Ist $f : U \to Y$ lokal injektiv und lässt sich als Summe von zwei Funktion $f = g + h$ schreiben. Wobei g Fredholm mit Index 0 und h stetig und lokal kompakt. Dann ist $f(U)$ offen.*

Für den Beweis sei auf Corollary 2.2 in [4] verwiesen.
Außerdem spielt Satz 3.5 im Beweis des 5. Hilbert Problems eine wichtige Rolle (siehe [2]):

Satz: *Jede lokal euklidische Gruppe ist isomorph zu einer Lie-Gruppe.*

Literatur

[1] Wladyslaw Kulpa: Poincaré and domain invariance theorem, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, http://dml.cz/dmlcz/702050, Vol. 39 , No. 1-2, 127–136, 1998.

[2] Terence Tao: Brouwer's fixed point and invariance of domain theorems, and Hilbert's fifth problem, http://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers-fixed-point-and-invariance-of-domain-theorems-and-hilberts-fifth-problem, UCLA, 2011.

[3] Jean Dieudonné: A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960, Birkhäuser, 1989.

[4] Alessandro Calamai: The Invariance of Domain Theorem for compact perturbations of nonlinear Fredholm maps of index zero, Nonlinear Functional Analysis and Applications 9, 185-194, 2004.

[5] Martin Blümlinger: Analysis 3, http://www.asc.tuwien.ac.at/~blue/Ana3.pdf, Skriptum, TU Wien, WS 2013.