Seminararbeit

Verallgemeinerungen zum Satz über die offene Abbildung

Stefan Koller

11.2.2016

Betreuung:
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

Technische Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die folgende Arbeit behandelt Bedingungen dafür, ob eine stetige Funktion $f : E \to F$ mit topologischen Räumen E und F offen ist. Die Bedingungen können sich dabei sowohl an die Funktion f, als auch an die Räume E und F richten.

1.1 Grundlegendes

Im Folgenden sei der Abschluss einer Menge X bezüglich einer Topologie stets mit $\overline{X}$ und das Innere mit X° bezeichnet. Die Topologie sollte - wenn nicht explizit angegeben - aus dem Zusammenhang ersichtlich sein.

Definition 1.1. *Seien $(E, \mathcal{T}_E)$, $(F, \mathcal{T}_F)$ topologische Räume. $f : E \to F$ heißt offen, wenn für jede offene Menge $O \subseteq E$ gilt: $f(O)$ ist offen.*

Zum Beweis der Offenheit einer Abbildung ist es oft sinnvoll den Beweis in zwei Teile zu gliedern: Zuerst wird gezeigt, dass die Abbildung fast offen ist und anschließend daraus gefolgert, dass die Abbildung offen ist. Dementsprechend werden im folgenden Abschnitt Bedingungen zur Fast-Offenheit einer stetigen Abbildung dargelegt und im anschließenden Abschnitt Bedingungen, unter welchen fast offene, stetige Abbildungen offen sind.

Definition 1.2. *Seien $(E, \mathcal{T}_E)$, $(F, \mathcal{T}_F)$ topologische Räume. $f : E \to F$ heißt fast offen an x, wenn für jede offene Umgebung $O \ni x$ gilt: $f(x) \in (\overline{f(O)})^\circ$*

Definition 1.3. *Seien $(E, \mathcal{T}_E)$, $(F, \mathcal{T}_F)$ topologische Räume. $f : E \to F$ heißt fast offen, wenn für alle $x \in E$ gilt: f ist fast offen an x.*

Bemerkung 1.4. Um die Fast-Offenheit an x zu zeigen reicht es offensichtlich obige Forderung an einer Umgebungsbasis von x zu überprüfen. Um die Fast-Offenheit bzw. Offenheit zu zeigen, reicht es die jeweiligen Forderungen an einer Basis zu überprüfen.

Bemerkung 1.5. Äquivalent zu obiger Definition kann die Offenheit auch definiert werden mittels: Für alle $x \in E$ und für alle offenen Umgebungen $O \ni x$ gilt: $f(x) \in f(O)$

2 Fast-Offenheit von Abbildungen

Im folgenden Abschnitt werden einige Bedingungen, unter denen stetige, homomorphe Surjektionen fast offen sind, gezeigt - zuerst für topologische Gruppen - dann für lokalkonvexe topologische Vektorräume.

2.1 Topologische Gruppen

Zuerst sei an die Definition von (semi-)topologischen Gruppen erinnert:

Definition 2.1. *Seien* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$, *sodass* $(E, \mathcal{T}_E)$ *einen topologischer Raum und* $(E, *, 1, ^{-1})$ *eine Gruppe bilden. Dann heißt* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$ *semitopologische Gruppe, wenn gelten:*

- $\forall a \in E : x \mapsto a * x$ *ist stetig.*
- $\forall a \in E : x \mapsto x * a$ *ist stetig.*

Definition 2.2. *Seien* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$, *sodass* $(E, \mathcal{T}_E)$ *einen topologischer Raum und* $(E, *, 1, ^{-1})$ *eine Gruppe bilden. Dann heißt* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$ *topologische Gruppe, wenn gelten:*

- $* : E \times E \to E$ *ist stetig.*
- *Die Gruppeninversion* $(^{-1}) : E \to E$ *ist stetig.*

Nun folgen einige grundlegende Eigenschaften von (semi-)topologischen Gruppen.

Lemma 2.3. *Sei* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$ *eine semitopologische Gruppe, dann gelten:*

- $\forall a \in E : x \mapsto a * x$ *ist Homöomrphismus.*
- $\forall a \in E : x \mapsto x * a$ *ist Homömorphismus.*
- $(U_i)_{i \in I}$ *ist Umgebungsbasis von* $x \iff (x^{-1} * U_i)_{i \in I}$ *ist Umgebungsbasis von* 1.
- $(U_i)_{i \in I}$ *ist Umgebungsbasis von* $x \iff (U_i * x^{-1})_{i \in I}$ *ist Umgebungsbasis von* 1.

Beweis. Die Umkehrabbildung zu $x \mapsto a * x$ ist $x \mapsto a^{-1} * x$ und somit stetig. Analog folgt die zweite Aussage. Die Multiplikation mit x von links/rechts ist ein Homöommorphismus und bildet somit Umgebungsbasen auf Umgebungsbasen ab. □

Lemma 2.4. *Sei* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$ *eine topologische Gruppe, dann gelten:*

- $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$ *ist semitopologische Gruppe*
- *Für alle offenen* $W \ni 1$ *existiert eine offene Menge* $V \subseteq W$, *sodass gelten:* $1 \in V$, V *ist symmetrisch, d.h.* $V = V^{-1}$, *und* $V * V \subseteq W$.

- $(E, \mathcal{T}_E)$ *ist* T_3*, d.h. für alle* $x \in E$ *und* $O \in \mathcal{T}_E$ *mit* $x \in O$ *existiert ein* $V \in \mathcal{T}_E$*, sodass* $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq O$*.*

Beweis. Seien $a \in E$ und $x \in E$ beliebig und sei $O \subseteq E$ beliebige offene Umgebung von $a * x$. Aufgrund der Stetigkeit von $*$ existiert ein $U \subseteq E \times E$, sodass gelten: U ist offen bezüglich der Produkttopologie, $(a, x) \in U$ und $*(U) \subseteq O$. Die Produkte je zweier offener Mengen bilden eine Basis der Produkttopologie und somit existieren V und W, sodass $(a, x) \in V \times W$ und $V \times W \subseteq U$. Somit ist $a * W \subseteq O$ und da x und O beliebig waren ist die Multiplikation von links stetig. Analog zeigt man die Stetigkeit der Multiplikation von rechts.

Sei W offene Umgebung von 1. Aus der Stetigkeit von $*$ folgt die Offenheit von $*^{-1}(W)$, also existieren offene Umgebungen $O \ni 1$ und $P \ni 1$, sodass $O \times P \subseteq *^{-1}(W)$. Somit ist $V = O \cap O^{-1} \cap P \cap P^{-1}$ symmetrisch, offen und erfüllt $V * V \subseteq W$.

Seien $x \in E$ und $O \in \mathcal{T}_E$ gegeben, dann wähle eine offene, symmetrische Umgebung $V \ni 1$, sodass $V * V \subseteq x^{-1} * O$. Damit gilt:

$$x \in x * V \subseteq x * V * V \subseteq x * x^{-1} * O = O$$

Nun folgt, da V symmetrische Umgebung von 1 ist, aus $(E \backslash O) \cap (x * V * V) = \emptyset$, dass $((E \backslash O) * V) \cap (x * V = \emptyset)$ und dass $((E \backslash O) * V)$ offen ist, also:

$$x \in x * V \subseteq \overline{x * V} \subseteq E \backslash ((E \backslash O) * V) \subseteq O$$

. □

Nun zu einigen Eigenschaften, welche wir im Hauptsatz dieses Abschnitts von topologischen Gruppen fordern werden:

Definition 2.5. *Ein topologischer Raum* $(E, \mathcal{T}_E)$ *hat die Baire-Eigenschaft, wenn gilt: Für jede Folge nirgends dichter Teilmengen* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *von* E*, d.h.* $(\overline{A_n})^\circ = \emptyset$*, gilt:*

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^\circ = \emptyset$$

Beispiel 2.6. Jeder vollständige metrische Raum hat die Baire-Eigenschaft. (Siehe [1], S. 59, Satz von Baire)

Definition 2.7. *Eine topologische Gruppe* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$ *heißt* $\aleph_0$*-beschränkt, wenn für jede offene, nichtleere Menge* O *eine abzählbare Menge* $M \subseteq E$ *existiert, sodass* $\bigcup_{x \in M} x * O = E$*.*

Beispiel 2.8. Jede separable topologische Gruppe ist $\aleph_0$-beschränkt. Als abzählbare Menge wählt man eine dichte, abzählbare Teilmenge des topologischen Raums.

Beispiel 2.9. Jede topologische Gruppe mit Lindelöf-Eigenschaft, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung, ist $\aleph_0$-beschränkt. $\bigcup_{x \in E} x * O$ ist offene Überdeckung von E, also existiert eine abzählbare Teilüberdeckung und somit eine abzählbare Teilmenge M, sodass $\bigcup_{x \in M} x * O = E$, womit die $\aleph_0$-Beschränktheit erfüllt ist.

Nun haben wir genügend Eigenschaften um den folgenden Satz formulieren und beweisen zu können:

Satz 2.10. *Seien $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$ und $(F, \mathcal{T}_F, *, 1, ^{-1})$ topologische Gruppen, E sei $\aleph_0$-beschränkt und F habe die Baire-Eigenschaft. Sei $f : E \to F$ ein stetiger und surjektiver Homomorphismus, dann gilt: f ist fast-offen.*

Beweis. Aufgrund der Homöomorphie der Multiplikation reicht es die Fast-Offenheit an der Stelle 1 zu zeigen. Sei also O eine beliebige offene Umgebung der 1. Sei nun V entsprechend Lemma 2.4 symmetrisch und offen, sodass $V * V \subseteq W$. Wähle nun eine abzählbare Menge $M \subseteq E$, sodass $\bigcup_{x \in M} x * V = E$ entsprechend der $\aleph_0$-Beschränktheit. Aus der Surjektivität und der Homomorphie von f folgt:

$$F = f(E) = f(\bigcup_{x \in M} x * V) = \bigcup_{x \in M} f(x) * f(V)$$

Da das Innere von F nichtleer ist, gilt entsprechend der Baire-Eigenschaft, dass es ein $x \in M$ gibt, sodass $(\overline{f(x) * f(V)}) \neq \emptyset$. Somit ist aber $(\overline{f(V)})^\circ \neq \emptyset$. Sei also $y \in (\overline{f(V)})^\circ$. Aufgrund der Homöomorphie der Gruppeninversion ist $((\overline{f(V)})^\circ)^{-1} = (\overline{f(V^{-1})})^\circ = (\overline{f(V)})^\circ$ und somit auch $y^{-1} \in (\overline{f(V)})^\circ$. Dann gilt:

$$1 \in (\overline{f(V)})^\circ * (\overline{f(V)})^\circ \subseteq (\overline{f(V)} * \overline{f(V)})^\circ \subseteq (\overline{f(V) * f(V)})^\circ = (\overline{f(V * V)})^\circ \subseteq (\overline{f(W)})^\circ$$

Dabei gilt die erste Inklusion, da $(\overline{f(V)})^\circ * (\overline{f(V)})^\circ$ als Vereinigung von offenen Mengen offen und eine Teilmenge von $((\overline{f(V)}) * (\overline{f(V)}))$ ist, und die zweite Inklusion aufgrund der Stetigkeit von $*$. Somit ist die Fast-Offenheit von f gezeigt. $\square$

2.2 Lokalkonvexe topologische Vektorräume

Der folgende Abschnitt präsentiert einen Satz, welcher die Fast-Offenheit von surjektiven Homomorphismen zwischen zwei lokalkonvexen topologischen Vektorräumen unter geeigneten Bedingungen beweist. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt sind die Bedingungen jedoch in gewisser Weise notwendig für die Fast-Offenheit solcher Abbildungen.

Für grundlegende Eigenschaften von lokalkonvexen topologischen Vektorräumen sei im Folgenden auf [1] verwiesen.

Definition 2.11. *Eine Teilmenge T eines toplogischen Vektorraums heißt genau dann Tonne, wenn gelten:*

- *T ist abgeschlossen.*
- *T ist kreisförmig.*
- *T ist konvex.*
- *T ist absorbierend.*

Definition 2.12. *Ein Lokalkonvexer topologischer Vektorraum heißt tonneliert, wenn jede Tonne eine Nullumgebung ist.*

Beispiel 2.13. Jeder lokalkonvexe topologische Vektorraum, welcher die Baire-Eigenschaft erfüllt ist tonneliert: Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und T eine Tonne. Da T absorbierend ist, gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\cdot T = E$. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $(\overline{n \cdot T})^\circ$ nichtleer ist. Somit ist auch $(\overline{T})^\circ = T^\circ$ nichtleer und aufgrund der Kreisförmigkeit $0 \in T^\circ$ und somit T eine Nullumgebung.

Nun zum Hauptsatz des Abschnitts:

Satz 2.14. *Sei F ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

- *Für jeden lokalkonvexen topologischen Vektorraum E und jeden stetigen, surjektiven Homomorphismus $f : E \to F$ gilt: f ist fast-offen.*
- *F ist tonneliert.*

Beweis. Um von der ersten auf die zweite Aussage zu schließen wähle für E den gleichen Vektorraum wie für F, aber ausgestattet mit der, im Folgenden konstruierten, feineren Topologie. Sei T beliebige Tonne, dann beschreibt die Funktion $\mu_T(x) := \inf(t > 0 : \frac{1}{t}x \in T)$, da T kreisförmig, absorbierend und konvex ist, eine Seminorm (siehe [1], S. 70f). Statte nun die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Seminorm mit der Normtopologie aus. Wähle für E nun die initiale Topologie bezüglich der Projektion in diesen normierten Raum und der Identität nach F. Die so entstandene Topologie ist offensichtlich lokalkonvex. Die Identität von E nach F ist stetig und offensichtlich auch surjektiv und homomorph. Sei nun die Identität gemäß ersterer Aussage fast-offen. Gemäß der Konstruktion ist $S_T = \{x \in E : \mu_T(x) < 1\} \subseteq T$ offen bezüglich der Topologie von E. Nun ist gemäß der Fast-Offenheit der Identität $0 \in (\overline{S_T})^\circ$, wobei der Abschluss und das Innere bezüglich F zu verstehen sind. Da T eine abgeschlossene Obermenge von S_T ist, gilt auch $0 \in T^\circ$. Da T beliebig war ist F tonneliert.

Für die umgekehrte Richtung seien E, F und f gegeben. Da die Translation ein Homöomorphismus ist und f homomorph ist, reicht es die Fast-Offenheit an 0 zu zeigen. In Lokalkonvexen Topologischen Vektorräumen existiert stets eine Nullumgebungsbasis bestehend aus konvexen, absorbierenden und kreisförmigen Mengen. Sei solch eine gewählt und sei U aus dieser Umgebungsbasis, dann ist, da f homomorph ist, auch $f(U)$ kreisförmig und konvex und, da f surjektiv ist, $f(U)$ absorbierend. Folglich ist $\overline{f(U)}$ kreisförmig, konvex und absorbierend und somit eine Tonne. Da F tonneliert ist, gilt $0 \in (\overline{f(U)})^\circ$, also ist f fast offen. □

3 Offenheit von fast offenen Abbildungen

Im Ersten der folgenden Abschnitte wird ein Satz präsentiert, der unter geeigneten Bedingungen die Offenheit einer stetigen, fast offenen Abbildung impliziert. Zuerst jedoch werden geeignete Begriffe eingeführt. Der zweite Abschnitt widmet sich der Anwendung dieses Satzes, insbesondere auf topologischen Gruppen.

3.1 Satz zur Offenheit von fast offenen Abbildungen

Um in den folgenden Sätzen die Offenheit einer Abbildung zu beweisen werden gewisse Vollständigkeits- und Trennbarkeitsbegriffe benötigt. Zuerst zum Begriff der Pseudobasis, welcher eine Verallgemeinerung des Basisbegriffs darstellt:

Definition 3.1. *Eine Familie von Mengen $(O_i)_{i\in I}$ heißt Pseudobasis eines topologischen Raumes $(E, \mathcal{T}_E)$, wenn gelten:*

- *Für alle $i \in I$ ist O_i offen.*
- *Für alle offenen Mengen $V \subseteq E$, existiert ein $i \in I$, sodass $O_i \subseteq V$.*

Im Vergleich zur Basis verzichtet man also darauf, dass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen der Basis dargestellt werden kann. Nun zu einigen Trennbarkeitseigenschaften:

Definition 3.2. *Eine Teilmenge O eines topologischen Raumes $(E, \mathcal{T}_E)$ heißt offen-regulär wenn gilt $O = (\overline{O})^\circ$.*

Definition 3.3. *Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T}_E)$ heißt semiregulär, wenn eine Basis bestehend aus offen-regulären Mengen existiert.*

Definition 3.4. *Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T}_E)$ heißt quasiregulär, wenn für alle nichtleeren, offenen Mengen O eine nichtleere, offene Menge U existiert, sodass $\overline{U} \subseteq O$.*

Offensichtlich ist jeder topologische T_3-Raum, also jeder Raum in dem sich Punkte und abgeschlossenen Mengen durch offene Mengen trennen lassen, sowohl semiregulär als auch quasiregulär.

Der nächste Begriff dient als Motivation für die in den folgenden Sätzen verwendeten Vollständigkeitseigenschaften.

Definition 3.5. *Ein quasiregulärer topologischer Raum heißt pseudo-vollständig, wenn eine Folge von Pseudobasen $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für jede Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit $U_n \in \mathcal{B}_n$ und $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$.*

Nun zu den in den Sätzen verwendeten Begriffen:

Definition 3.6. *Eine Menge T und eine (zweistellige) Relation $<$ auf T heißen Baum wenn gelten:*

- *$(T,<)$ bildet eine Halbordnung.*
- *Für alle $t \in T$ bildet die Menge der Vorgänger $\{s \in T : s < t\}$ eine Wohlordnung (bezüglich $<$).*

Gilt zusätzlich, dass für alle $t \in T$ die Menge der Vorgänger $\{s \in T : s < t\}$ endlich ist, so sagt man der Baum habe abzählbare Höhe.

Definition 3.7. *Ein Baum abzählbarer Höhe $(T,<)$, ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T}_E)$ und eine Abbildung $\phi : T \to \mathcal{T}_E$ heißen Web wenn gelten:*

- *Die Menge $\{\phi(t) : t \in T\}$ ist eine Pseudobasis von $(E, \mathcal{T}_E)$.*
- *Für alle $t \in T$ ist $\{\phi(s) : s > t\}$ eine Pseudobasis von $\phi(t)$ ausgestattet mit der Spurtopologie.*

Insbesondere gilt für $s > t$: $\phi(s) \subseteq \phi(t)$. Die Abbildung ist also monoton fallend bezüglich der Mengeninklusion.

Wir werden nun Vollständigkeitseigenschaften über die Existenz von Webs mit gewissen Eigenschaften definieren. Diese lauten wie folgt:

Definition 3.8. *Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T}_E)$ heißt p-vollständig, wenn darauf ein Web $(T,<,\phi)$ existiert, sodass für alle linear geordneten Teilmengen $b \subseteq T$ mit $\phi(t) \neq \emptyset$ für alle $t \in b$ gilt, dass $\bigcap_{t \in b} \phi(t) \neq \emptyset$.*

Definition 3.9. *Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T}_E)$ heißt c-vollständig, wenn darauf ein Web $(T,<,\phi)$ existiert, sodass für alle Filter $\mathcal{F}$ und für alle linear geordneten Teilmengen $b \subseteq T$ mit $\phi(t) \in \mathcal{F}$ für alle $t \in b$ gilt, dass $\mathcal{F}$ einen Häufungspunkt in $\bigcap_{t \in b} \phi(t)$ hat.*

Offensichtlich ist c-Vollständigkeit die stärkere der beiden Eigenschaften.

Satz 3.10. *Jeder pseudo-vollständige topologische Raum ist p-vollständig.*

Beweis. Sei eine Folge von Pseudobasen $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in der Definition von pseudovollständig gegeben. Wähle für den Baum des Webs alle Paare $(n, (U_j)_{j=1,..,n})$, sodass $n \in \mathbb{N}$, $U_j \in \mathcal{B}_j$ für $j \in \{1,..,n\}$ und $\overline{U_{j+1}} \subseteq U_j$ für $j \in \{1,..,n-1\}$. Sei nun $(n, (U_j)_{j=1,..,n}) < (m, (V_j)_{j=1,..,m})$, genau dann wenn $n < m$ und $U_j = V_j$ für $j \in \{1,..,n\}$. Sei $\phi((n, (U_j)_{j=1,..,n})) = U_n$, dann ist $\{\phi((1, U_1)) : U_1 \in \mathcal{B}_1\}$ bereits eine Pseudobasis.

Für jedes offene $O \subseteq U_m$ existiert nach Quasiregularität ein offenes V, sodass $\overline{V} \subseteq O$. Da $\mathcal{B}_{m+1}$ Pseudobasis ist existiert ein offenes $W \in \mathcal{B}_{m+1}$ mit $W \subseteq V$. Somit ist $\overline{W} \subseteq U$ und $(m+1, ((U_j)_{j=1,..,n}, W))$ ein Element des Baums, also ist $(T,<,\phi)$ ein Web. Sei nun eine beliebige linear geordnete Teilmenge $b \subseteq T$ gegeben, dann ist gemäß der Pseudo-Vollständigkeit $\bigcap_{t \in \mathcal{B}} \phi(t) \neq \emptyset$. $\square$

Beispiel 3.11. Mit der gleichen Konstruktion kann gezeigt werden, dass jeder kompakte topologische T_2-Raum und jeder vollständige metrische Raum c-vollständig sind. In beiden Fällen funktioniert die Konstruktion, da die Räume T_3 sind. Im Fall des kompakten T_2-Raums erhält man aus der Kompaktheit, dass der Filter einen Häufungspunkt hat, welcher gemäß Konstruktion im Schnitt liegt. Im Fall des vollständigen metrischen Raums konvergiert der Filter aufgrund der Vollständigkeit und der Konvergenzpunkt ist nach Konstruktion im Schnitt.

Satz 3.12. *Jeder p-vollständiger topologischer Raum hat die Baire-Eigenschaft.*

Beweis. Sei angenommen, dass die Baire-Eigenschaft nicht erfüllt ist. Durch Übergang zu den Komplementen erhält man eine Folge von offenen und dichten Mengen $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ nicht dicht ist. Also existiert eine offene Menge V, sodass $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \cap V = \emptyset$. Sei gemäß der p-Vollständigkeit ein Web $(T, <, \phi)$ gegeben, dann existiert aufgrund der Pseudobasiseigenschaft des Webs ein $t_0 \in T$ sodass $\phi(t_0) \subseteq V$. Da O_1 dicht ist, hat es nichtleeren Schnitt mit $\phi(t_0)$ und es existiert ein $t_1 > t_0$, sodass $\phi(t_1) \subseteq V \cap O_1$. Führt man dies induktiv fort erhält man eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n < t_{n+1}$ und $\phi(t_n) \subseteq V \cap \bigcap_{j=1}^{n} O_j$. Gemäß p-Vollständigkeit gilt nun im Gegensatz zum Vorrausgesetzten:

$$\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} \phi(t_n) \subseteq V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

□

Definition 3.13. *Sei $(E, \mathcal{T}_E)$ ein topologischer Raum, eine Menge $P \subseteq E$ heißt Menge innerer Verdichtung, falls ein Baum abzählbarer Höhe $(T, <)$ und eine Abbildung $\phi : T \to \mathcal{T}_E$ existieren, sodass gelten:*

- $P \subseteq \bigcup_{t\in T} \phi(t)$
- *Für alle $t \in T$ gilt $P \cap \phi(t) \subseteq \bigcup_{s>t} \phi(s)$.*
- *Wenn $b \in T$ linear geordnet ist, dann gilt $\bigcap_{t\in b} \phi(t) \subseteq P$.*

Offensichtlich ist der Schnitt einer Menge innerer Verdichtung mit einem topologischen Teilraum auch Menge innerer Verdichtung bezüglich diesem Teilraum (ausgestattet mit der Spurtopologie).

Beispiel 3.14. Jede G_δ-Menge, also jede Menge, die sich als Schnitt von höchstens abzählbar vielen offenen Mengen darstellen lässt, ist eine Menge innerer Verdichtung. Sei nämlich $G_\delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, dann wähle für T die natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung und $\phi(n) = \bigcap_{j=1}^{n} O_j$.

Beispiel 3.15. Sei $(E, \mathcal{T}_E)$ ein topologischer Raum, der p-vollständig bzw. c-vollständig ist und sei P Menge innerer Verdichtung in E. Dann ist P, ausgestattet mit der Spurtopologie, ebenfalls p-vollständig bzw. c-vollständig. Sei dazu $(T, <, \phi)$ das Web aus der p-Vollständigkeit bzw. c-Vollständigkeit und $(S, <, \psi)$ entsprechend der Definition der Menge innerer Verdichtung. Sei $R = \{(n, (s_j)_{j=1,..,n}, (t_j)_{j=1,..,n}) : n \in \mathbb{N} \wedge s_j \in S \wedge t_j \in T \wedge s_j < s_{j+1} \wedge t_j < t_{j+1} \wedge \phi(t_{j+1}) \subseteq \phi(t_j) \cap \bigcap_{k=1}^{j+1} \psi(s_k)\}$ mit $(n, (s_j)_{j=1,..,n}, (t_j)_{j=1,..,n}) < (m, (u_j)_{j=1,..,n}, (v_j)_{j=1,..,n})$, wenn $n < m$, $s_j = u_j$ für $j \in \{1, .., n\}$ und $t_j = v_j$ für $j \in \{1, .., n\}$. Definiere $\Phi((n, (s_j)_{j=1,..,n}, (t_j)_{j=1,..,n})) = \phi(t_n) \cap P$, dann bildet $(R, <, \Phi)$ ein Web, da $\{P \cap \phi(t) : t > t_n\}$ eine Pseudobasis von $P \cap \phi(t_n)$ und daher insbesondere eine von $P \cap \phi(t_n) \cap \psi(s_n + 1)$ bilden und die Nachfolger von $\psi(s_n)$ eine Überdeckung von $P \cap \psi(s_n)$ darstellen. Sei mit $\phi((n, (s_j)_{j=1,..,n}, (t_j)_{j=1,..,n}))$ ab jetzt $\phi(t_n)$ und sei mit $\psi((n, (s_j)_{j=1,..,n}, (t_j)_{j=1,..,n}))$ ab jetzt $\psi(s_n)$ gemeint.

Sei im ersten Fall eine linear geordnete Menge b mit $\Phi(r) \neq \emptyset$ für alle $r \in b$ gegeben, dann ist $\bigcap_{r\in b} \Phi(r) = P \cap \bigcap_{r\in b} \phi(r)$ und $\emptyset \neq \bigcap_{r\in b} \phi(r) \subseteq \bigcap_{r\in b} \psi(r) \subseteq P$, also $\bigcap_{r\in b} \Phi(r) \neq \emptyset$.

Im zweiten Fall sei nun ein Filter $\mathcal{F}$ und eine linear geordnete Teilmenge b mit $\Phi(r) \in \mathcal{F}$ für alle $r \in b$ gegeben. Offensichtlich ist auch $\phi(r) \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ hat Häufungspunkt in $\bigcap_{r\in b} \phi(r) \subseteq \bigcap_{r\in b} \psi(r) \subseteq P$, also liegt der Häufungspunkt in $\bigcap_{r\in b} \Phi(r)$.

Nun haben wir genügend Begriffe um den Hauptsatz dieses Kapitels formulieren und beweisen zu können. Sei im Folgenden der Graph von $f : E \to F$, also die Menge $\{(x, f(x)) : x \in E\}$, mit $\mathcal{G}(f)$ bezeichnet.

Satz 3.16. *Seien $(E, \mathcal{T}_E)$, $(F, \mathcal{T}_F)$, $(G, \mathcal{T}_G)$ topologische Räume, sei $(G, \mathcal{T}_G)$ semiregulär, seien $f : E \to F$, $g : E \to G$ und $h : G \to F$ stetig, sodass $f = h \circ g$, f surjektiv, f fast offen und h injektiv. Außerdem gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- *$(E, \mathcal{T}_E)$ ist c-vollständig und $(F, \mathcal{T}_F)$ ist T_2.*
- *$(E, \mathcal{T}_E)$ ist p-vollständig und der Graph von f ist Menge innerer Verdichtung in $E \times F$ (ausgestattet mit der Produkttopologie).*

Dann ist h offen.

Beweis. Es reicht die Offenheit auf einer Basis von G zu zeigen. Gemäß der Semiregularität sei $V \subseteq G$ eine offen-reguläre Menge. Wenn wir zeigen können, dass $(\overline{h(V)})^\circ = h(V)$ ist h offen. Mit der Stetigkeit von g und der Fast-Offenheit von f ergibt sich die erste Inklusion:

$$h(V) = f(g^{-1}(V)) \subseteq (\overline{f(g^{-1}(V))})^\circ = (\overline{h(V)})^\circ$$

Für die zweite Inklusion reicht zu zeigen, dass $h^{-1}((\overline{h(V)})^\circ) \subseteq V$. Aufgrund der Stetigkeit von h ist der erste Term offen und es genügt zu zeigen, dass $h^{-1}((\overline{h(V)})^\circ) \subseteq \overline{V}$. Sei dazu $b \in h^{-1}((\overline{h(V)})^\circ)$ und W eine beliebige offene Umgebung von b. Obige Inklusion ist bewiesen, wenn $V \cap W \neq \emptyset$. Seien dazu b_0, sodass $g(b_0) = b$, $V_0 = g^{-1}(V)$ und $W_0 = g^{-1}(W)$. Damit ist $f(b_0) \in (\overline{f(V_0)})^\circ$ und aufgrund der Fast-Offenheit von f auch $f(b_0) \in (\overline{f(W_0)})^\circ$.

Sei nun die erste Bedingung erfüllt und sei $(T, <, \phi)$ ein Web entsprechend der c-Vollständigkeit. Wir wollen nun Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E und Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T definieren, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- $t_{n+1} > t_n$
- $s_{n+1} > s_n$
- $a_n \in \phi(t_n) \subseteq V_0$
- $b_n \in \phi(s_n) \subseteq W_0$
- $f(a_n) \in (\overline{f(\phi(s_{n-1}))})^\circ$
- $f(b_n) \in (\overline{f(\phi(t_n))})^\circ$

Für den Induktionsanfang sei im Folgenden $\phi(t_0)$ durch V_0, $\phi(s_0)$ durch W_0, $\bigcup_{r>t_0}\phi(r)$ durch $\bigcup_{\{r\in T:\phi(r)\subseteq V_0\}}\phi(r)$ und $\bigcup_{r>s_0}\phi(r)$ durch $\bigcup_{\{r\in T:\phi(r)\subseteq W_0\}}\phi(r)$ ersetzt. Aufgrund des Induktionsanfangs oder gemäß Induktion und aufgrund der Fast-Offenheit von f ist dann:

$$f(b_n)\in(\overline{f(\phi(t_n))})^\circ\cap(\overline{f(\phi(s_n))})^\circ\subseteq\overline{f(\phi(t_n))}\cap(\overline{f(\phi(s_n))})^\circ=\overline{f(\bigcup_{r>t_n}\phi(r))}\cap(\overline{f(\phi(s_n))})^\circ$$

Wobei die Gleichheit gilt, da für eine beliebige offene Menge M, eine Pseudobasis $(P_i)_{i\in I}$ und eine stetige Funktion f gilt:

$$\overline{f(M)}\subseteq\overline{f(\overline{M})}=\overline{f(\overline{\bigcup_{i\in I}P_i})}\subseteq\overline{f(\bigcup_{i\in I}P_i)}\subseteq\overline{f(M)}$$

Nun ist nach obigem der Schnitt des Abschlusses einer Menge mit einer offenen Menge nichtleer. Also gilt auch $f(\bigcup_{r>t_n}\phi(r))\cap(\overline{f(\phi(s_n))})^\circ\neq\emptyset$. Wähle nun ein $t_{n+1}>t_n$ und ein a_{n+1}, sodass $a_{n+1}\in\phi(t_{n+1})$ und $f(a_{n+1})\in(\overline{f(\phi(s_n))})^\circ$. Analog erhält man:

$$f(a_{n+1})\in(\overline{f(\phi(s_n))})^\circ\cap(\overline{f(\phi(t_{n+1}))})^\circ\subseteq\overline{f(\bigcup_{r>s_n}\phi(r))}\cap(\overline{f(\phi(t_{n+1}))})^\circ$$

Dann gilt $f(\bigcup_{r>s_n}\phi(r))\cap(\overline{f(\phi(t_{n+1}))})^\circ\neq\emptyset$ und man wählt ein $s_{n+1}>s_n$ und ein b_{n+1}, sodass $b_{n+1}\in\phi(s_{n+1})$ und $f(b_{n+1})\in(\overline{f(\phi(t_{n+1}))})^\circ$.

Gemäß der c-Vollständigkeit hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x in $\bigcap_{n=1}^\infty\phi(s_n)\subseteq W_0$. Aufgrund der Stetigkeit ist $f(x)$ auch Häufungspunkt von $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Wir konstruieren ein gegen $f(x)$ konvergentes Teilnetz wie folgt: Sei für jede offene Umgebung G von $f(x)$ und für alle natürlichen Zahlen i die natürliche Zahl $n(G,i)$, sodass $f(b_{n(G,i)})\in G$ und $n(G,i)<n(G,j)$ für $i<j$. Nun gilt:

$$f(b_{n(G,i)})\in(\overline{f(\phi(t_{n(G,i)}))})^\circ\cap G\subseteq\overline{f(\phi(t_{n(G,i)}))}\cap G$$

Also ist auch $f(\phi(t_{n(G,i)}))\cap G\neq\emptyset$. Wähle $c(G,i)\in\phi(t_{n(G,i)})$, sodass $f(c(G,i))\in G$. Sei das Netz (G,i) mit der natürlichen Ordnung geordnet, d.h. $(G,i)\leq(K,j)$ wenn $K\subseteq G$ und $i\leq j$. $c(G,i)$ hat nun gemäß c-Vollständigkeit einen Häufungspunkt y in $\bigcap\{\phi(t_{n(G,i)}):G\ni f(x)\wedge G\in\mathcal{T}_E\wedge i\in\mathbb{N}\}\subseteq V_0$. Andererseits konvergiert $f(c(G,i))$ gegen $f(x)$. Da F T_2 ist müssen $f(x)$ und $f(y)$ übereinstimmen. Aus der Injektivität von h folgt $g(x)=h^{-1}(f(x))=h^{-1}(f(y))=g(y)$. Nun ist $g(x)\in V$ und $g(y)\in W$, also $V\cap W\neq\emptyset$ und wir haben die Offenheit gezeigt.

Sei jetzt für den zweiten Fall entsprechend der p-Vollständigkeit ein Web $(T,<,\phi)$ gegeben und seien, gemäß der Eigenschaft des Graphen Menge innerer Verdichtung zu sein, ein Baum $(S,<)$ und eine Funktion ψ gegeben. Es werden wieder Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}_E$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}_F$ definiert, die folgende Eigenschaften erfüllen sollen.

- $t_{n+1}>t_n$

- $s_{n+1} > s_n$
- $r_{n+1} > r_n$
- $q_{n+1} > q_n$
- $a_n \in A_n \subseteq \phi(t_n) \subseteq A_{n-1} \subseteq V_0$
- $b_n \in B_n \subseteq \phi(s_n) \subseteq B_{n-1} \subseteq W_0$
- $f(a_n) \in X_n \subseteq (\overline{f(B_{n-1})})^\circ \cap Y_{n-1} \cap X_{n-1}$
- $f(b_n) \in Y_n \subseteq (\overline{f(A_n)})^\circ \cap X_n \cap Y_{n-1}$
- $A_n \times X_n \subseteq \psi(r_n)$
- $B_n \times Y_n \subseteq \psi(q_n)$

Für den Induktionsanfang setze im Folgenden $A_0 = V_0$, $B_0 = W_0$, $X_0 = Y_0 = F$ und $\psi(r_0) = \psi(s_0) = E \times F$. Gemäß Induktion bzw. Induktionsanfang und weil f fast offen ist, gilt:

$$f(b_n) \in \overline{f(A_n)})^\circ \cap \overline{f(B_n)})^\circ \cap X_n \cap Y_n$$

Weil $\{\phi(t) : t > t_n\}$ eine Pseudobasis von $\phi(t_n) \supseteq A_n$ bildet, gilt:

$$f(\bigcup\{\phi(t) : t > t_n \wedge \phi(t) \subseteq A_n\}) \cap \overline{f(B_n)})^\circ \cap X_n \cap Y_n \neq \emptyset$$

Wähle a_{n+1} und $t_{n+1} > t_n$, sodass $a_{n+1} \in \phi(t_{n+1}) \subseteq A_n$ und $f(a_{n+1}) \in \overline{f(B_n)})^\circ \cap X_n \cap Y_n$. Da gelten, dass $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ im Graph von f liegt, $(a_{n+1}, f(a_{n+1})) \in A_n \times X_n \subseteq \psi(r_n)$ und $\{\psi(r) : r > r_n\}$ eine Überdeckung von $\mathcal{G}(f) \cap \psi(r_n)$ bildet, existiert ein $r_{n+1} > r_n$ mit $(a_{n+1}, f(a_{n+1})) \in \psi(r_{n+1})$. Per definitionem ist $\psi(r_{n+1})$ offen in der Produkttopologie, wähle daher offene Mengen A_{n+1} und X_{n+1}, sodass $(a_{n+1}, f(a_{n+1})) \in A_{n+1} \times X_{n+1} \subseteq \psi(r_{n+1})$ und $A_{n+1} \times X_{n+1} \subseteq \phi(t_{n+1}) \times ((\overline{f(B_n)})^\circ \cap X_n \cap Y_n)$. Auf gleiche Weise wähle b_{n+1}, s_{n+1}, q_{n+1}, B_{n+1} und Y_{n+1}.

Gemäß der p-Vollständigkeit von $(T, <, \phi)$ seien nun $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi(t_n) \subseteq V_0$ und $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi(s_n) \subseteq W_0$. Dann gilt aber $(x, f(y)) \in A_n \times X_n \subseteq \psi(r_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $(x, f(y)) \in \mathcal{G}(f)$. Somit ist $g(x) \in V$ und $g(y) \in W$. Aus der Injektivität von h und weil $h(g(x)) = f(x) = f(y) = h(g(y))$, folgt $g(x) = g(y) \in V \cap W$, womit die Offenheit von h gezeigt ist.

□

Korollar 3.17. *Seien $(E, \mathcal{T}_E)$, $(F, \mathcal{T}_F)$ topologische Räume, sei $(E, \mathcal{T}_E)$ semiregulär, sei $f : E \to F$, stetig, bijektiv und fast offen. Außerdem gelte eine der folgenden beiden Bedingungen:*

- *$(E, \mathcal{T}_E)$ ist c-vollständig und $(F, \mathcal{T}_F)$ ist T_2.*
- *$(E, \mathcal{T}_E)$ ist p-vollständig und der Graph von f ist Menge innerer Verdichtung in $E \times F$ (ausgestattet mit der Produkttopologie).*

Dann ist f offen.

Beweis. Setze im vorangegangen Satz $(G, \mathcal{T}_G) = (E, \mathcal{T}_E)$, $g = id$ und $h = f$. $\square$

Satz 3.18. *Seien $(E, \mathcal{T}_E)$, $(F, \mathcal{T}_F)$ topologische Räume, sei die Diagonale von F, d.h. $\Delta = \{(x, x) : x \in F\}$, Menge innerer Verdichtung in $F \times F$ und sei $f : E \to F$ stetig, dann ist der Graph von f Menge innerer Verdichtung in $E \times F$.*

Beweis. Sei $(T, <, \psi)$, wie in der Definition von Menge innerer Verdichtung zu Δ. Betrachte $(T, <, \phi)$ mit $\phi(t) = \{(x, y) \in E \times F : (f(x), y) \in \psi(t)\}$. Aufgrund der Stetigkeit von f bildet ϕ nur auf offene Mengen ab. Offensichtlich werden $\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in E \times F : (f(x), y) \in \Delta\}$ von $\{\phi(t) : t \in T\}$ und $G(f \cap \phi(t)) = \{(x, y) \in E \times F : (f(x), y) \in \psi(t)\}$ von $\{\phi(s) : s > t\}$ überdeckt. Wenn $b \in T$ linear geordnet ist, dann ist $\bigcap_{t \in b} \phi(t) = \bigcap_{t \in b} \{(x, y) \in E \times F : (f(x), y) \in \psi(t)\} \subseteq \{(x, y) \in E \times F : (f(x), y) \in \Delta\} = \mathcal{G}(f)$. $\square$

Damit wurde eine Bedingung an die Funktion auf eine an den Raum verlagert. Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen aber nicht.

3.2 Anwendungen in (semi-)topologischen Gruppen

Nun zu einigen Anwendungen der Sätze des vorherigen Abschnittes in topologischen und semitopologischen Gruppen: Zuerst werden wir in den Sätzen die Surjektivität auf Dichtheit des Bildes verallgemeinern.

Lemma 3.19. *Sei $(G, \mathcal{T}_G, *, 1, ^{-1})$ semitopologische Gruppe und $(H, \mathcal{T}_H, *, 1, ^{-1})$ eine dichte, semireguläre Untergruppe (ausgestattet mit der Spurtopologie). Gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- *$(H, \mathcal{T}_H)$ ist c-vollständig und $(G, \mathcal{T}_G)$ ist T_2.*
- *$(H, \mathcal{T}_H)$ ist p-vollständig und die Diagonale in G ist Menge innerer Verdichtung.*

Dann gilt: $H = G$

Beweis. Sei $E = H \times \{0, 1\}$ die Summe zweier Kopien von H, ausgestattet mit der Summentopologie, sei angenommen es gäbe ein $g \in G \backslash H$ und sei $F = H \cup (g * H)$, ausgestattet mit der Spurtopologie von G. Betrachte $f : E \to F$, sodass $f((a, 0)) = a$ und $f((a, 1)) = g * a$. Somit ist f bijektiv und, da Multiplikation mit g homöomorph ist, stetig. E ist als Summe semiregulär und c-vollständig bzw. p-vollständig. F erbt von G die Eigenschaft, T_2 zu sein bzw. dass die Diagonale Menge innerer Verdichtung ist, denn die Produkttopologie auf $f(E) \times f(E)$ entspricht der Spurtopologie der Produkttopologie von $F \times F$. Im zweiten Fall ist der Graph von f also Menge innerer Verdichtung. Seien $x \in H$ beliebig und $O \subseteq H$ beliebige offene Umgebung von x bezüglich der Spurtopologie, dann existiert ein offenes $U \subseteq G$, sodass $U \cap H = O$. H ist dicht in U, also ist $\overline{O} = \overline{U}$ und $f((x, 0)) = x \in U \subseteq \overline{O}^\circ = \overline{f(O \times \{0\})}^\circ$. Damit ist f fast offen an $((x, 0))$. Analog zeigt man, dass f fast offen an $((x, 1))$ ist. Somit ist f fast offen. Damit sind aber die Bedingungen von Korollar 3.17 erfüllt und f ist offen. Somit ist $g * H$ offen in F und es existiert ein offenes $V \supseteq g * H$ mit $V \cap H = \emptyset$, im Widerspruch zur Dichtheit von H. $\square$

Satz 3.20. *Seien* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$, $(F, \mathcal{T}_F, *, 1, ^{-1})$ *semitopologische Gruppen, E semiregulär, sei* $f : E \to F$ *ein stetiger, injektiver und fast offener Homomorphismus, sei* $f(E)$ *dicht in F und außerdem gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- $(E, \mathcal{T}_E)$ *ist c-vollständig und* $(F, \mathcal{T}_F)$ *ist* T_2.
- $(E, \mathcal{T}_E)$ *ist p-vollständig und die Diagonale in F ist Menge innerer Verdichtung.*

Dann ist f offen und surjektiv.

Beweis. $f : E \to f(E)$ ist surjektiv und $f(E)$ (ausgestattet mit der Spurtopologie) erbt von F die Eigenschaft, T_2 zu sein bzw. dass die Diagonale eine Menge innerer Verdichtung ist. Nach Korollar 3.17 ist $f : E \to f(E)$ offen und somit ein Homöomorphismus. Folglich ist auch $f(E)$ semireulär und c-vollständig bzw. p-vollständig. Aufgrund der Linearität von f ist $f(E)$ eine Gruppe und gemäß vorangegangenem Lemma ist $f(E) = F$. □

Satz 3.21. *Seien* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$, $(F, \mathcal{T}_F, *, 1, ^{-1})$ *topologische Gruppen, sei* $f : E \to F$ *ein stetiger und fast offener Homomorphismus, sei* $f(E)$ *dicht in F und außerdem gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- $(E, \mathcal{T}_E)$ *ist c-vollständig und* $(F, \mathcal{T}_F)$ *ist* T_2.
- $(E, \mathcal{T}_E)$ *ist p-vollständig und die Diagonale in F ist Menge innerer Verdichtung.*

Dann ist f offen und surjektiv.

Beweis. Sei $f = h \circ g$ die kanonische Zerlegung von f, sodass $g : E \to E/\ker(f)$ und $h : E/\ker(f) \to f(E)$, wobei $E/\ker(f)$ mit der Quotiententopologie ausgestattet ist. Wieder erbt $f(E)$ die Eigenschaft T_2 zu sein bzw. dass die Diagonale Menge innerer Verdichtung ist. h ist bijektiv und g ist surjektiv. Sei $O \subseteq E$ offen, dann ist $g^{-1}(g(O)) = \ker(f) * O$ offen und daher $g(O)$ offen. Da O beliebig war, ist g offen. $E/\ker(f)$ ist als topologische Gruppe T_3 und somit semiregulär. Nach Satz 3.15 ist h offen und folglich ein Homöomorphismus. Auch $E/\ker(f)$ ist c-vollständig bzw. p-vollständig. Dazu betrachte zum Web $(T, <, \phi)$ das Web $(T, <, g \circ \phi)$. Dieses erfüllt die Web-Eigenschaft aufgrund der Offenheit von g und da für eine Pseudobasis $(B_i)_{i \in I}$ auch $(g(B_i))_{i \in I}$ eine Pseudobasis ist, weil $E/\ker(f)$ mit der finalen Topologie bezüglich g ausgestattet ist. Erfüllt das Web $(T, <, \phi)$ nun die p-Vollständigkeit bzw. c-Vollständigkeit, so tut dies auch $(T, <, g \circ \phi)$. Wird nun Satz 3.20 auf $h : E/\ker(f) \to F$ angewendet, erhält man die Offenheit und Surjektivität von $h : E/\ker(f) \to F$ und zusammen mit der Offenheit und Surjektivität von g das gewünschte Resultat. □

Zum Schluss erhält man zusammen mit den Sätzen über die Fast-Offenheit folgende beide Resultate:

Korollar 3.22. *Seien* $(E, \mathcal{T}_E, *, 1, ^{-1})$, $(F, \mathcal{T}_F, *, 1, ^{-1})$ *topologische Gruppen, sei E* $\aleph_0$-*beschränkt, habe F die Baire-Eigenschaft, sei* $f : E \to F$ *ein stetiger und surjektiver Homomorphismus und außerdem gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- *$(E, \mathcal{T}_E)$ ist c-vollständig und $(F, \mathcal{T}_F)$ ist T_2.*
- *$(E, \mathcal{T}_E)$ ist p-vollständig und die Diagonale in F ist Menge innerer Verdichtung.*

Dann ist f offen.

Beweis. Folgt direkt aus den Sätzen 2.10 und 3.21. □

Korollar 3.23. *Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume, sei F tonneliert, sei $f : E \to F$ ein stetiger und surjektiver Homomorphismus und außerdem gelte eine der folgenden Bedingungen:*

- *E ist c-vollständig.*
- *E ist p-vollständig und die Diagonale in F ist Menge innerer Verdichtung.*

Dann ist f offen.

Beweis. Jeder topologische Vektorraum ist auch eine topologische Gruppe bezüglich der Addition. Vektorraumhomomorphismen sind klarerweise auch Homomorphismen bezüglich der Gruppenstruktur des Vektorraums. Außerdem ist jeder topologische Vektorraum T_2. Daher folgt der Satz direkt aus den Sätzen 2.14 und 3.21. □

Literatur

[1] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M.Blüminger: Funktionalanalysis. 10. Auflage, Skriptum, 2015.

[2] D. Noll: Open Mapping Theorems in Topological Spaces. Czechoslovak Math. J. 35 (110), 1985, Prag.

[3] D. Noll: A Topological Completness Concept with Applications to the Open Mapping Theorem and the Separation of Convex Sets. Topology and its Applications 35 (1990) 53-69, Nord-Holland.

[4] R. Engelking: General Topology. Warschau 1976.

[5] T. Husain: Introduction to Topological Groups. Philadelphia 1966.

[6] G. Köthe: Topological Vector Spaces II. New York 1979.

[7] J. C. Oxtoby: Cartesian products of Baire spaces. Fund. Math. Soc. 32 (1957) 157-166.

[8] B. J. Pettis: On continuity and openness of homomorphisms in topological groups. Ann. of Math. 52 (1950), 293-308.

[9] T. Banakh: Locally minimal topological groups and their embeddings into products of o-bounded groups. Comment. Math. Univ. Carolin. 41,4 (2000) 811-815.