Die Weil-Topologie auf messbaren Gruppen

Andreas Kreuml

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

In dieser Arbeit werden Gruppen $(G, \cdot)$ betrachtet, wobei G eine nichtleere Menge und $\cdot$ die Verknüpfung zugehöriger Gruppenelemente aus G darstellt; das neutrale Element wird mit e bezeichnet. Weiters schreiben wir in Folge $a \cdot b$ der Kürze halber als ab; G stehe stellvertretend für die Gruppe.
Ziel der Arbeit ist es, aus Gruppen G, die mit geeigneter Struktur versehen sind, eine Topologie $\mathcal{T}$ so einzuführen, dass $(G, \mathcal{T})$ zu einer topologischen Gruppe wird. Dabei betrachten wir folgende zwei Situationen:

(a) Ausgehend von einer lokalkompakten topologischen Gruppe $(G, \mathcal{T})$ lässt sich das Haarsche Maß μ und somit ein Maßraum $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ einführen. Wir wollen aus diesem Maßraum die Topologie $\mathcal{T}$ rekonstruieren.

(b) Mithilfe einer messbaren Gruppe $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ lässt sich in natürlicher Weise eine mit den Gruppenoperationen verträgliche Topologie einführen, die sogenannte *Weil-Topologie*.

Die Grundidee wird es sein, zu jedem Punkt eine Umgebungsbasis zu ermitteln, ähnlich den Epsilon-Kugeln in metrischen Räumen.
In beiden oben angeführten Fällen steht ein Maßraum $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ zur Verfügung. Wir definieren die Mengenfunktion ρ durch[1]

$$\rho : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}} : \rho(M, N) := \mu(M \,\Delta\, N). \tag{1}$$

Diese Mengenfunktion hat folgende leicht einzusehende Eigenschaften $(M, N, A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{S})$:

- $\rho(M, N) \geq 0$,
- $\rho(M, M) = 0$,

  Die Umkehrung "$\rho(M, N) = 0$ impliziert $M = N$" gilt i.A. nicht: Sei $(G, \mathfrak{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ der Maßraum der Borelmengen auf $\mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgue-Maß λ. Man wähle M als nichtleere Lebesgue-Nullmenge (beispielsweise die einpunktige Menge $M = \{r\} \in \mathfrak{B}, r \in \mathbb{R}$) und $N = \emptyset$.
- Symmetrie: $\rho(M, N) = \rho(N, M)$,
- Dreiecksungleichung: $\rho(A_1, A_3) \leq \rho(A_1, A_2) + \rho(A_2, A_3)$.

  (Zum Beweis dieser Aussage zerlege man die Menge $\cup_{j=1}^{3} A_j$ disjunkt durch Mengen der Form $\cap_{j=1}^{3} B_j$, wobei $B_j = A_j$ oder $B_j = A_j^c,\ j = 1, 2, 3$:

  $$\begin{aligned} A_1 \,\Delta\, A_3 = (A_1 \backslash A_3) \cup (A_3 \backslash A_1) &= [(A_1 \cap A_3^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3^c \cap A_2^c)] \cup [(A_3 \cap A_1^c \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c)] \subseteq \\ &\subseteq [(A_2 \cap A_3^c \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_3^c \cap A_1^c)] \cup [(A_3 \cap A_2^c \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c)] \cup \\ &\quad \cup [(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c)] \cup [(A_2 \cap A_1^c \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c)] = \\ &= (A_1 \,\Delta\, A_2) \cup (A_2 \,\Delta\, A_3). \end{aligned}$$

  Aus der Monotonie und der Subadditivität des Maßes folgt die gewünschte Eigenschaft für ρ.)

Mit diesen Eigenschaften ist die Mengenfunktion ρ eine *Halbmetrik*.
In den folgenden Abschnitten werden die Fälle (a) und (b) präzisiert und untersucht; es wird sich herausstellen, dass für geeignete Mengen M und $\epsilon > 0$ die Mengen der Bauart $\{x \in G : \rho(xM, M) < \epsilon\}$ eine Umgebungsbasis zu e bilden.

2 Rekonstruktion der Topologie aus dem Haarschen Maß

Definition 2.1 *(topologische Gruppe).*
Für eine Gruppe G und eine Topologie $\mathcal{T}$ auf G heißt $(G, \mathcal{T})$ eine *topologische Gruppe*, falls gilt:
(G1) Die Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy$ ist stetig, wobei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen ist.

[1] $M \,\Delta\, N$ bezeichne die symmetrische Differenz der beiden Mengen: $M \,\Delta\, N = (M \backslash N) \cup (N \backslash M)$

(G2) Die Inversenbildung $\iota : G \to G : x \mapsto x^{-1}$ ist stetig.

Für Teilmengen $A, B \subseteq G$ und $x \in G$ setzt man:

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\},$$
$$xB := \{xb : b \in B\}.$$

Weiters wird das Bild einer Menge $M \subseteq G \times G$ unter der Gruppenoperation mit

$$\bullet(M) := \{ab : (a,b) \in M\} \quad (\subseteq G)$$

bezeichnet.

Definition 2.2 *(Links-, Rechtstranslation).*
Sei G eine Gruppe und $a \in G$ fest. Die Abbildungen $L(a) : G \to G : L(a)x := ax$ und $R(a) : G \to G : R(a)x := xa$ werden *Linkstranslation* bzw. *Rechtstranslation* genannt.

Es ist eine bekannte Tatsache, dass Links- und Rechtstranslationen sowie die Inversenbildung Homöomorphismen auf G sind:

Lemma 2.3. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe und $a \in G$:*
(i) Die Linkstranslation $L(a)$ und die Rechtstranslation $R(a)$ sind Homöomorphismen auf G.
(ii) Die Inversenbildung $\iota : G \to G : \iota(x) := x^{-1}$ ist ein Homöomorphismus auf G.

Beweis.
(i) Die Einbettungsabbildungen $x \mapsto (a,x)$ und $x \mapsto (x,a)$ von G nach $G \times G$ sind stetig, die Translationen ergeben sich hieraus nach Anwenden der Gruppenoperation, die nach (G1) stetig ist. Für die zugehörigen Umkehrabbildungen gilt $L(a)^{-1} = L(a^{-1})$ und $R(a)^{-1} = R(a^{-1})$; somit sind diese auch stetig, was die Translationen als Homöomorphismen erweist.
(ii) Die Inversenbildung ist involutorisch, d.h. $\iota^{-1} = \iota$, und hat daher nach (G2) eine stetige Umkehrabbildung. ■

Direkt aus der Definition lassen sich in einer topologischen Gruppe leicht einige Eigenschaften des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(e)$ des neutralen Elements gewinnen:

Lemma 2.4. *Der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(e)$ in einer topologischen Gruppe $(G, \mathcal{T})$ hat folgende Eigenschaften:*
(U1) Für $x \in G$, $U \in \mathcal{U}(e)$ ist $xUx^{-1} \in \mathcal{U}(e)$
(U2) Für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(e)$ ist $U^{-1} \in \mathcal{U}(e)$.
(U3) Für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(e)$ existiert eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(e)$, sodass $VV \subseteq U$.

Beweis.
Die Eigenschaften (U1) und (U2) folgen direkt aus Lemma 2.3.
Eigenschaft (U3) folgt mit $ee = e$ aus der Stetigkeit der Verknüpfung:
Es existiert eine Umgebung $W \in \mathcal{U}(e,e)$ in der Produkttopologie, sodass $\bullet(W) \subseteq U$. Nun bilden die Mengen $U_1 \times U_2$ mit $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(e)$ eine Umgebungsbasis vom Umgebungsfilter $\mathcal{U}(e,e)$ des Produktraums, also existieren $W_1, W_2 \in \mathcal{U}(e)$ mit $W_1 \times W_2 \subseteq W$. Mit $V := W_1 \cap W_2 \in \mathcal{U}(e)$ ist $VV = \bullet(V) \subseteq \bullet(W) \subseteq U$. ■

Lemma 2.5. *Sei $K \subseteq U \subseteq G$ mit K kompakt und U offen; dann existiert eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(e)$ mit $VK \subseteq U$.*

Beweis.
Da jedes Element $x \in K$ als Ergebnis einer Rechtstranslation von e um x ($R(x)e = ex = x$) geschrieben werden kann, existiert aufgrund der Stetigkeit von $R(x)$ zu jedem dieser Elemente eine Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(e)$ mit $U_x x \subseteq U$. Lemma 2.4 (U3) garantiert die Existenz einer Menge $V_x \in \mathcal{U}(e)$, sodass $V_x V_x \subseteq U_x$. Nun ist $(V_x x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge K; es gibt somit endlich viele $x_i, i =$

$1,\dots,n$, sodass $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} x_i$. Definiere nun $V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$; als endlicher Durchschnitt handelt es sich wieder um eine Umgebung von e und $VK \subseteq \bigcup_{i=1}^n VV_{x_i}x_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}x_i \subseteq U$. ■

Nun kommen wir zur Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes in lokalkompakten Hausdorffschen topologischen Gruppen.

Definition 2.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum.
(i) Die vom System $\mathcal{T}$ der offenen Teilmengen auf X erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{T})$ heißt σ-Algebra der *Borelmengen* auf X.
(ii) Ein Maß $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, +\infty]$ heißt *Borelmaß*, falls $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$.
(iii) Ein Maß $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, +\infty]$ heißt *von innen regulär*, falls für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$ gilt:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ kompakt}\}.$$

(iv) Ein Maß $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, +\infty]$ heißt *von außen regulär*, falls für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$ gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq A \text{ offen}\}.$$

(v) Ein von innen reguläres Borelmaß wird als *Radonmaß* bezeichnet.
(vi) Ist zusätzlich $(X, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, so heißt ein Maß μ auf den Borelmengen $\mathfrak{B}(X)$ von X *linksinvariant*, falls für alle $x \in X$ und $M \in \mathfrak{B}(X)$ gilt:

$$\mu(xM) = \mu(M).$$

Bemerkung 2.7. *Ist $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, +\infty]$ ein Radonmaß, so lassen sich Kompakta insofern von außen approximieren, dass*

$$\mu(K) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq K \textit{ offen}\}$$

für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$; man sagt, K ist von außen regulär*, siehe z.B. [E].*

Im weiteren Verlauf des Kapitels bezeichne von nun an $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf G.
Ein Beweis des folgenden Satzes findet man z.B. in [E], Kapitel VIII, §3.

Satz 2.8. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Hausdorffsche topologische Gruppe. Dann existiert ein linksinvariantes Radonmaß μ auf $\mathfrak{B}$, $\mu \neq 0$, das sogenannte* linke Haar-Maß*. Dieses ist bis auf eine multiplikative positive Konstante eindeutig bestimmt.*
Für nichtleere offene Mengen $U \in \mathfrak{B}$ gilt außerdem: $\mu(U) > 0$; ist U zusätzlich relativ kompakt, so gilt $0 < \mu(U) < +\infty$.

Analog zu Kapitel 1 definieren wir

$$\rho : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}} : \rho(M, N) := \mu(M \,\Delta\, N),$$

wobei nun μ das linke Haarsche Maß ist. Zur Konstruktion einer Umgebungsbasis des neutralen Elements e zeigen wir zunächst die Stetigkeit der Abbildung f mit $f(x) := \rho(xM, M)$:

Lemma 2.9. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Hausdorffsche topologische Gruppe mit linkem Haar-Maß μ. Die Funktion*

$$f : G \to \overline{\mathbb{R}} : f(x) = \rho(xM, M)$$

ist für alle $M \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(M) < +\infty$ stetig.

Beweis. Für ein $\varepsilon > 0$ lässt sich aufgrund der Regularität von innen eine kompakte Menge $K \subseteq M$ finden, sodass $\mu(M) - \frac{\varepsilon}{4} \leq \mu(K)$. Nach Umformen ergibt sich dann $\mu(M) - \mu(K) = \mu(M \backslash K) = \rho(M, K) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Schließlich ist die kompakte Menge K von außen regulär und es folgt analog die Existenz einer offenen Menge $U \supset K$ mit $\rho(U, K) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Laut Lemma 2.4 und Lemma 2.5 gibt es eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(e)$, sodass $V = V^{-1}$ und $VK \subseteq U$. Für zwei Gruppenelemente $x, y \in G$ mit $y^{-1}x \in V$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
\rho(xK, yK) = \mu(xK \setminus yK) + \mu(yK \setminus xK) = \\
&= \mu(y^{-1}xK \setminus K) + \mu(x^{-1}yK \setminus K) \overset{y^{-1}x \in V \Leftrightarrow x^{-1}y \in V}{\leq} \\
&\leq 2\mu(VK \setminus K) \leq 2\mu(U \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung der Halbmetrik ρ folgt:

$$
|\mu(xM \,\Delta\, M) - \mu(yM \,\Delta\, M)| \leq \mu((xM \,\Delta\, M) \,\Delta\, (yM \,\Delta\, M)) = \mu(xM \,\Delta\, yM).
$$

Zusammengefasst gilt nun

$$
|f(x) - f(y)| = |\rho(xM, M) - \rho(yM, M)| \leq \rho(xM, yM) \leq \rho(xM, xK) + \rho(xK, yK) + \rho(yK, yM) \leq \varepsilon,
$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Dreiecksungleichung für ρ angewendet haben. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in yV (\in \mathcal{U}(y))$ gilt, ist somit die Stetigkeit von f gezeigt. ■

Lemma 2.10. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Hausdorffsche topologische Gruppe, μ das zugehörige linke Haarmaß und $U \in \mathcal{U}(e)$ eine Umgebung um das neutrale Element. Dann existiert eine Menge $M \in \mathfrak{B}$ mit $0 < \mu(M) < +\infty$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $B := \{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\} \subseteq U$.*

Beweis.
Laut Lemma 2.4 lässt sich eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(e)$ finden mit $VV^{-1} \subseteq U$; da G lokalkompakt ist, enthält V eine nichtleere kompakte Umgebung $K \in \mathfrak{B}$ und demnach eine nichtleere offene und relativ kompakte Menge $M \in \mathfrak{B}$ mit $M \subseteq K \subseteq V$. Daher ist $0 < \mu(M) < +\infty$ nach Satz 2.8.
Nun wählen wir ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\varepsilon < 2\mu(M)$. Falls die Mengen xM und M für ein $x \in G$ disjunkt sind, lässt sich $\rho(xM, M)$ zu

$$
\rho(xM, M) = \mu(xM \,\Delta\, M) = \mu(xM) + \mu(M) = 2\mu(M)
$$

bestimmen (die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Translationsinvarianz von μ), sodass gilt:

$$
B = \{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\} \subseteq \{x \in G : xM \cap M \neq \emptyset\} \overset{*}{=} MM^{-1} \subseteq VV^{-1} \subseteq U.
$$

Beziehung * gilt, da:

$$
\begin{aligned}
\subseteq : \qquad & xM \cap M \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, y \in M : xy \in M \\
& \Rightarrow x \in My^{-1} \Rightarrow x \in MM^{-1}; \\
\supseteq : \qquad & x \in MM^{-1} \Rightarrow \exists\, y \in M, z \in M^{-1} : x = yz \\
& \Rightarrow xz^{-1} = y \Rightarrow y \in M \wedge y \in xM.
\end{aligned}
$$

■

Folgerung 2.11. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Hausdorffsche topologische Gruppe und μ das zugehörige Haarmaß. Dann bilden die Mengen der Form $\{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\}$ mit einem $\varepsilon > 0$ und einem $M \in \mathfrak{B}$ mit $0 < \mu(M) < +\infty$ eine Umgebungsbasis zum neutralen Element e.*

Beweis.
Lemma 2.9 impliziert wegen der Stetigkeit der dort definierten Funktion f, dass die Mengen $\{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\}$ als Urbilder offener Mengen offen und somit Umgebungen sind, Lemma 2.10 garantiert die Basiseigenschaft dieser Mengen. ■

3 Weil-Topologie

3.1 Messbare Gruppen

In Analogie zu topologischen Gruppen, in denen die Stetigkeit der Gruppenoperationen gefordert wird, können messbare Gruppen definiert werden:

Definition 3.1 *(messbare Gruppe).* Sei G eine Gruppe und $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum mit nicht verschwindendem Maß $\mu \neq 0$. $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ heißt *messbare Gruppe*, falls:
(MG1) $\mathfrak{S}$ und μ sind linksinvariant, d.h aus $M \in \mathfrak{S}$ und $x \in G$ folgt $xM \in \mathfrak{S}$ und $\mu(xM) = \mu(M)$.
(MG2) Die Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy$ sowie die Inversenbildung $\iota : G \to G : x \mapsto x^{-1}$ sind messbare Abbildungen.

Ein Beispiel einer messbaren Gruppe bildet der aus der topologischen Gruppe $(G, \mathcal{T})$ gebildete Maßraum $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ mit der Borel-Sigma-Algebra $\mathfrak{B}$ und dem linken Haarschen Maß μ (vgl. Kapitel 2), falls dieses σ-endlich ist; die Messbarkeit der Gruppenoperationen folgt hierbei sofort aus der Stetigkeit.

Für die folgenden Ausführungen erweist es sich als sinnvoll, spezielle Transformationen einzuführen:

$$
\begin{aligned}
&R : G \times G \to G \times G : (x, y) \mapsto (y, x) && \text{bijektiv, mit Inverser } R^{-1} = R \\
&S : G \times G \to G \times G : (x, y) \mapsto (x, xy) && \text{bijektiv, mit Inverser } S^{-1}(a, b) = (a, a^{-1}b) \\
&T := R^{-1}SR : T(x, y) = (yx, y) && \text{bijektiv, mit Inverser } T^{-1}(a, b) = (b^{-1}a, b) \\
&Q := S^{-1}RS : Q(x, y) = (xy, y^{-1}) && \text{bijektiv, mit Inverser } Q^{-1} = S^{-1}R^{-1}S = Q
\end{aligned}
$$

Für eine Menge $M \subseteq G \times G$ definieren wir den *Schnitt in* x als $M_x := \{y \in G : (x, y) \in M\}$ und den *Schnitt in* y als $M^y := \{x \in G : (x, y) \in M\}$.

Den folgenden Ergebnissen bis zum Ende des Kapitels wird eine messbare Gruppe $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ zugrunde gelegt.

Lemma 3.2. *(Eigenschaften der Transformationen)*
(i) Alle Transformationen R, S, T, Q sowie deren Inversen sind, aufgefasst als Abbildungen von $(G \times G, \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S})$ in sich selbst, messbar.
(ii) Für $M \subseteq G \times G$ und $x, y \in G$ gilt:

$$S(M)_x = xM_x, \; T(M)^y = yM^y.$$

(iii) Mit den messbaren Gruppen $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ und $(G, \mathfrak{S}, \nu)$ werden die Abbildungen S und T zu maßtreuen Transformationen auf $(G \times G, \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}, \mu \otimes \nu)$. Weiters ist Q maßtreu auf $(G \times G, \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}, \mu \otimes \mu)$.
(iv) Für $A, B \subseteq G$ und $x, y \in G$ gilt:

$$
\begin{aligned}
Q(A \times B)_{x^{-1}} &= xA \cap B^{-1}, \\
Q(A \times B)^{y^{-1}} &= \begin{cases} Ay, & y \in B \\ \emptyset, & y \notin B \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Beweis.
(i) Klar, da die einzelnen Komponentenfunktionen der Abbildungen R und S nach (MG2) messbar sind und T und Q sich aus R und S zusammensetzen.
(ii) Wir betrachten die Indikatorfunktion zur Menge $S(M)$: $\mathbb{1}_{S(M)}(x, y) = \mathbb{1}_M(x, x^{-1}y)$. Somit folgt:

$$(x, y) \in S(M) \Leftrightarrow (x, x^{-1}y) \in M \Leftrightarrow x^{-1}y \in M_x \Leftrightarrow y \in xM_x.$$

Für T geht der Beweis analog.
(iii) Mit der Darstellung des Produktmaßes $\mu \otimes \nu$ nach dem Satz von Fubini und der Linksinvarianz von

ν folgt für $M \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$:

$$(\mu \otimes \nu)(S(M)) = \int \nu(S(M)_x)\ d\mu(x) \overset{\text{(i)}}{=} \int \nu(xM_x)\ d\mu(x) =$$
$$= \int \nu(M_x)\ d\mu(x) = (\mu \otimes \nu)(M).$$

Für T geht der Beweis analog.
Durch die Reflexion R werden die Koordinaten der Punkte vertauscht:
$R(M) = \{(y, x) \in G \times G : (x, y) \in M\}$. Für den Schnitt in der zweiten Koordinate gilt somit $R(M)^x = \{y \in G : (x, y) \in M\} = M_x$. Zusammenfassend ergibt sich

$$(\mu \otimes \mu)(Q(M)) = (\mu \otimes \mu)(S^{-1}RS(M)) \overset{S\text{maßtreu}}{=} (\mu \otimes \mu)(RS(M)) = \int \mu(RS(M)^y)\ d\mu(y) =$$
$$= \int \mu(S(M)_y)\ d\mu(y) = (\mu \otimes \mu)(M).$$

(iv) Aus $\mathbb{1}_{A\times B}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(y)$ und $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x)$ folgt:

$$\mathbb{1}_{Q(A\times B)}(x^{-1}, y) = \mathbb{1}_{A\times B}(x^{-1}y, y^{-1}) = \mathbb{1}_A(x^{-1}y) \cdot \mathbb{1}_B(y^{-1}) =$$
$$= \mathbb{1}_{xA}(y) \cdot \mathbb{1}_{B^{-1}}(y) = \mathbb{1}_{xA\cap B^{-1}}(y),$$

also $Q(A \times B)_{x^{-1}} = xA \cap B^{-1}$. Ebenso ist

$$\mathbb{1}_{Q(A\times B)}(x, y^{-1}) = \mathbb{1}_{A\times B}(xy^{-1}, y) = \mathbb{1}_A(xy^{-1}) \cdot \mathbb{1}_B(y) =$$
$$\mathbb{1}_{Ay}(x) \cdot \mathbb{1}_B(y),$$

d.h. $(x, y^{-1}) \in Q(A \times B) \Leftrightarrow x \in Ay \land y \in B$. ■

Lemma 3.3.
(i) Sei $M \in \mathfrak{S}$. Dann sind auch $Ma \in \mathfrak{S}$ für alle $a \in G$ und $M^{-1} \in \mathfrak{S}$.
(ii) Ist das Maß einer Menge $M \in \mathfrak{S}$ positiv, d.h. $\mu(M) > 0$, so ist auch $\mu(Ma) > 0$ für alle $a \in G$ und $\mu(M^{-1}) > 0$.
(iii) Für eine messbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ und ein $M \in \mathfrak{S}$ mit positivem Maß $\mu(M) > 0$ ist die durch

$$g : G \to \mathbb{R} : g(x) := \tfrac{f(x^{-1})}{\mu(Mx)}$$

definierte Funktion g messbar.

Beweis.
(i) Man kann leicht einsehen, dass aufgrund der Eigenschaft (MG2) von messbaren Gruppen die Rechtstranslation $R(a)x = xa$ sowie deren Inverse messbare Abbildungen sind. Daraus folgt $Ma \in \mathfrak{S}$. Die Inversenbildung ι ist messbar und eine Involution, somit $M^{-1} = \iota(M) = \iota^{-1}(M) \in \mathfrak{S}$.
(ii) Falls $\mu(M) > 0$, gilt aufgrund der Darstellung des Produktmaßes und der Maßtreue von Q

$$0 < \mu(M)^2 = (\mu \otimes \mu)(M \times M) = (\mu \otimes \mu)(Q(M \times M)) = \int \mu(Q(M \times M)_x)\ d\mu(x) =$$
$$= \int \mu(x^{-1}M \cap M^{-1})\ d\mu(x).$$

Da das Integral positiv ist, muss der Integrand an mindestens einer Stelle $x_0 \in G$ positiv sein; wir haben eine Menge $N := x_0^{-1}M \cap M^{-1} \in \mathfrak{S}$ gefunden, sodass $N \subseteq M^{-1}$ und daher $0 < \mu(N) \le \mu(M^{-1})$. Hiermit ist der zweite Teil der Behauptung bewiesen.
Für ein beliebiges $a \in G$ gilt wiederum, dass $a^{-1}N \subseteq a^{-1}M^{-1}$ und wegen der Linkstranslations-Invarianz des Maßes $\mu(a^{-1}N) = \mu(N) > 0$. Wendet man die gleiche Argumentation wie zuvor auf die Menge $a^{-1}N$ an, folgt die Existenz einer Menge $O \in \mathfrak{S}$ mit $O \subseteq (a^{-1}N)^{-1} \subseteq (a^{-1}M^{-1})^{-1} = Ma$ und $0 < \mu(O)$. Insgesamt folgt mit $0 < \mu(O) \le \mu(Ma)$ die erste Behauptung.
(iii) Die Funktion $\hat{f} := f \circ \iota,\ \hat{f}(x) = f(x^{-1})$ ist als Zusammensetzung von messbaren Funktionen messbar. Definiere die Funktionen

$$\begin{aligned} m : G \to \overline{\mathbb{R}} : &\quad m(y) := \mu(Q(M \times G)^y), \\ \hat{m} := m \circ \iota, &\quad \hat{m}(y) = m(y^{-1}) = \mu(My) \cdot \mathbb{1}_G(y) = \mu(My). \end{aligned}$$

Wie aus der Maßtheorie bekannt, sind m als Maß eines Schnittes und somit auch $\hat{m}$, $\frac{1}{\hat{m}} = \frac{1}{\mu(My)}$ und g als Zusammensetzung messbar. ■

Lemma 3.4. *Für zwei messbare Mengen $M, N \in \mathfrak{S}$ seien Funktionen $m_1, \hat{m}_1, m_2 : G \to \overline{\mathbb{R}}$ durch*

$$\begin{aligned} m_1(x) &:= \mu(x^{-1}M \cap N), \\ \hat{m}_1(x) &:= (m_1 \circ \iota)(x) = m_1(x^{-1}), \\ m_2(x) &:= \mu(xM \,\Delta\, N) \end{aligned}$$

definiert.

(i) m_1 sowie $\hat{m}_1$ sind messbar und $\int m_1 \; d\mu = \mu(M)\mu(N^{-1})$.

(ii) Ist zusätzlich $\mu(M) < +\infty$ und $\varepsilon > 0$, sodass $\varepsilon < \mu(M) + \mu(N)$, so ist die Menge $\{x \in G : m_2(x) < \varepsilon\}$ messbar.

Beweis.
(i) Laut Lemma 3.2 ist $m_1(x) = \mu(Q(M \times N^{-1})_x)$ und m_1 ist damit als Maß eines Schnittes messbar. Das Integral wird mit den Formeln für Produktmaße unter Beachtung der Maßtreue von Q umgeformt:

$$\begin{aligned} \int m_1(x) \; d\mu(x) = \int \mu(Q(M \times N^{-1})_x) \; d\mu(x) = (\mu \otimes \mu)(Q(M \times N^{-1})) = \\ = (\mu \otimes \mu)(M \times N^{-1}) = \mu(M)\mu(N^{-1}). \end{aligned}$$

(ii) Durch die Endlichkeit von $\mu(xM \cap N)$ ergibt sich folgende Darstellung für m_2:

$$\begin{aligned} m_2(x) = \mu(xM \,\Delta\, N) = \mu(xM \backslash (xM \cap N)) + \mu(N \backslash (xM \cap N)) = \\ = \mu(xM) + \mu(N) - 2\mu(xM \cap N). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird nun kleiner als ε, falls

$$\mu(xM \cap N) = \hat{m}_1(x) > \frac{1}{2}(\mu(M) + \mu(N) - \varepsilon)$$

Die Menge $\{x \in G : m_2(x) < \varepsilon\} = \{x \in G : \hat{m}_1(x) > \frac{1}{2}(\mu(M) + \mu(N) - \varepsilon)\}$ ist als Urbild einer Menge aus der Borel-σ-Algebra unter einer messbaren Funktion messbar. ■

Folgendes Resultat spielt bei der Konstruktion der Weil-Topologie eine wichtige Rolle:

Lemma 3.5. *Seien $M, N \in \mathfrak{S}$ Mengen mit positivem Maß. Dann existieren Elemente $x_1, y_1, x_2, y_2 \in G$ und Mengen $C_1, C_2 \in \mathfrak{S}$ mit positivem Maß derart, dass*

$$\begin{aligned} x_1C_1 \subseteq M, \;\; y_1C_1 \subseteq N; \\ C_2x_2 \subseteq M, \;\; C_2y_2 \subseteq N. \end{aligned}$$

Beweis.
Aus $\mu(N) > 0$ folgt mit Lemma 3.3 $\mu(N^{-1}) > 0$ und hiermit mit dem vorangegangenen Lemma

$$\mu(M)\mu(N^{-1}) = \int \mu(x^{-1}M \cap N) \; d\mu(x) > 0.$$

Der Integrand muss an wenigstens einer Stelle $x_1 \in G$ größer als Null sein. Unter der Festsetzung $C_1 := x_1^{-1}M \cap N \in \mathfrak{S}$ und $y_1 := e$ als neutrales Element ist C_1 nicht leer und die Bedingungen $x_1C_1 \subseteq M$ und $y_1C_1 \subseteq N$ sind erfüllt. Dieselbe Argumentation angewandt auf die Mengen $M^{-1}, N^{-1} \in \mathfrak{S}$ liefert Stellen $\hat{x}_1, \hat{y}_1 \in G$ und eine nichtleere Menge $\hat{C}_1 \in \mathfrak{S}$, sodass $\hat{x}_1\hat{C}_1 \subseteq M^{-1}, \; \hat{y}_1\hat{C}_1 \subseteq N^{-1}$ gilt. Durch Invertieren auf beiden Seiten werden die Operanden der Gruppenverknüpfung vertauscht und $C_2 := \hat{C}_1^{-1}, x_2 := \hat{x}_1^{-1}$ und $y_2 := \hat{y}_1^{-1}$ liefern das Gewünschte. ■

3.2 Konstruktion der Weil-Topologie

Zu Beginn des Kapitels wird ein Satz vorgestellt, der bestimmte Mengensysteme als Erzeuger von topologischen Gruppen klassifiziert. Auf diesem Satz beruht die Konstruktion der Weil-Topologie.

Satz 3.6. *Sei G eine Gruppe und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(G)$ ein System aus Teilmengen von G, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) Der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathcal{U}$ besteht lediglich aus dem neutralen Element: $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \{e\}$.

(b) Für $U, V \in \mathcal{U}$ existiert eine Menge $W \in \mathcal{U}$, sodass $W \subseteq U \cap V$.

(c) Für $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ mit $VV^{-1} \subseteq U$.

(d) Für jedes Element $x \in G$ und jede Menge $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ mit $x^{-1}Vx \subseteq U$.

(e) Für jede Menge $U \in \mathcal{U}$ und jedes $a \in U$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ mit $Va \subseteq U$.

Dann lässt sich auf G genau eine Topologie $\mathcal{T}$ einführen, sodass $(G, \mathcal{T})$ zu einer topologischen Gruppe wird und $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis des neutralen Elements e darstellt.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(G)$ mit
(B1) Aus $U, V \in \mathcal{B}$, $x \in U \cap V$ folgt die Existenz eines $W \in \mathcal{B}$ mit $x \in W \subseteq U \cap V$.
(B2) $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{B}} U = G$
eine Basis der erzeugten Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ bildet (siehe z.B. [Ka]). Um alle Elemente der Gruppe zu erreichen, definiere

$$\tilde{\mathcal{U}} := \{Ux : U \in \mathcal{U}, x \in G\}$$

Per definitionem erfüllt $\tilde{\mathcal{U}}$ die Eigenschaft (B2), da das neutrale Element e in jedem $U \in \mathcal{U}$ liegt.
Ist nun $y \in Ux$ für ein $U \in \mathcal{U}$ und ein $x \in G$, so ist dies äquivalent zu $yx^{-1} \in U$ und aus Bedingung (e) folgt die Existenz eines $V \in \mathcal{U}$ mit $Vyx^{-1} \subseteq U$.
Betrachte nun $U_1x_1, U_2x_2 \in \tilde{\mathcal{U}}$ mit $y \in U_1x_1 \cap U_2x_2$. Laut obiger Überlegung gibt es Mengen $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$ mit $V_1y \subseteq U_1x_1$ und $V_2y \subseteq U_2x_2$ und wegen Bedingung (b) ein $W \in \mathcal{U}$ mit $W \subseteq V_1 \cap V_2$. Insgesamt ist also $y \in Wy \subseteq U_1x_1 \cap U_2x_2$ und für das System $\tilde{\mathcal{U}}$ gilt demnach auch (B1).
Für die erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$ ist $\tilde{\mathcal{U}}$ also eine Basis. Für eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(e)$ gibt es hiermit ein $Vx \in \tilde{\mathcal{U}}$ mit $e \in Vx \subseteq U$. Wendet man die Bedingung (d) für $x^{-1} \in V$ an, so erhält man ein $W \in \mathcal{U}$ mit $Wx^{-1} \subseteq V$. Wegen $W \subseteq Vx \subseteq U$ und da $W \in \mathcal{U}$ automatisch das neutrale Element enthält, ist $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von $\mathcal{U}(e)$.
Die Konstruktion der Topologie muss noch auf die Stetigkeitsforderungen einer topologischen Gruppe geprüft werden:
Seien $x, y \in G$ beliebig und $Vxy^{-1} \in \tilde{\mathcal{U}}$ aus der Umgebungsbasis von xy^{-1}. Nach (c) gibt es ein $U_x \in \mathcal{U}$ mit $U_xU_x^{-1} \subseteq V$; nach (d) wiederum existiert ein $U_y \in \mathcal{U}$ mit $xy^{-1}U_yyx^{-1} \subseteq U_x$, oder anders ausgedrückt: $xy^{-1}U_y^{-1} \subseteq U_x^{-1}xy^{-1}$. Zusammengefasst ist nun

$$U_xx(U_yy)^{-1} = U_xxy^{-1}U_y^{-1} \subseteq U_xU_x^{-1}xy^{-1} \subseteq Vxy^{-1}$$

und somit sind die Gruppenoperation sowie Inversenbildung stetig. ∎

Im weiteren Verlauf des Kapitels seien $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ eine messbare Gruppe und ρ die erweitert reellwertige Mengenfunktion von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ nach $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\rho(M, N) := \mu(M \,\Delta\, N).$$

Weiters definiere man die Mengensysteme

$$\mathcal{M} := \{MM^{-1} : M \in \mathfrak{S}, 0 < \mu(M) < +\infty\},$$

und $\mathcal{U}$ sei das System aller Mengen der Bauart $\{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\}$ mit einem $M \in \mathfrak{S}$, sodass $0 < \mu(M) < +\infty$ und $0 < \varepsilon < 2\mu(M)$. Dies sind in der Tat günstige Bedingungen an die Mengen M, da hiermit nach einem vorangegangenem Resultat (Lemma 3.4) alle Mengen aus $\mathcal{U}$ messbar sind.
Wir werden zeigen, dass $\mathcal{U}$ alle Bedingungen aus Satz 3.6 erfüllt.

Lemma 3.7. *Sei $U = \{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ und $A \in \mathfrak{S}$ mit $0 < \mu(A)$. Dann enthält A eine Teilmenge $B \in \mathfrak{S}$ mit positivem und endlichem Maß, sodass $BB^{-1} \subseteq U$. Insbesondere enthält jede Menge aus $\mathcal{U}$ eine Menge aus $\mathcal{M}$.*

Beweis.
Aufgrund der σ-Endlichkeit des Maßraumes genügt es, die Aussage für Mengen $A \in \mathfrak{S}$ mit endlichem Maß zu zeigen.
Die Transformation $T(x, y) := (yx, y)$ auf $G \times G$ aus Kapitel 3.1 liefert die messbare Menge $T(M \times A)$ mit endlichem Maß. Nun lässt sich der Approximationssatz auf diese Menge anwenden (vergleiche [Ku], Satz 4.23): Es existiert eine Menge $R \subseteq G \times G$, welche als endliche Vereinigung von Rechtecken darstellbar ist, und

$$\frac{\varepsilon}{4}\mu(A) > \rho(T(M \times A), R).$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist nach Fubini als Doppelintegral darstellbar:

$$\begin{aligned}\rho(T(M \times A), R) &= \int\int |\mathbb{1}_{T(M\times A)}(x, y) - \mathbb{1}_R(x, y)| d\mu(x) d\mu(y) \geq \\ &\geq \int_A \underbrace{\int |\mathbb{1}_M(y^{-1}x) - \mathbb{1}_R(x, y)| d\mu(x)}_{=\mu(yM \,\Delta\, R^y) = \rho(yM, A^y)} d\mu(y).\end{aligned}$$

Nun setze man $C := \{y \in G : \int |\mathbb{1}_M(y^{-1}x) - \mathbb{1}_R(x, y)| d\mu(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ und verkleinere den Integrationsbereich des äußeren Integrals durch Schnitt mit C, was auf die Abschätzung $\frac{\varepsilon}{4}\mu(A) > \frac{\varepsilon}{2}\mu(A \cap C)$ und in weiterer Folge auf $\mu(A \backslash C) > \frac{1}{2}\mu(A) > 0$ führt.
Ist $y \in A \backslash C$, so muss nach Wahl der Menge C gelten:

$$\rho(yM, R^y) = \int |\mathbb{1}_M(y^{-1}x) - \mathbb{1}_R(x, y)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da R aus dem von den messbaren Rechtecken erzeugten Ring stammt, lässt sich der Schnitt R^y als disjunkte Vereinigung endlich vieler $R_i \in \mathfrak{S}, i = 1, \ldots, n$ darstellen. Nach obigen Überlegungen und mit dieser Darstellung lassen sich die bisherigen Resultate zusammenfassen durch

$$A \backslash C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left\{y \in G : \rho(yM, R_i) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Weil bereits $\frac{\varepsilon}{2} < \mu(M)$ gilt, erweisen sich alle Mengen der Vereinigung auf der rechten Seite nach Lemma 3.4 als messbar. Wegen $\mu(A \backslash C) > 0$ gibt es einen Index $i \in \{1, \ldots, n\}$, sodass die messbare Menge

$$\tilde{B} := (A \backslash C) \cap \left\{y \in G : \rho(yM, R_i) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

positives und als Teilmenge von A endliches Maß hat. Nun wollen wir die U definierende Eigenschaft nachweisen und wählen $y_1, y_2 \in \tilde{B}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\rho(y_1 y_2^{-1} M, M) &= \rho(y_2^{-1}M, y_1^{-1}M) \leq \\ &\leq \rho(y_2^{-1}M, R_i) + \rho(y_1^{-1}M, R_i) < \varepsilon;\end{aligned}$$

hiermit ist $\tilde{B}^{-1}\tilde{B} \subseteq U$. Mit $\mu(A) > 0$ ist auch $\mu(A^{-1}) > 0$ (Lemma 3.3 (ii)!) und wendet man die Konstruktion auf A^{-1} an, so ist eine Menge B mit der gewünschten Eigenschaft gefunden. ∎

Es gilt auch eine in gewisser Hinsicht ähnliche Umkehrung:

Lemma 3.8. *Sei $A = MM^{-1} \in \mathcal{M}$ und $0 < \varepsilon < 2\mu(M)$. Dann ist die Menge $U \subseteq G$, die durch*

$$U := \{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\}$$

definiert ist, im Mengensystem $\mathcal{U}$ enthalten und es gilt $U \subseteq A$.

Beweis.
Offensichtlich gilt $U \in \mathcal{U}$. Wegen $\varepsilon < 2\mu(M)$ gilt für jedes $x \in U$, dass xM mit M nichtleeren Schitt hat und damit $U \subseteq \{x \in G : xM \cap M \neq \emptyset\} = MM^{-1}$. ■

Lemma 3.9. *Für $A, B \in \mathcal{M}$ existiert eine Menge $P \in \mathfrak{S}$ mit $0 < \mu(P) < +\infty$, sodass $PP^{-1} \subseteq A \cap B$.*

Beweis.
Schreibe $A = MM^{-1}$ und $B = NN^{-1}$ mit $M, N \in \mathfrak{S}$ und $0 < \mu(M), \mu(N) < +\infty$. Durch Anwendung von Lemma 3.5 auf M und N erhält man Elemente $x, y \in G$ und eine Menge $P \in \mathfrak{S}$ mit positivem Maß, sodass

$$Px \subseteq M, \;\; Py \subseteq N.$$

Schlussendlich gilt für die Menge A folgende Inklusionskette (für B genauso, ersetze x durch y):

$$PP^{-1} = (Px)(Px)^{-1} \subseteq MM^{-1} \subseteq A,$$

und hiermit $PP^{-1} \subseteq A \cap B$. ■

Die vorangegangenen Lemmata sind wichtige Hilfsmittel für den Beweis des folgenden Satzes zur Weil-Topologie. Um Bedingung (a), d.h. $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{e\}$, sicherzustellen, benötigt man den Begriff der separierten messbaren Gruppe:

Definition 3.10 *(separiert).* Eine messbare Gruppe $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ heißt *separiert*, falls es zu jedem Element $x \in G, x \neq e$ eine Menge $M \in \mathfrak{S}$ mit $0 < \mu(M) < +\infty$ gibt, sodass $\rho(xM, M) > 0$.

Satz 3.11. *Sei $(G, \mathfrak{S}, \mu)$ eine separierte messbare Gruppe. Das System $\mathcal{U}$ erfüllt die Bedigungen (a)-(e) aus Satz 3.6 und somit wird $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\mathcal{U})$ mit G zu einer topologischen Gruppe, welche $\mathcal{U}$ als Umgebungsbasis von e besitzt. Diese Topologie $\mathcal{T}$ heißt* Weil-Topologie.

Beweis.
Wir überprüfen alle Bedingungen aus Satz 3.6:

(a) Klarerweise ist in allen Mengen aus $\mathcal{U}$ das neutrale Element e enthalten, da $\rho(eM, M) = 0$. Falls nun $x \in G$ mit $x \neq e$, so existiert eine Menge $M \in \mathfrak{S}, 0 < \mu(M) < +\infty$, sodass $\rho(xM, M) > 0$, da die messbare Gruppe separiert ist. Für ein ε mit $0 < \varepsilon < \rho(xM, M)$ gilt automatisch auch $\varepsilon < 2\mu(M)$ und $U := \{y \in G : \rho(yM, M) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, jedoch $x \notin U$.

(b) Seien $U, V \in \mathcal{U}$, so existieren Mengen $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. In dieser Situation gibt es wiederum eine Menge $C \in \mathcal{M}$, sodass $C \subseteq A \cap B$; mit $C = MM^{-1}$ für ein $M \in \mathfrak{S}$ mit positivem, endlichem Maß und $0 < \varepsilon < 2\mu(M)$ ist die Menge $W := \{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ in C enthalten, somit $W \subseteq U \cap V$.

(c) Sei $U = \{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ und setze $V := \{x \in G : \rho(xM, M) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Offensichtlich ist V ein Element von $\mathcal{U}$ und es gilt ferner für $x, y \in V$:

$$\rho(xy^{-1}M, M) \leq \underbrace{\rho(y^{-1}M, M)}_{=\rho(yM,M)} + \underbrace{\rho(x^{-1}M, M)}_{=\rho(xM,M)} < \varepsilon$$

Daher ist $VV^{-1} \subseteq U$.

(d) Sei $U \in \mathcal{U}$ und $x \in G$, so existiert ein $M \in \mathfrak{S}$, sodass $MM^{-1} \in \mathcal{M}$ und weiters $MM^{-1} \subseteq U$. Andererseits ist mit $0 < \varepsilon < 2\mu(M)$ die Menge $V := \{y \in G : \rho(yxM, xM) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ derart, dass

$$V \subseteq (xM)(xM)^{-1} = xMM^{-1}x^{-1} \subseteq xUx^{-1}$$

Durch abschließende Umformung ist auch (d) erfüllt.

(e) Sei $U = \{x \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ und $a \in U$, d.h. $\rho(aM, M) < \varepsilon$. Es muss $\varepsilon < 2\mu(M)$ gelten; zieht man auf beiden Seiten der Abschätzung $\rho(aM, M) \geq 0$ ab, so ergibt sich

$$0 < \varepsilon - \rho(aM, M) < 2 \underbrace{\mu(M)}_{=\mu(aM)} - \rho(aM, M) \leq 2\mu(aM).$$

Die Menge $V := \{x \in G : \rho(xaM, aM) < \varepsilon - \rho(aM, M)\}$ ist daher Element von $\mathcal{U}$ und erfüllt die Bedingung: Ist nämlich $x \in V$, so liefert die Dreiecksungleichung für ρ

$$\begin{aligned}\rho(xaM, M) &\leq \rho(xaM, aM) + \rho(aM, M) < \\ &< (\varepsilon - \rho(aM, M)) + \rho(aM, M) = \varepsilon\end{aligned}$$

und die Menge $\{x \in G : \rho(xaM, M) < \varepsilon\}$ entspricht via Äquivalenzumformung der Menge $\{xa^{-1} \in G : \rho(xM, M) < \varepsilon\} = Ua^{-1}$. Somit gilt für $x \in V$, dass $x \in Ua^{-1}$, und hiermit die Inklusion $Va \subseteq U$. ■

Literatur

[E] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011

[H] Halmos, Paul R.: *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974

[Ka] Kaltenbäck, Michael: *Analysis 2 für Technische Mathematik*, Vorlesungsskriptum, Wien, 2012 (`http://asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_II.pdf`)

[Ku] Kusolitsch, Norbert: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine Einführung*, Springer-Verlag, Wien, 2011

[P] Pontryagin, Lew S.: *Selected Works, Volume 2: Topological Groups*, Gordon and Breach Science Publishers, Montreux, 1986