Symmetrische Ableitungen von Massen

Hyuksung Kwon

5. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Definition 1.1 (Borelmaß und äußeres Maß)**.** *Sei $\mathcal{B}^d$ die Menge aller Borelmengen im $\mathbb{R}^d$, und bezeichne $\mathbb{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ die Menge aller auf $\mathbb{R}^d$ definierten positiven Maße. Ein $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ heißt Borelmaß, wenn jede kompakte Teilmenge k von $\mathbb{R}^d$ endliches Maß $\mu(k)$ hat.*
Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ heißt ein äußeres Maß, wenn

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, *(Monotonie)*
3) $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$. *(sub-$\sigma$-Additivität von μ^*)*

Bemerkung 1.2. Jedes Borelmaß μ erzeugt ein äußeres Maß μ^*.

Definition 1.3 (Regulärität)**.** *Sei $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$.*
1) *μ heißt von innen regulär $\Longleftrightarrow \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A\ ,\ K$ kompakt$\}$*
2) *μ heißt von außen regulär $\Longleftrightarrow \mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \subseteq A\ ,\ G$ offen$\}$*
3) *μ heißt regulär $\Longleftrightarrow \mu(A)$ ist von beiden regulär*

Definition 1.4 (μ^* messbar und σ-Algebra)**.**
1) *Eine Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt μ^* messbar, wenn $\mu^*(M) \geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A^c \cap M)$, $\forall M \subseteq \mathbb{R}^d$.*
2) *Die Menge $A_\mu := \{A \subseteq \Omega : A\ \mu^*$messbar$\}$ ist eine σ-Algebra, und $\mu^*|_{A_\mu}$ ist ein Maß auf A_μ.*

Bemerkung 1.5. Ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt regulär bezüglich μ, falls für jede Menge $E \subset \Omega$ eine μ^* messbare Obermenge $A \supset E$ mit $\mu^*(E) = \mu^*(A)$ existiert.

Satz 1.6 (Radon-Nikodym und Lebesgue Zerlegungssatz)**.** *Seien μ,σ positive Borelmaße auf $\mathbb{R}^d$.*
1) *Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Maße μ_s und μ_a aus positiven Borelmaß mit $\mu = \mu_s + \mu_a$, sodass $\mu_s \perp \sigma$, $\mu_s \ll \sigma$ gilt. (Lebesgue Zerlegungssatz)*
2) *Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$. Dann gilt $\mu_a(A) = \int_A f \, d\sigma$, $A \in \mathcal{B}$.(Satz von Radon-Nikodym)*

Beweis. Siehe Wolfgang Wertz: *Mass- & Wahrscheinlichkeitstheorie* Seite 108, 133. □

Satz 1.7. *Seien μ,σ positive Borelmaße auf $\mathbb{R}^d$, sei $\mu = \mu_s + \mu_a$ die Zerlegung aus dem Lebesgueschen Zerlegungssatz, und bezeichne σ^*, μ^*, μ_s^*, und μ_a^* die entsprechenden äußeren Maße. Weiters setze $A_{\{\mu,\sigma\}} := A_\mu \cap A_\sigma$, und sei f die Radon-Nikodym Ableitung von μ_a nach σ. Dann gilt*

1) $\mu^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}} = \mu_s^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}} + \mu_a^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}}$, *sodass* $\mu_s^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}} \perp \sigma^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}}$, $\mu_a^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}} \ll \sigma^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}}$.
2) $\mu_a^*(A) = \int\limits_A f \, d\sigma^*|_{A_\sigma}, \; A \in A_\sigma.$

Beweis. Zuerst zeigen wir die absolut stetigen Teil. Sei $A \in A_\sigma$. Wähle $Q \in \mathcal{B}$ mit $Q \supseteq A$ und $\sigma^*(Q \setminus A) = 0$, sei $S \in \mathcal{B}$ mit $S \supseteq Q \setminus A$, und $\sigma(S) = 0$. Dann gilt $\mu_a(S) = 0$, $\mu_a^*(Q \setminus A) = 0$. Das heißt $A \in A_{\mu_a}$, so folgt $A_{\mu_a} \supseteq A_\sigma$. Also,

$$\int\limits_{Q \setminus A} f \, d\sigma^*|_{A_\sigma} = \int\limits_S f \, d\sigma = \mu_a(Q) = \mu_a^*(A).$$

Es bleibt noch die Orthogonalität zu zeigen. $A_\mu = A_{\mu_s} \cap A_{\mu_a}$ impliziert, dass $A_{\{\mu,\sigma\}} = A_{\mu_s} \cap A_\sigma$ und $\mu_s^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}}$ messbar sind. Nun wählen wir $S \in \mathcal{B}$ mit $\mu_s(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0$, $\sigma(S) = 0$. Also

$$\mu_s^*(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0 \; , \; \sigma^*(S) = 0 \text{ und } S \in A_{\{\mu,\sigma\}}, \text{ so folgt } \mu_s^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}} \perp \sigma^*|_{A_{\{\mu,\sigma\}}}.$$

□

2 Hardy-Littlewood Maximaloperator

Definition 2.1. *Sei σ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$ und $f \in L^1(\sigma)$. Dann heißt $M_\sigma f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ Hardy-Littlewood Maximaloperator, wenn*

$$(M_\sigma f)(x) = \begin{cases} \sup\limits_{r>0} \dfrac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f| \, d\sigma & , \quad x \in \operatorname{supp}(\sigma) \\ 0 & , \quad x \notin \operatorname{supp}(\sigma). \end{cases}$$

Lemma 2.2 (Lemma von Rising Sun)**.** *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf ein kompaktes Interval $[a,b]$, und sei $U = \{x \in (a,b) | \exists y, \; F(y) > F(x), \; x < y < b\}$. Dann ist E eine offene Menge und kann man U als die Vereinigung der abzählbaren disjunkten nichtleeren offenen Intervalle bezeichnen, wie folgt*

$$U = \bigcup_n (a_n, b_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

(Für jedes $n \in \mathbb{N}$, entweder $F(a_n) = F(b_n)$ oder $F(b_n) \geq F(a_n)$ mit $a_n = a$).

Beweis. Wegen der Stetigkeit von F, ist U offen und können wir U als die Vereinigung der abzählbaren disjunkten nichtleeren offenen Intervalle $I_n := (a_n, b_n)$ mit $a_n, b_n \notin U$ bezeichnen. Jetzt ist unsere Behauptung $F(b_n) \geq F(x)$, $x \in (a_n, b_n)$. Machen wir die Widerspruchsannahme. Sei $F(b_n) < F(x)$ und sei A ein kompakte Teilmenge von $[x, b_n]$, die aus ein Punkt y mit

$F(y) \geq F(x)$ besteht. Dann enthält A x aber nicht b_n, und dazu hat es eine größte Element z. Weil z in U liegt, gibt es ein Punkt y mit $z < y < b$ und $f(y) > f(z)$. Wir wissen $b_n \notin U$, sodass $f(t) \leq f(b_n)$, $b_n \leq t \leq b$. Also wegen $f(y) > f(z) \geq f(x) > f(b_n)$, muss y in (z, b_n) liegen. Das ist Widerspruch zu der Maximalität von z. Daraus folgt $f(b_n) \geq f(a_n)$.

Nun denken wir 2. Fall. Sei $a_n \neq a$. Weil der Endpunkt a_n nicht in U liegt, existiert es ein Punkt y mit $F(y) \leq F(a_n)$ für alle $a_n \leq y \leq b$. Also erhalten wir $F(b_n) \leq F(a_n)$, insgesamt $F(b_n) = F(a_n)$. Wenn $f(x) = f(a_n)$ in einem inneren Punkt, dann gilt $f(y) \leq f(x)\ \forall x < y < b$. Das ist Widerspruch zu $x \in U$. □

Jetzt können wir beweisen, die 1.dimensionale Hardy-Littlewood Maximalgleichung.

Theorem 2.3 (1-dimensionale Hardy-Littlewood Maximalungleichung). *Sei σ das 1-dimensionale Lebesgue Maß, und $[a,b]$ ein kompaktes Interval. Dann gilt für jedes $t > 0$*

$$\sigma^*(\{x \in [a,b] : \sup_{[x,x+h]\subset[a,b]} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f|\ d\sigma > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} |f|\ d\sigma,\ \ f \in L^1. \tag{1}$$

Beweis. Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_a^x |f|\ d\sigma - (x-a)t$, $t > 0$. Weil F stetig ist, können wir Lemma von Rising Sun anwenden. Nach dieses Lemmas können wir wenigstens ein abzählbares Interval I_n finden, d.h.,

$$\{x \in [a,b] : \sup_{[x,x+h]\subset[a,b]} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f|\ d\sigma > t\} \subset \bigcup_{x+h} I_n,\ \ t > 0.$$

Und $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f|\ d\sigma > t$ kann als $F(x+h) > F(x)$ bezeichnen werden. Also wegen σ-Additivität, hat die linke Seite von (1) eine Obereschranke $\sum_n (b_n - a_n)$. Andereseits gilt es $\int_{I_n} |f|\ d\sigma \geq t(b_n - a_n)$, da $F(b_n) - F(a_n) \geq 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sum_n (b_n - a_n) &\leq \frac{1}{t} \sum_n \int_{I_n} |f|\ d\sigma \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{[a,b]} |f|\ d\sigma.\end{aligned}$$

□

In höheren Dimensionen, oder für andere Maße als λ, kann man diesen Theorem nicht mit dem Lemma von Rising Sun beweisen. Anstelle von dieses Lemmas, verwenden wir die Besicovitch Überdeckung Theorem.

Definition 2.4 (Besicovitch Überdeckung). *Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ und sei $\mathcal{F}$ eine Familie abgeshlossner Bälle mit beschränkten Radien. Falls für jedes $x \in E$ es einen Ball in $\mathcal{F}$ mit Mittelpunkt x gibt, nennen wir $\mathcal{F}$ eine Besicovitch Überdeckung von E. (Das heißt, E ist die Menge der Mittelpunkte der Bälle aus $\mathcal{F}$.)*

Theorem 2.5 (Besicovitch Überdeckung Theorem). *Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ und sei $\mathcal{F}$ eine Besicovitch Überdeckung von E. Dann gibt es jeweils abzählbare Unterfamilien $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ (für $i = 1, \cdots, C_N$) mit folgenden Eigenschaften : Die Bälle in jedem $\mathcal{F}_i$ sind disjunkt und die Unterfamilien zusammen überdecken E, d.h.,*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{C_N} \bigcup \mathcal{F}_i \subset \bigcup_{i=1}^{C_N} \bigcup_{B\in\mathcal{F}_i} B \tag{2}$$

Beweis. Siehe Emmanuele DiBenedetto: *Real analysis*, 2002 Birkhäuser Boston. □

Theorem 2.6 (n-dimensionale Hardy-Littlewood Maximalungleichung)**.** *Sei σ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$, und sei $C_N \in \mathbb{N}$ eine Konstant mit der Eigenschaft im Besicovitch Überdeckung Theorem. Dann gilt für jedes $t > 0$*

$$\sigma^*(\{x \in \mathbb{R}^d : (M_\sigma f)(x) > t\}) \leq \frac{C_N}{t} \|f\|_1, f \in L^1(\sigma). \tag{3}$$

Beweis. Siehe □

Um dieses Theorem zu beweisen, brauchen wir folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 2.7. *Sei $X_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ mit $X_n \subseteq X_{n+1}, \forall n, d \in \mathbb{N}$. Dann gilt,*

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(X_n). \tag{4}$$

Beweis. Wähle $A_n \in \mathcal{B}$ mit $A_n \supseteq X_n$ und $\mu^*(X_n) = \mu(A_n)$. Nun sei $B_n := \bigcap_{k \geq n} A_k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B_n \in \mathcal{B}$ mit $X_n \subseteq B_n \subseteq A_n$ und $B_n \subseteq B_{n+1}$. Folglich gilt

$$\mu^*(X_n) \underbrace{\leq}_{X_n \subseteq B_n} \mu(B_n) \underbrace{\leq}_{B_n \subseteq A_n} \mu(A_n) = \mu^*(X_n), \text{ d.h.}, \quad \mu^*(X_n) = \mu(B_n).$$

Daraus folgt

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \underbrace{=}_{\mu^*(X_n)=\mu(A_n)} \lim_{n\to\infty} \mu^*(X_n).$$

Jetzt wissen wir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad \text{sodass} \quad \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

Also

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(X_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \underbrace{=}_{\mu(B_n)=\mu^*(X_n)} \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n).$$

□

Beweis. (n-dimensionale Hardy-Littlewood Maximalungleichung)
Sei $t > 0$, $R \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(\sigma)$ und definieren wir $F_{t,R} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq R, (M_\sigma f)(x) > t\} \subseteq \operatorname{supp}(\sigma)$. Wenn $x \in F_{t,R}$ ist, können wir einen Radius $r(x) > 0$ mit $\frac{1}{\sigma(B(x,r(x)))} \int_{B(x,r(x))} |f(t)| \, dt > t$ wählen.

Nun definieren wir eine Familie $\mathcal{F}$ wie folgt,

$$\mathcal{F} := \{B(x,r), x \in F_{t,R}\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ die Besicovitch Überdeckung von $F_{t,R}$. Außerdem gibt es abzählbare Unterfamilien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_{C_N}$ von $\mathcal{F}$. Jedes $\mathcal{F}_i$ bestehet aus disjunkten Kugeln und $\mathcal{F}_{t,R} \subseteq \bigcup_{i=1}^{C_N} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_i} B$, $\mathcal{F}_1 = \{B_{n_1}\}, \cdots, \mathcal{F}_{C_N} = \{B_{n_{C_N}}\}$.

Also

$$\begin{aligned}
\sigma^*(F_{t,R}) &\leq \sigma(\bigcup_{i=1}^{C_N} \bigcup_{B\in\mathcal{F}_i} B) \underbrace{\leq}_{\text{Sub-}\sigma\text{-Additivität}} \sum_{i=1}^{C_N} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} \sigma(B) \\
&\underbrace{\leq}_{\frac{1}{\sigma(B)}\int|f(t)|>t} \sum_{i=1}^{C_N} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} \frac{1}{t} \int\limits_B |f(t)|\, d\sigma = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{C_N} \int\limits_{\bigcup_{B\in\mathcal{F}_i}} |f(t)|\, d\sigma \\
&\leq \frac{C_N}{t}\, \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Wähle $R \to \infty$. Dann gilt

$$\sigma^*(\{x\in\mathbb{R}^d : (M_\sigma f) > t\}) = \sigma^*(\bigcup_{R\in\mathbb{N}} F_{t,R}) \underbrace{=}_{(4)} \lim_{R\to\infty} \sigma^*(F_{t,R}) \leq \frac{C_N}{t}\, \|f\|_1 . \tag{5}$$

□

Definition 2.8 (Lebesgue Punkt). *Sei σ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist eine Borel messbare Funktion mit $\int |f|\, d\sigma < \infty$. Dann heißt $x \in \mathbb{R}^d$ Lebsgue Punkt von f bezüglich σ, wenn*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, d\sigma = 0, \tag{6}$$

wobei $B(x,r) = \{y\in\mathbb{R}^d : |x-y| < r\}$ ist.

Theorem 2.9. *Sei σ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$ und $f \in L^1(\sigma)$. Dann gehört die Menge aller Lebesgue Punkte von f bezüglich σ zu A_μ und*

$$\sigma^*(\{x\in\mathbb{R}^d : x \text{ ist kein Lebesgue Punkt von } f \text{ bezüglich } \sigma\}) = 0. \tag{7}$$

Beweis. Sei zuerst f stetig. Dann gilt,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, d\sigma(y) &\leq \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \sup_{y\in B(x,r)} |f(y)-f(x)| \cdot \sigma(B(x,r)) \\
&= \sup_{y\in B(x,r)} |f(y) - f(x)|
\end{aligned}$$

Für $r \to 0$ strebt die rechte Seite, und damit auch die linke, gegen Null.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Fixieren wir $n \in \mathbb{N}$ und wählen wir eine stetige Funktion h_n mit kompakten Träger wie folgt, $\|f - h_n\|_1 < \frac{1}{n}$.

Sei $g_n := f - h_n$. Dann gilt für jede $x \in \text{supp}(\sigma)$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, d\sigma(y) \\
\leq \; & \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |g_n(y) - g_n(x)| \, d\sigma(y) + \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |h_n(y) - h_n(x)| \, d\sigma(y) \\
\leq \; & \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |g_n(y)| \, d\sigma(y) + |g_n(x)| + \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |h_n(y) - h_n(x)| \, d\sigma(y) \\
\leq \; & (M_\sigma g_n)(x) + |g_n(x)| + \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |h_n(y) - h_n(x)| \, d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
(Tf)(x) \; & := \; \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, d\sigma(y) \\
& \leq \; (M_\sigma g_n)(x) + |g_n(x)| \qquad (8)
\end{aligned}$$

und wegen (8), bekommen wir für $t > 0$

$$\{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) > t\} \subseteq \{x \in \text{supp}(\sigma) : (M_\sigma g_n)(x) > \frac{t}{2}\} \cup \{x \in \text{supp} : |g_n(x)| > \frac{t}{2}\}.$$

Nach der Formel (3),

$$\begin{cases}
\sigma^*(\{x \in \text{supp}(\sigma) : (M_\sigma g_n)(x) > \frac{t}{2}\}) \leq \frac{2C_N}{t} \, \|g_n\|_1 \leq \frac{2C_N}{tn} \\
\sigma^*(\{x \in \text{supp}(\sigma) : |g_n(x)| > \frac{t}{2}\}) \leq \frac{2}{t} \, \|g_n\|_1 \leq \frac{2}{tn}
\end{cases}$$

also insgesamt,

$$\sigma^*(\{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) > t\}) \leq \frac{2(C_N + 1)}{tn}.$$

Weil n beliebig ist, wissen wir jetzt

$$\sigma^*(\{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) > t\}) = 0 \text{ für } n \to \infty \text{ und } \{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) > t\} \in A_\sigma.$$

Nun fomulieren wir $\{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) > 0\}$ als $A := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) > \frac{1}{l}\}$. Dann gilt $\sigma^*(A) = 0$ und $\{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) > 0\} \in A_\sigma$.

Also

$$\begin{aligned}
& \{x \in \mathbb{R}^d : \; x \text{ ist kein Lebesgue Punkt von } f \text{ bezüglich } \sigma\} \\
& = (\text{supp}(\sigma)^c \cup \{x \in \text{supp}(\sigma) : (Tf)(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

□

3 Symmetrische Ableitung vom positiven Maß

Definition 3.1.

1) *Seien μ, σ positive Borelmaße auf $\mathbb{R}^d$. Für $x \in \operatorname{supp}(\mu) \cup \operatorname{supp}(\sigma)$ bezeichnen wir*

$$(D_\sigma \mu)(x) := \lim_{r \searrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\sigma(B(x,r))} \tag{9}$$

sofern dieses Grenzwert in $[0,\infty]$ existiert. Weiters sei $D_{ne}(\mu,\sigma)$ Die Menge aller punkte die nicht in $\operatorname{supp}(\mu) \cup \operatorname{supp}(\sigma)$ liegen, oder für die obigen Grenzwert nicht existiert. Die Funktion $D_\sigma\mu : \mathbb{R}^d \setminus D_{ne}(\mu,\sigma) \to [0,\infty]$ heißt symmetrische Ableitung von μ bezüglich σ.

2) *Für die Teilmenge $M \subseteq [0,\infty]$ definieren wir $D_M(\mu,\sigma)$ als*

$$D_M(\mu,\sigma) := (D_\sigma\mu)^{-1}(M) = \{x \in D_{ne}(\mu,\sigma)^c : (D_\sigma\mu)(x) \in M\}.$$

Bemerkung 3.2. Weil die Abbildung

$$f : \begin{cases} [0,\infty] \to [0,\infty] \\ \quad x \quad \mapsto \ x^{-1} \end{cases}$$

homöomorph ist (da, $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$) können wir uns folgende Darstellung herleiten.

$$D_{ne}(\mu,\sigma) = D_{ne}(\sigma,\mu),\ (D_\sigma\mu)(x) = (D_\mu\sigma)(x)^{-1},\ \forall x \in D_{ne}(\mu,\sigma)^c. \tag{10}$$

Besonders, falls $M \subseteq [0,\infty]$

$$\begin{aligned} D_M(\mu,\sigma) &= \{x : (D_\sigma\mu)(x) \in M\} = \{x : \frac{1}{(D_\sigma\mu)(x)} \in M^{-1}\} \\ &= \{x : (D_\mu\sigma)(x) \in M^{-1}\} = D_{M^{-1}}(\sigma,\mu). \end{aligned} \tag{11}$$

Theorem 3.3. *Seien σ und μ positive Borelmaße auf $\mathbb{R}^d$. Dann gelten folgenden Eigenschaften.*

1) *Es gilt $\mu^*(D_{ne}(\mu,\sigma)) = \sigma^*(D_{ne}(\mu,\sigma)) = 0$.*
2) *Es existiert eine Borelmenge S_0 mit $D_{ne}(\mu,\sigma) \cup D_{\{\infty\}}(\mu,\sigma) \subseteq S_0$ und $\sigma(S_0) = 0$, sodass $D_\sigma\mu|_{\mathbb{R}^d \setminus S_0}$ Borel messbar ist.*
3) *Sei $\tilde{D}_\sigma\mu : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ eine Fortsetzung von $D_\sigma\mu$. Dann ist $\tilde{D}_\sigma\mu$ $A_{\mu,\sigma}$-messbar und gehört zu $L^1_{loc}(\sigma)$.*
4) *Es gilt $D_{\{\infty\}}(\mu,\sigma) \in A_{\mu,\sigma}$ und $\mu^*(D_{\{\infty\}}(\mu,\sigma)) = 0$.*
5) *Die Lebesgue Zerlegung von μ in einen bezüglich σ singulären und absolut stetigen Teil ist gegeben durch*

$$\mu^*(x) = \mu^*(x \cap D_{\{\infty\}}(\mu,\sigma)) + \int_x D_\sigma\mu \, d\sigma \ , \ x \in A_\sigma. \tag{12}$$

Zuerst betrachten wir absolut stetigen Teil bezüglich σ und singulären Teil bezüglich σ.

Beweis.
Seien μ,σ positive Borelmaße auf $\mathbb{R}^d$. Dann kann man nach dem Satz 1.6 $\mu = \mu_s + \mu_a$ mit $\mu_s \perp \sigma$, $\mu_s \ll \sigma$ bezeichnen und μ_a, μ_s sind Borel messbar.

Schritt 1.[Absolut stetiger Teil]

Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$. Dann gilt $\mu_a(x) = \int_x f \, d\sigma \ , \ x \in \mathcal{B}$. Weil μ endliche Werte auf kompakten Mengen hat, gilt es $f \in L^1(\sigma)$ und Borel messbar. Also für jedes $R \in \mathbb{N}$, ist $f \cdot \mathbb{1}_R$ auch aus $L^1(\sigma)$.

Sei L_R eine Menge der Lebesgue Punkte von $f \cdot \mathbb{1}_R$. Jetzt wählen wir einde Borelmenge S_R mit $\sigma(S_R) = 0$, $L_R^c \subseteq S_R$ und $S := \bigcup_{R\in\mathbb{N}} S_R$. Dann gilt,

$$\begin{aligned}
&S \in \mathcal{B}, \qquad (\text{da}, \mathcal{B} \cup \mathcal{B} \cup \cdots = \mathcal{B})\\
&\sigma(S) = 0, \qquad (\text{da}, \sigma(S_R) = 0)\\
&\text{und } \textstyle\bigcup_{R\in\mathbb{N}} L_R^c \subseteq S. \qquad (\text{da}, \bigcup_{R\in\mathbb{N}} L_R^c \subseteq \bigcup_{R\in\mathbb{N}} S_R \subseteq S).
\end{aligned}$$

Nun sei $x \in (\mathbb{R}^d \setminus S) \cap \operatorname{supp}(\sigma)$ und wähle $R \in \mathbb{N}$ mit $R > \|x\|$. Dann gilt für jedes $r < R - \|x\|$, $B(x, r) \subseteq B(0, R)$ und $(f \cdot \mathbb{1}_R)(y) = f(y)$, $\forall y \in B(x, r)$. Also

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mu_a(B(x,r))}{\sigma(B(x,r))} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, d\sigma(y) - \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f(x)\, d\sigma(y)\right|\\
&\leq \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |(f \cdot \mathbb{1}_R)(y) - (f \cdot \mathbb{1}_R)(x)| \, d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Falls $r \to 0$, wegen $x \in S^c \subseteq L_R$, wird rechte Seite 0 sein. Also bekommen wir

$$(D_\sigma \mu_a)(x) = f(x) \text{ und } \mathbb{R}^d \setminus (S \cup (\operatorname{supp}(\sigma))^c) \subseteq D_{[0,\infty]}(\mu_a, \sigma),$$

und $D_\sigma \mu_a|_{\mathbb{R}^d \setminus (S \cup (\operatorname{supp}(\sigma))^c)}$ ist Borel messbar, weil f Borel messbar ist.

Zusätzlich $D_{ne}(\mu_a, \sigma) \cup D_{\{\infty\}}(\mu_a, \sigma) \subseteq S \cup (\operatorname{supp}(\sigma))^c$. (da, $L_R^c \subseteq S \Rightarrow D_{ne}(\mu_a, \sigma) \subseteq S$ und $D_{\{\infty\}}(\mu_a, \sigma) \subseteq (\operatorname{supp}(\sigma))^c$)

Also

$$\begin{aligned}
&D_{ne}(\mu_a, \sigma),\ D_{\{\infty\}}(\mu_a, \sigma),\ D_{[0,\infty)}(\mu_a, \sigma) \in A_\sigma, \qquad (\text{da}, S \cup (\operatorname{supp}(\sigma))^c \in A_\sigma)\\
&\sigma^*(D_{ne}(\mu_a, \sigma)) = \sigma^*(D_{\{\infty\}}(\mu_a, \sigma)) = 0, \qquad (\text{da}, \sigma(S \cup (\operatorname{supp}(\sigma))^c) = 0)\\
&\text{und } \mu_a(A) = \int\limits_A \tilde{D}_\sigma \mu \, d\sigma,\ A \in \mathcal{B}. \qquad (\text{Satz von Radon-Nikodym})
\end{aligned}$$

Nach dem Satz 1.7.2), bekommen wir

$$\begin{aligned}
&D_{ne}(\mu_a, \sigma),\ D_{\{\infty\}}(\mu_a, \sigma),\ D_{[0,\infty)}(\mu_a, \sigma) \in A_{\mu_a},\\
&\mu_a^*(D_{ne}(\mu_a, \sigma)) = \mu_a^*(D_{\{\infty\}}(\mu_a, \sigma)) = 0,\\
&\text{und } \mu_a^*(A) = \int\limits_A \tilde{D}_\sigma \mu_a \, d\sigma,\ A \in A_\sigma.
\end{aligned}$$

Schritt 2. [Singulärer Teil]

Wähle $S \in \mathcal{B}$ mit $\sigma(S) = 0$, $\sigma_s(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0$ und definieren wir

$$E_k := \{x \in S \cap (\operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\mu_s)) : \liminf_{r\to 0} \frac{\mu_s(B(x,r))}{\sigma(B(x,r))} < k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Und für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine offene Menge V_n mit $S \subseteq V_n$ und $\sigma(V_n) < \frac{1}{n}$. Wenn $x \in E_k$, existiert es ein Radius $r_{x,k,n} > 0$ mit $\frac{\mu_s(B(x,r_{x,k,n}))}{\sigma(B(x,r_{x,k,n}))} \leq k$ und $B(x, r_{x,k,n}) \subseteq V_n$. Nun sei eine Familie $\mathcal{F}_{k,n} := \{B(x, r_{x,k,n}) : x \in E_k\}$ Besicovitch Überdeckung von E_k. Dann gibt es abzählbare Unterfamilien $\mathcal{F}^1_{k,n}, \cdots, \mathcal{F}^{C_N}_{k,n}$ von $\mathcal{F}_{k,n}$ und jedes $\mathcal{F}_{k,n}$ besteht aus punktweise disjunkte Bälle mit $E_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{C_N} \bigcup_{B\in\mathcal{F}^i_{k,n}} B$. Also

$$\begin{aligned}
\mu_s^*(E_k) &\leq \mu_s(\bigcup_{i=1}^{C_N} \bigcup_{B\in\mathcal{F}^i_{k,n}} B) \underbrace{\leq}_{\text{Sub-}\sigma\text{-Additivität}} \sum_{i=1}^{C_N} \sum_{B\in\mathcal{F}^i_{k,n}} \mu_s(B) \\
&\leq k \sum_{i=1}^{C_N} \sum_{B\in\mathcal{F}^i_{k,n}} \sigma(B) \underbrace{=}_{\text{B disjunkt}} k \sum_{i=1}^{C_N} \sigma(\bigcup_{B\in\mathcal{F}^i_{k,n}} B) \\
&\leq k \cdot C_N \cdot \sigma(V_n) \quad (\text{da, } B \subseteq V_n) \\
&\leq \frac{k \cdot C_N}{n} \quad (\text{da, } \sigma(V_n) < \frac{1}{n}). \qquad (13)
\end{aligned}$$

Weil $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, bekommen wir $\mu_s^*(E_k) = 0$ und zusätzlich $D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \cup [(\mathrm{supp}(\sigma))^c \cap (\mathrm{supp}(\mu_s))^c]$, sodass $\mu_s^*(D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c) = 0$. Also

$$\begin{aligned}
&D_{ne}(\mu_s, \sigma),\ D_M(\mu_s, \sigma) \text{ mit } \infty \notin M,\ D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma) \in A_{\mu_s}, \\
&\mu_s^*(D_{ne}(\mu_s, \sigma)) = \mu_s^*(D_M(\mu_s, \sigma)) = 0,\ \infty \notin M.
\end{aligned}$$

Nach der **Bemerkung 3.2**, können wir $\sigma^*(D_{\{0\}}(\mu_s, \sigma)^c) = \sigma^*(D_{\{\infty\}}(\sigma, \mu_s)^c) = 0$ wissen, sodass

$$\begin{aligned}
&D_{\{0\}}(\mu_s, \sigma),\ D_M(\mu_s, \sigma) \text{ mit } 0 \notin M,\ D_{ne}(\mu_s, \sigma) \in A_\sigma, \\
&\sigma^*(D_{ne}(\mu_s, \sigma)) = \sigma^*(D_M(\mu_s, \sigma)) = 0,\ 0 \notin M.
\end{aligned}$$

Wir haben schon $\mu_s^*(D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c) = 0$ gezeigt, also

$$\begin{aligned}
\mu_s^*(x) &= \mu_s^*([x \cap D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)] \cup [x \cap D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c]) \\
&= \mu_s^*([x \cap D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)]) + \mu_s^*([x \cap D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c]) \\
&= \mu_s^*([x \cap D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)]),\ x \subseteq \mathbb{R}^d. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Schritt 3. Nun beweisen wir das Theorem.

1) Nach dem Lebesgue Zerlegungsssatz, gilt es $D_{ne}(\mu, \sigma) \subseteq D_{ne}(\mu_a, \sigma) \cup D_{ne}(\mu_s, \sigma)$ und wegen $\sigma^*(D_{ne}(\mu_a, \sigma)) = \sigma^*(D_{ne}(\mu_s, \sigma)) = 0$, erhalten wir $\sigma^*(D_{ne}(\mu, \sigma)) = 0$, und $D_{ne}(\mu, \sigma) \in A_\sigma$. Also

$$\mu_a^*(D_{ne}(\mu, \sigma)) = 0.$$

Und wir wissen schon $D_{ne}(\mu, \sigma) \subseteq D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)^c \subseteq D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c$, sodass

$$\mu_s^*(D_{ne}(\mu, \sigma)) = 0. \qquad (\text{da, } \mu_s(D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c) = 0)$$

2) Es gelten die Voraussetzungen von S im ersten Schritt. Wähle eine Menge $S' \in \mathcal{B}$ mit $S' \supseteq D_{\{0\}}(\mu_s, \sigma)^c$ und $\sigma(S') = 0$. Jetzt setzen wir $S_0 := S \cup (\operatorname{supp}(\sigma))^c \cup S'$. Dann gilt $S_0 \in \mathcal{B}$ und $\sigma(S_0) = 0$, da $\sigma(S) = \sigma((\operatorname{supp}(\sigma))^c) = \sigma(S') = 0$. Also bekommen wir $(D_\sigma \mu_s)(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d \setminus S_0$, weil $x \in \mathbb{R}^d \setminus S_0 \Rightarrow x \notin S_0 \Rightarrow x \notin S' \Rightarrow x \notin D_{\{0\}}(\mu_s, \sigma)^c \Rightarrow x \notin D_\sigma \mu_s \Rightarrow (D_\sigma \mu_s)(x) = 0$.

Daraus folgt,

$$(D_\sigma \mu)(x) = (D_\sigma \mu_a)(x) + (D_\sigma \mu_s)(x) = (D_\sigma \mu_a)(x), \; x \in \mathbb{R}^d \setminus S_0.$$

Das heißt die Funktion nimmt endliche Maß und Borel messbar auf $\mathbb{R}^d \setminus S_0$.

3) Es gelten die Voraussetzungen von $S_0 := S \cup (\operatorname{supp}(\sigma))^c \cup S'$ von 2). Dann gilt

$$\tilde{D}_\sigma \mu|_{\mathbb{R}^d \setminus S_0} = D_\sigma \mu|_{\mathbb{R}^d \setminus S_0} \underbrace{=}_{\text{Satz von Radon-Nikodym}} f|_{\mathbb{R}^d \setminus S_0}.$$

Weil $\sigma(S_0) = 0$ ist, bekommen wir $\mathcal{P}(S_0) \subseteq A_\sigma$ und $\sigma^*(x) = 0$, $\forall x \subseteq S_0$. Also $\tilde{D}_\sigma \mu$ ist A_σ-messbar und gehört zu $L^1(\sigma)$. Und nach dem Satz von Radon-Nikodym, ist $\tilde{D}_\sigma \mu$ auch A_{σ_a}-messbar.

Außerdem wissen wir schon, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^d : (\tilde{D}_\sigma \mu)(x) \neq \infty\} \subseteq D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)^c, \tag{15}$$

sodass $\tilde{D}_\sigma \mu$ $\mathcal{A}_{\sigma_s}$-messbar ist. Insgesamt ist $\tilde{D}_\sigma \mu$ $\mathcal{A}_\sigma$-messbar.

4) Wir wissen, dass

$$D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma) \subseteq D_{ne}(\mu_a, \sigma) \cup D_{ne}(\mu_s, \sigma) \cup D_{\{\infty\}}(\mu_a, \sigma) \cup D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma).$$

Also können wir herleiten, dass $\sigma^*(D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)) = 0$ und $D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma) \in A_\sigma$, sodass

$$D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma) \in A_{\mu_a}.$$

Und wegen $D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)^c \subseteq D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)^c$, erhalten wir

$$D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma) \in A_{\mu_s}.$$

Das heißt $D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma) \in A_\mu$, sodass insgesamt $D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma) \in A_{\{\mu, \sigma\}}$.

5) Im Schritt 1., haben wir schon gezeigt, dass $\mu_a(x) = \int_x \tilde{D}_\sigma \mu \, d\sigma$, $x \in \mathcal{B}$, und diese Gleichung auch gültig für jedes $x \in A_\sigma$ ist. Als nächstes gilt es

$$\mu_s^*(x) \geq \mu_s^*(x \cap D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)) \geq \mu_s^*(x \cap D_{\{\infty\}}(\mu_s, \sigma)) \underbrace{=}_{(14)} \mu_s^*(x), \; x \in \mathbb{R}^d.$$

Aber wegen $\sigma^*(x \cap D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)) = \mu_a^*(x \cap D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)) = 0$,

$$\mu_s^*(x \cap D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)) = \mu^*(x \cap D_{\{\infty\}}(\mu, \sigma)), \; x \subseteq \mathbb{R}^d.$$

□

Literatur

[1] Emmanuele DiBenedetto: *Real analysis*, 2002 Birkhäuser Boston.

[2] W.Rudin: *Real and Complex Analysis*, International Edition, 3rd Edition, McGwaw-Hill 1987.

[3] Wolfgang Wertz: *Mass- & Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2010, Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

[4] Rising sun lemma : Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Rising_sun_lemma