Schauderbasen und das Beispiel der Riesz-Basen auf Hilberträumen

Bernhard Stiftner

10. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines zu Schauderbasen

Bemerkung 1. Sei X ein endlichdimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum der Dimension $N \in N$, dann gibt es N linear unabhängige Vektoren $(b_n)_{n=1}^N$ und eine eindeutige Folge $(a_n)_{n=1}^N$ von Skalaren, sodass

$$x = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \tag{1}$$

gilt. Für Details verweise auf [HAV]. Es liegt nahe dieses Konzept auf Vektorräume "größerer"Dimension zu erweitern. Dies ist "manchmal", mit gewissen Einschränkungen auch möglich.

Definition 2. Sei X ein nomierter linearer Raum. Eine Folge $\mathcal{B} := (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt Schauderbasis von X, wenn es für jedes $x \in X$ eine eindeutige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Skalaren gibt, mit

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \tag{2}$$

Bemerkung 3.

- Nicht jeder Banachraum X hat eine Schauderbasis.
- In Definition 2 konvergiert die Summe in der Norm des normierten Raums. Diese Konvergenz muss nicht absolut sein.
- In der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus der Definition 2 ist die Reihenfolge wesentlich. Die Eigenschaft eine Schauderbasis zu sein kann bei einer beliebigen Permutation der Elemente verloren gehen.
- Der Nullvektor ist kein Element einer Schauderbasis. Wäre nämlich $b_{n_0} = 0$ für eine Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann hätte er mit $0 = a_{n_0} b_{n_0} = a_{n_0} \cdot 0$ für ein beliebiges a_{n_0} mehr als eine Darstellung.
- Eine Schauderbasis ist linear unabhängig. Für eine nichttriviale beliebige Linearkombination

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \tag{3}$$

  des Nullvektors müsste nämlich es dann $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ geben mit $a_{n0}, a_{n_1} \neq 0$. Damit gilt dann

$$b_{n_0} = -\sum_{n\neq n_0} \frac{1}{a_{n_0}} a_n b_n \tag{4}$$

  Damit hat $b_{n_0} \in H$ aber zwei verschiedene Darstellungen bzgl. der Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, was einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung darstellt.
- Ein Banachraum, der eine Schauderbasis hat, ist seperabel; d.h er hat eine abzählbare ,dichte Teilmenge. Wähle zum Beispiel:

$$M := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n : a_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\} \tag{5}$$

  dann gilt sicher $\overline{M} = X$.

Beispiel 4.

- $l^p(I)$ für überabzählbares I und $1 \leq p < \infty$ hat keine Schauderbasis, da er nicht seperabel ist; nicht jeder seperable Banachraum besitzt umgekehrt eine Schauderbasis.
- $l^p(\mathbb{N})$, der Raum der p-summierbaren Folgen, ist seperabel und hat auch Schauderbasis. Wähle zum Beispiel $(b_m)_{n\in\mathbb{N}} := (\delta_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$ die kanonischen Einheitsvektoren.
- Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq 2^n$ die Funktionen des Haar-Systems:

$$h_{2^n+i} : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \frac{2i-2}{2^{n+1}} \leq x < \frac{2i-1}{2^{n+1}} \\ -1 & \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leq x < \frac{2i}{2^{n+1}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

  Die h_k sind sicher nicht orthogonal. Das System $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Schauderbasis des $L^p[0,1]$ für $1 \leq p < \infty$.
- In der Darstellung von $f \in L^p[0,1]$ bzgl. dem Haarsystem kommt es für $1 < p < \infty$ nicht auf die Reihenfolge der Summanden an. Für $p = 1$ gilt das nicht. Im Allgemeinen gibt es auch keine andere Basis, sodass es in der Darstellung von $f \in L^1[0,1]$ für die Koeffizienten nicht auf die Reihenfolge der Vektoren ankommt.

Definition 5. (i) Sei H ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt $(\cdot,\cdot)_H$. Eine Menge $\mathcal{B} := \{b_\alpha : \alpha \in A\}$ in H mit einer beliebigen Indexmenge A heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn

$$(b_\alpha, b_\beta)_H = \delta_{nm} \quad \forall \alpha, \beta \in A \tag{7}$$

(ii) Ein Orthonormalsystem heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn es kein echt größeres Orthonormalsystem gibt, d.h. für jedes ONS $\tilde{\mathcal{B}}$ mit $\tilde{B} \supset B$ bereits $\tilde{B} = B$ folgt.

Bemerkung 6. Mit dem Lemma von Zorn folgt dann leicht, dass es in jedem Hilbertraum eine (nicht unbedingt abzählbare) ONB gibt (vgl. dazu [FANA1] Lemma 3.3.2.). Wir betrachten ab jetzt nur mehr abzählbare Hilbertraumbasen.

Satz 7. Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{B} := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ in H ein abzählbares Orthonormalsystem. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(i) $\mathcal{B}$ ist eine Orthonormalbasis.

(ii) $D := \operatorname{span}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in H.

(iii) Für alle $x \in H$ gilt die Parsevalgleichung; d.h es gilt

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, b_n)_H \, b_n \tag{8}$$

und diese Darstellung ist eindeutig bzgl. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. siehe [FANA1], Korollar 3.3.4. in vereinfachter Version (ursprünglich für beliebige Indexmengen) □

Bemerkung 8.

- Jede abzählbare ONB ist lt. Satz 7 eine Schauderbasis, daher ist der Begriff Schauderbasis eine Verallgemeinerung einer abzählbaren ONB auf einem Hilbertraum.

- In der Summe aus (7) kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Vergleiche dazu Satz 7. Für obige Summendarstellung war nur die Dichtheit von $D := \operatorname{span}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ wichtig. D ist aber invariant unter beliebigen Permutationen der b_n.

- Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis auf einem Hilbertraum H und gelte zusätzlich $(b_m, b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \delta_{mn}$, dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen der Äquivalenz von (i) und (ii) in Satz 7 eine ONB.

Definition 9. Sei X ein normierter Raum und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis. Definiere die kanonischen Projektionen

$$P_N : X \to X : x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \tag{9}$$

Bemerkung 10.
- Die kanonischen Projektionen hängen natürlich von der speziellen Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

- Es gilt $P_N(X) = \operatorname{span}\{b_n : n \leq N\}$.

- Die kanonischen Projektionen einer Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem normierten Raum sind im Allgeinenen nicht beschränkt. Später werden wir für die kanonischen Projektionen P_N von Schauderbasen auf Banachräumen sogar die gleichmäßige Beschränktheit zeigen. Für eine abzählbare ONB auf einem Hilbertraum gilt sogar immer $\|P_N\| = 1$.

Lemma 11. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis eines normierten Raums X. Die kanonischen Projektionen P_N erfüllen die folgenden drei Eigenschaften:

(i) Es gilt $\dim(P_N(X)) = N$,

(ii) $P_N \circ P_M = P_M \circ P_N = P_{\min(N,M)}$,

(iii) für $x \in X$ gilt $P_N(x) \to x$ für $N \to \infty$.

Gelte umgekehrt für eine Folge von beschränkten (!) Projektionen $(P_N)_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}}$ auf einem normierten Raum die Eigenschaften (i)-(iii), dann sind diese Projektionen die kanonischen Projektionen einer Schauderbasis.

Beweis.
1. Es gilt $P_N(X) := \operatorname{span}\{b_n : n \leq N\}$ und die Vektoren $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind linear unabhängig, woraus die Aussage unmittelbar folgt.

2. klar

3. folgt sofort aus der Definition der Schauderbasis.

Gelte für eine Folge von Projektionen $(P_N)_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}}$ auf einem normierten Raum umgekehrt die Eigenschaften (i)-(iii). Aus (ii) folgt $P_N(X) = P_M(P_N(X)) \subset P_M(X)$ für $M \geq N$ und mit (i) ist $(P_N(X))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von aufsteigenden Unterräumen mit $\dim(P_N(X)) + 1 = \dim(P_{N+1}(X))$. Sei nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige Folge, sodass aber $(b_n)_{n=1}^{N}$ eine Basis von $P_N(X)$ ist und zusätzlich $b_{n+1} \in \ker P_n(X)$ gilt. Setze zusätzlich $P_0 = 0$. Mit (iii) folgt dann für eine $x \in X$:

$$P_{N+1}(x) - P_N(x) = \sum_{n=1}^{N+1} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} \tilde{a_n} b_n \tag{10}$$

für zwei Folgen von Skalaren $(a_n)_{n=1}^{N+1}$ und $(\tilde{a_n})_{n=1}^{N}$. Es gilt nun

$$0 = P_N \left(P_{N+1}(x) - P_N(x)\right) = P_N \left(\sum_{n=1}^{N+1} a_n b_n\right) - \sum_{n=1}^{N} \tilde{a_n} b_n = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} \tilde{a_n} b_n \tag{11}$$

und damit muss $a_n = \tilde{a_n}$ gelten für $n \leq N$. Damit gilt aber

$$P_{N+1}(x) - P_N(x) = a_{n+1} b_{n+1} \tag{12}$$

für ein geeignetes a_{n+1}. Wir können nun weiter berechnen:

$$x = \lim_{N\to\infty} P_N(x) = \lim_{N\to\infty} P_N(x) - P_0(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(P_n(x) - P_{n-1}(x)\right) \tag{13}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(P_n(x) - P_{n-1}(x)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \tag{14}$$

für Skalare a_n. Für die Eindeutigkeit diese Darstellung betrachte eine weitere Darstellung $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \beta_n b_n$. Die Projektionen sind lt. Voraussetzung stetig. Daher gilt für $M \in \mathbb{N}$ dann

$$P_M(x) = P_M \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \beta_n b_n\right) = \lim_{N\to\infty} P_M \left(\sum_{n=1}^{N} \beta_n b_n\right) = \sum_{n=1}^{M} \beta_n b_n \tag{15}$$

Damit folgt sofort $\beta_n b_n = P_n(x) - P_{n-1}(x) = \alpha_n b_n$ und dadurch die Eindeutigkeit der Darstellung. Damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis und es folgt auch gleich, dass P_n die kanonischen Projektionen von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Lemma 12. Sei $(X \left\|\cdot\right\|_X)$ ein normierter Raum mit einer Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gelte nun für die kanonischen Projektionen P_n dann $\sup\limits_n \|P_n\|_X < \infty$, dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Schauderbasis der Vervollständigung und die kanonischen Projetionen $\tilde{P_n}$ sind genau die stetigen Fortsetzungen von P_n auf $\tilde{X}$.

Beweis. Da die P_n beschränkt sind, können sie stetig auf die Vervollständigung $\tilde{X}$ erweitert werden. Nenne diese Erweiterung $\tilde{P_n}$. Wir überprüfen nun die Eigenschaften (i)-(iii) aus Lemma 11 für $\tilde{P_n}$ auf $\tilde{X}$. $P_n(X)$ ist endlichdimensional und damit abgeschlossen in $\tilde{X}$. Für die Vervollständigung gilt $\overline{P_n(X)} \subset \tilde{P_n}\left(\tilde{X}\right)$ und damit folgt $\tilde{P_n}\left(\tilde{X}\right) = P_n(X)$. (ii) folgt sofort da die Aussage für die $\tilde{P_n}$ ja auf einer dichten Teilmenge gilt. Für (iii) betrachte $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Es gilt lt. Voraussetzung $P_n(x) \to x$ für alle $x \in X$. Sei nun $x_\epsilon \in X$ derart, dass $x_\epsilon \to x$ für $\epsilon \to 0$. Betrachte nun

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \tilde{P_n}(\tilde{x}) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \tilde{P_n}\left(\lim_{\epsilon\to 0} x_\epsilon\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \lim_{\epsilon\to 0} P_n(x_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n(x_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} x_\epsilon = x \tag{16}$$

□

wobei das dritte Gleichheitszeichen aus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\|\tilde{P_n}\right\|_X = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|_X < \infty$ und der daraus resultierenden Gleichmäßigkeit der Grenzübergangs in n folgt. Es folgt dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie im Beweis der Umkehrung von Lemma 11 ist. Der Rest folgt dann genauso.

Satz 13. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis auf einem Banachraum X. Setze für $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ dann $\|x\|_{\mathcal{B}} := \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \left\|\sum\limits_{n=1}^{N} a_i b_i\right\|_X$. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ ist eine Norm auf X. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch eine Schauderbasis auf $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ und für die kanonischen Projekionen P_N gilt $\|P_N\|_{\mathcal{B}} \leq 1$.

(ii) $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ist ein Banachraum und $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ eine äquivalente Norm auf X.

(iii) Es gilt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|_X < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) Wir zeigen zuerst, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ eine Norm auf X ist. Die Wohldefiniertheit folgt aus

$$\|x\|_X = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \right\|_X < \infty \tag{17}$$

Die Homogenität und die Dreiecksungleichung folgen sofort aus der Definition. Für die Definitheit betrachte die wieder (17). Es folgt sofort $\|x\|_{\mathcal{B}} \geq \|x\|_X$. Für $\|x\|_{\mathcal{B}} = 0$ folgt dann $\|x\|_X = 0$ und weil $\|\cdot\|_X$ eine Norm ist, dann auch $x = 0$. Damit ist $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ eine Norm auf X.

Nun zeigen wir, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Schauderbasis auf $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ist. Dazu verwenden wir Lemma 11. Für die kanonischen Projektionen P_n der Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(X, \|\cdot\|_X)$ rechnen wir also die Eigenschaften (i)-(iii) und die gleichmäßige Beschränktheit der P_n als Abbildung auf $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ nach.

Die Eigenschaften (i) und (ii) sind keine Frage der Topologie und folgen daher einfach weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis auf $(X, \|\cdot\|_X)$ ist. Für die Eigenschaft (iii) wähle $x \in X$. Es gilt

$$\|x - P_n(x)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_m(x) - P_n P_m(x)\|_X = \sup_{n\geq m} \|P_m(x) - P_n(x)\|_X \to 0, \tag{18}$$

da die $P_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ den endlichen Teilsummen der Reihendarstellung bzgl. der Schauderbasis entsprechen und die eine Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|_X)$ sind. Für die Beschränkheit betrachte schließlich für $m \in \mathbb{N}$

$$\|P_m\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}\leq 1} \|P_m x\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}\leq 1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n P_m(x)\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}\leq 1} \|P_n P_m(x)\|_X = \tag{19}$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup \left\{ \|P_n P_m(x)\|_X : \text{ für } x \text{ gilt } \sup_{i\in\mathbb{N}} \|P_i(x)\|_X \leq 1 \right\} \right\} \leq 1, \tag{20}$$

da ja $P_n P_m(x) = P_{\min(m,n)}(x)$.

(ii) Wir zeigen zuerst, dass $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ ein vollständiger Raum ist. Sei dazu $\tilde{X}$ die Vervollständigung von X bzgl. $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Wir rechnen nach, dass $\tilde{X} = X$ gilt. In (i) haben wir gezeigt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$. Mit Lemma 12 folgt auch, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauderbasis der Vervollständigung $\tilde{X}$ ist. Sei nun $x \in \tilde{X}$, dann existiert eine eindeutige Folge von Skalaren a_n mit $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$. Da ja lt. (i) auch $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} \geq \|\cdot\|_X$ auf X gilt, folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|_X)$ ist. Daher gibt es $x_1 \in X$ mit $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n \to x_1$ bzgl. $\|\cdot\|_X$ für $N \to \infty$, denn $(X, \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch eine Schauderbasis in $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ und wegen Lemma 11, (iii) gilt dann auch $P_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n \to x_1$ bzgl. $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Insgesamt folgt $x_1 = \tilde{x}$.

Für die Äquivalenz der Normen betrachte nun Einbettung $\iota_X : (X, \|\cdot\|_{\mathcal{B}}) \to (X, \|\cdot\|_X)$. Wegen $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} \geq \|\cdot\|_X$ ist das eine stetige bijektive Abbildung zwischen zwei Banachräumen. Mit einem Korollar des Satzes der offenen Abbildung folgt, dass auch ι_X^{-1} stetig ist und damit auch die Äquivalenz der Normen.

(iii) Lt. (i) gilt $\|P_n\|_{\mathcal{B}} \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Lt. (ii) sind $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ und $\|\cdot\|_X$ äquivalente Normen, womit die Aussage unmittelbar folgt.

□

Satz 14. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis auf einem Banachraum X. Die Abbildung

$$\psi_N : X \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) : x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \mapsto a_N \tag{21}$$

ist ein stetiges lineares Funktional auf X und es gilt

$$\|b_N\|_X^{-1} \leq \|\psi_N\| \leq C_{\mathcal{B}} \|b_N\|_X^{-1} \tag{22}$$

Beweis. Setze $P_0 = 0$. Für $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|_X = \|\psi_N(x)\, b_N\|_X = |\psi_N(x)| \cdot \|b_N\|_X \tag{23}$$

und schließlich

$$\|\psi_N\|_X = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\psi(x)| = \|b_N\|_X^{-1} \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\psi(x)\, b_N\|_X \leq 2\,\|b_N\|_X^{-1} \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|_X}_{\leq\infty \text{ lt. Satz 13 (iii)}} < \infty, \tag{24}$$

Schließlich gilt noch $|\psi_N(b_N)| = 1$ und damit $\|\psi_N\|_X \cdot \|b_N\|_X \geq 1$ Insgesamt folgt $\|\psi_N\|_X \geq \|b_N\|_X^{-1}$.

□

2 Spezielle Schauderbasen auf Hilberträumen

Sei nun H ein Hilbertraum.

Bemerkung 15.

- Für eine Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachte das Funktional

$$\psi_N : H \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) : x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \mapsto a_N \tag{25}$$

  wie in Satz 14. ψ_N ist eine stetiges lineares Funktional und mit dem Satz von Riesz-Fischer existiert eine eindeutige Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\psi_n\,(x) = (x, c_n)_H \quad \forall x \in H \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{26}$$

  und damit gilt:

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n\,(x)\, b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H\, b_n \tag{27}$$

  Wir erhalten auf diese Weise also eine Verallgemeinerung der Fourierreihe bzgl. einer ONB auf dem Hilbertraum.

- Klarerweise gilt $(b_m, c_n)_H = \delta_{mn}$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

- Es folgt $\|\psi_n\|_H = \|c_n\|_H$.

Bemerkung 15 motiviert die folgende Definition:

Definition 16. Sei H ein Hilbertraum. Zwei Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Hilbertraum heißen biorthogonal, wenn

$$(c_n, d_m)_H = \delta_{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{28}$$

Satz 17 (Banach)**.** Sei H ein Hilbertraum mit einer Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) Es existiert genau eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonal sind.

(ii) Es gilt $\overline{\operatorname{span}\{c_n : n\in\mathbb{N}\}} = H$.

(iii) Jedes $x\in H$ wird durch

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H \, b_n \tag{29}$$

eindeutig bzgl. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dargestellt.

(iv) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (i) ist auch eine Schauderbasis von H.

Beweis. (i) Für eine Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich wie in Bemerkung 15 eine biorthogonale Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden. Es muss lt. Definition 16 für jedes $n_0\in\mathbb{N}$ dann $c_{n_0}\in\overline{\operatorname{span}\{b_n : n\neq n_0\}}^{\perp}$ gelten. Es gilt $\dim\overline{\operatorname{span}\{b_n : n\neq n_0\}}^{\perp} = 1$ und wegen $(b_{n_0}, c_{n_0})_H = 1$ ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch schon die einzige mögliche Folge.

(ii) Wir zeigen $\overline{\operatorname{span}\{c_n : n\in\mathbb{N}\}}^{\perp} = 0$. Für $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \in \overline{\operatorname{span}\{c_n : n\in\mathbb{N}\}}^{\perp}$ gilt sicher $(c_n, x)_H = 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Berechne dann

$$0 = (x, c_m)_H = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n, c_m\right)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (b_n, c_m) = a_n (b_m, c_m)_H = a_m \quad \forall m\in\mathbb{N} \tag{30}$$

Damit folgt aber $x = 0$. Schließlich folgt $\overline{\operatorname{span}\{c_n : n\in\mathbb{N}\}} = H$.

(iii) Mit Bemerkung 15 und (i) folgt die Aussage unmittelbar.

(iv) Lt. dem vorherigen Punkt gilt für jedes $x\in H$ die Gleichung

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H \, b_n \tag{31}$$

und diese Summe konvergiert in der Norm. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)_H$ folgt, dass für $y\in H$ auch

$$(x, y)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H (b_n, y)_H \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) \tag{32}$$

gilt. Es gilt weiters

$$(x, y)_H = \lim_{N\to\infty} \left(x, \sum_{n=1}^{N} (y, b_n)_H \, c_n\right)_H \qquad \forall x, y\in H \tag{33}$$

Betrachte weiters die Projektionen

$$Q_N : H \to \operatorname{span}\{c_n : n\leq N\} : y \mapsto \sum_{n=1}^{N} (y, b_n)_H \, c_n \tag{34}$$

Die Q_N sind sicher beschränkt, da $x \mapsto (x, b_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ sicher stetig ist und Q_N damit nur ein endliche Summe von stetigen Abbildungen ist. Mit (33) folgt dann $Q_n(y) \rightharpoonup y$ bzw. $Q_n \rightharpoonup \mathrm{id}_H$. Schwach konvergente Teilfolgen sind beschränkt (folgt aus Banach-Steinhaus), d.h für $x \in H$ gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n(y)\|_H \leq M_y$. Mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (vgl. [FANA1], Korollar 4.2.2) folgt dann, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n\|_H < M < \infty$. Mit (ii) wähle dann für ein $y \in H$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ können wegen (ii) $N_\epsilon \in N$ und d_n^ϵ mit $n \leq N_\epsilon$ derart gewählt werden, dass

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{N^\epsilon} d_n^\epsilon c_n \right\|_H < \epsilon \tag{35}$$

gilt. Weiters gilt damit

$$Q_N\left(y - \sum_{n=1}^{N^\epsilon} d_n^\epsilon c_n\right) = Q_N(y) - \sum_{n=1}^{N^\epsilon} d_n^\epsilon c_n \quad \text{für } N > N_\epsilon \tag{36}$$

und damit

$$\left\| Q_N(y) - \sum_{n=1}^{N^\epsilon} d_n^\epsilon c_n \right\|_H \leq M\epsilon \tag{37}$$

Für $N > N_\epsilon$ gilt damit

$$\|Q_N(y) - x\|_H \leq \left\| Q_N(y) - \sum_{n=1}^{N^\epsilon} d_n^\epsilon c_n \right\|_H + \left\| \sum_{n=1}^{N^\epsilon} d_n^\epsilon c_n - y \right\|_H \leq (1 + M)\,\epsilon \tag{38}$$

Damit gilt $Q_N(y) = \sum_{n=1}^{N} (y, b_n)_H c_n \to x$ bzw. $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} (y, b_n)_H c_n$. Für die Eindeutigkeit betrachte eine weitere Darstellung $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n c_n$. Dann gilt $Q_1(y) = d_1 c_1 = (y, b_1) c_1$. Weil sicher $c_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt (sonst wäre der n-te Koeffizient immer 0), folgt $d_1 = (y, b_1)$. Induktiv folgt, dann sofort $d_n = (y, b_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Bevor wir Riesz-Basen definieren noch die folgende Bemerkung:

Bemerkung 18. Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB auf einem Hilbertraum H und $A \in B(H)$ und sogar invertierbar. Für $x \in H$ gilt dann

$$A^{-1}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(A^{-1}x, \phi_n\right)_H \phi_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x, A^{*-1}\phi_n\right)_H \phi_n \tag{39}$$

und

$$x = A\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x, A^{*-1}\phi_n\right)_H \phi_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x, A^{*-1}\phi_n\right)_H A\phi_n \tag{40}$$

Setze nun $b_n := A\phi_n$ und $c_n := A^{*-1}\phi_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$(b_m, c_n)_H = \left(A\phi_m, A^{*-1}\phi_n\right)_H = \left(A\phi_m, A^{-1*}\phi_n\right)_H = \left(A^{-1}A\phi_m, \phi_n\right)_H = \delta_{mn} \tag{41}$$

damit haben wir die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die dazu biorthogonale Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)\, b_n \tag{42}$$

Wegen

$$(x, c_m)_H = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n, c_n\right)_H = a_m \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{43}$$

folgt dann die Eindeutigkeit dieser Darstellung. Damit wird jede Orthonormalbasis $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch einen Operator $A \in B(H)$ in die Schauderbasis $(A\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert.

Durch Bemerkung 18 wird die folgende Definition motiviert.

Definition 19 (Riesz-Basis)**.** Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Hilbertraum H heißt äquivalent zu einer Orthonormalbasis $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es einen invertierbaren Operator $A \in B(H)$ gibt, mit $A\phi_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine solche Schauderbasis wird auch Riesz-Basis genannt.

Bemerkung 20.
- Wie in Bemerkung 18 folgt, dass eine Riesz-Basis eine Schauderbasis ist, womit der Basisgegriff gerechtfertigt ist.
- In Definition 19 ist es äquivalent zu fordern, dass es einen Operator $\tilde{A} \in B(H)$ gibt, mit $\tilde{A}b_n = \phi_n$, wobei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis ist; wähle einfach $\tilde{A} := A^{-1}$.

Lemma 21. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis auf H.

(i) Die zu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Basis $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch eine Riesz-Basis.

(ii) Es gilt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_H \leq \|A\|_H$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_H \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|_H}$.

(iii) $\left(b_n \cdot \frac{1}{\|b_n\|_H}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch eine Riesz-Basis.

Beweis. (i) Lt. Voraussetzung existiert ein $A \in B(H)$ und eine ONB $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A\phi_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachte schließlich die Folge $(A^{*-1}\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit für $n \in \mathbb{N}$. Wie schon in (41) gilt $(b_m, A^{*-1}\phi_n) = \delta_{mn}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauderbasis ist und die zu einer Schauderbasis biorthogonale Folge lt. Satz 17 eindeutig und wieder eine Schauderbasis ist, und sicher $A^{*-1} \in B(H)$ und A^{*-1} auch invertierbar ist, folgt die Aussage unmittelbar.

(ii) Es gilt

$$\|b_n\|_H = \|A\phi_n\|_H \leq \|A\|_H \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{44}$$

und weiter

$$1 = \|\phi_n\|_H = \left\|A^{-1}b_n\right\|_H \leq \left\|A^{-1}\right\|_H \cdot \|b_n\|_H \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{45}$$

womit beide Ungleichungen gezeigt sind.

(iii) Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die auf der ONB $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Abbildung $B\phi_n = \phi_n \cdot \frac{1}{\|b_n\|_H}$; dadurch die lineare Fortsetzung B auf $\operatorname{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eindeutig definiert. Mit (ii) berechne

$$\left\|B\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n\right)\right\|_H^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \frac{1}{\|b_n\|_H} \leq \left\|A^{-1}\right\|_H^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 = \tag{46}$$

$$= \left\|A^{-1}\right\|_H^2 \cdot \left\|B\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n\right)\right\|_H^2 \tag{47}$$

Stetig fortsetzen auf H liefert schließlich $B \in B(H)$. Analog folgt, dass B invertierbar ist. Es gilt $AB\phi_n = b_n \frac{1}{\|b_n\|_H}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist $\left(b_n \cdot \frac{1}{\|b_n\|_H}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis.

□

Bemerkung 22.
- Jede Riesz-Basis ist lt. Definition eine Schauderbasis. Die Frage unter welchen Voraussetzungen eine Schauderbasis eine Riesz-Basis ist, ist nicht so einfach zu beantworten. Details dazu später.
- Riesz-Basen sind im Wesentlichen ONB auf H bzgl. einem veränderten, dieselbe Topologie erzeugenden Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_1$. Dazu der folgende Satz.

Satz 23. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Riesz-Basis.

(ii) Es gibt ein Skalarprodukt $(H,(\cdot,\cdot)_1)$ auf H, das dieselbe Topologie wie $(\cdot,\cdot)_H$ erzeugt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine ONB in $(H,(\cdot,\cdot)_1)$.

(iii) $\overline{\operatorname{span}\{b_n : n\in\mathbb{N}\}} = H$ und es existieren $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ sodass $\forall N\in\mathbb{N}$ und für jede Folge von Skalaren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$K_1\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \le \left\|\sum_{n=1}^N a_n b_n\right\|^2 \le K_2\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \tag{48}$$

(iv) $\overline{\operatorname{span}\{b_n : n\in\mathbb{N}\}} = H$, es existiert eine zu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{\operatorname{span}\{c_n : n\in\mathbb{N}\}} = H$ und es gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,b_n)_H|^2 < \infty, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,c_n)_H|^2 < \infty \tag{49}$$

Beweis.
- <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u>: Sei $A \in B(H)$ der invertierbare Operator auf H, der $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf eine ONB $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abbildet. Betrachte $(x,y)_1 := (Ax,Ay)_H$; es folgt leicht, dass $(\cdot,\cdot)_1$ ein Skalarprodukt auf H ist. Bezeichne die zugehörige Norm auf H mit $\|\cdot\|_1$. Man rechnet auch leicht nach, dass

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_H}\cdot\|x\|_H \le \|Ax\|_H = \|x\|_1 \le \|A\|_H\cdot\|x\|_H \tag{50}$$

gilt. Schließlich gilt noch

$$(b_m,b_n)_H = (Ab_m,Ab_m)_H = (\phi_m,\phi_n)_H = \delta_{mn}, \tag{51}$$

womit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB in $(H,(\cdot,\cdot)_1)$ ist.

- <u>(ii) $\Rightarrow$ (iii)</u>: Im vorherigen Schritt haben wir nachgerechnet, dass für $x\in H$ die Ungleichungskette

$$K_1\|x\|_H^2 \le \|Ax\|_H^2 \le K_2\|x\|_H^2 \tag{52}$$

für $K_1,K_2\in\mathbb{R}^+$ gilt. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Skalaren und $N\in\mathbb{N}$, dann gilt

$$K_1\sum_{n=1}^N |a_n|^2 = K_1\left\|\sum_{n=1}^N a_n\phi_n\right\|_H^2 \le \left\|A\left(\sum_{n=1}^N a_n\phi_n\right)\right\|_H^2 = \left\|\sum_{n=1}^N a_n b_n\right\|_H^2 \le \tag{53}$$

$$\le K_2\left\|\sum_{n=1}^N a_n\phi_n\right\|_H^2 = K_2\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \tag{54}$$

- <u>(iii) ⇒ (i)</u>: Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige abzählbare ONB auf H. Eine solche existiert; wende auf $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfach das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an. Definiere die Operatoren

$$A : \operatorname{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \to \operatorname{span}\{b_n : n \in \mathbb{N}\} : \sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \tag{55}$$

und dieser Operator ist sicher wohldefiniert. Betrachte weiter

$$A_1 : \operatorname{span}\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \to \operatorname{span}\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} : \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n \tag{56}$$

was per se noch nicht wohldefiniert ist, denn $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist keine Basis. Sei nun aber o.E.d.A für $x \in \operatorname{span}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ dann $x = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \tilde{a_n} b_n$ für 2 Folgen $(a_n)_{n=1}^{N}$ und $(\tilde{a_n})_{n=1}^{N}$. Wegen der Voraussetzung in (iii) gilt dann:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - \tilde{a_n}|^2 \leq K_1^{-1} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} \tilde{a_n} b_n \right\|_H^2 = 0 \tag{57}$$

und damit folgt die wohldefiniertheit von A_1 auf $\operatorname{span}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Insgesamt folgt nun

$$\left\| A\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n\right) \right\|_H^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \right\|_H^2 \leq K_2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n \right\|_H^2 \tag{58}$$

und

$$\left\| A_1\left(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right) \right\|_H^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n \right\|_H^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \leq K_1^{-1} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \right\|_H^2 \tag{59}$$

Damit sind A_1 und A dicht definierte und beschränkte Opertoren und lassen sich daher eindeutig auf $A_1, A \in B(H)$ fortsetzen. Es folgt leicht $A \circ A_1 = A_1 \circ A = \mathrm{id}_H$. Damit ist $A \in B(H)$ ein linearer invertierbarer Operator mit $A\phi_n = b_n$ und damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis.

- <u>(i) ⇒ (iv)</u>: Der erste Teil der Aussage ist trivial. Für den zweiten Teil der Aussage sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zur Riesz-Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ birorthognoale Basis. Es existiert ein $A \in B(H)$, das noch dazu invertierbar ist mit $Ab_n = \phi_n = A^{*-1}c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun gilt lt. Bemerkung 15

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H\, b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, b_n)_H\, c_n \tag{60}$$

und weiter

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H\, Ab_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H\, \phi_n \tag{61}$$

also auch

$$A^{*-1}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, b_n)_H\, A^{*-1}c_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, b_n)_H\, \phi_n \tag{62}$$

und schließlich

$$\infty > \|Ax\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, c_n)_H|^2 \text{ und } \infty > \left\|A^{*-1}x\right\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, b_n)_H|^2 \tag{63}$$

- <u>(iv) ⇒ (i)</u>: Mühsam, vgl. [GOHKREIN], Kapitel 6, Theorem 2.1

□

Definition 24. Eine Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Hilbertraum H heißt permutierbar, wenn jede Permutation der Basiselemente wieder eine Schauderbasis ergibt.

Lemma 25. (i) Abzählbare ONBs sind permutierbar.

(ii) Die zu einer Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Schauderbasis ist wieder permutierbar.

(iii) Riesz-Basen sind permutierbar.

Beweis. (i) Folgt aus Bemerkung 8.

(ii) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permutierbar und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Permutation. Betrachte die lt. Lemma 17 eindeutige biorthogonale Basis $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Klarerweise ist $\left(c_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonal zur Folge $\left(b_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und lt. Voraussetzung ist $\left(b_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Schauderbasis. Wieder mit Lemma 17 folgt, dass $\left(c_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Schauderbasis ist.

(iii) Sei $x \in H$ beliebig, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riesz-Basis, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Permutation und $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $A \in \mathcal{B}(H)$ die zugehörigen ONB und der beschränkte, invertierbare, lineare Operator, mit $A\phi_n = b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gibt dann eine eindeutige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Skalaren, sodass

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = A^{-1}A \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = A^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n A b_n = A^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \phi_n = \tag{64}$$

$$= A^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)} \phi_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)} A^{-1} \phi_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)} b_{\sigma(n)}, \tag{65}$$

gilt, wobei das vierte Gleichheitszeichen aus der Permutierbarkeit von ONBs folgt. Die Eindeutigkeit dieser Darstellung folgt wie in Satz 17, (iii).

□

Bemerkung 26. In Lemma 25 haben wir für einen Hilbertraum H mit der permutierbaren Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ihre biorthognoale Basis $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für eine Permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gezeigt, dass die zu $\left(b_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Basis $\left(c_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Da lt. Satz 17 $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H \, b_n$ und diese Darstellung eindeutig ist, folgt auch $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x, c_{\sigma(n)}\right)_H b_{\sigma(n)}$. Damit ist die Koeffizientenfolge einer permutierten Schauderbasis gleich der permutierten Koeffizientenfolge.

Wir zitieren 2 Lemmas.

Lemma 27. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum X (nicht unbedingt eine Schauderbasis) und sei

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{n\in A} b_n \right\|_X : |A| < \infty \right\} < \infty, \tag{66}$$

dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

(i) Es gilt

$$\sup_{N;|\epsilon_n|\leq 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n b_n \right\|_X < \infty \tag{67}$$

(ii) und

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_X^2 < \infty \tag{68}$$

Beweis. Siehe [GOHKREIN], Kapitel 6, Lemma 2.1, Lemma 2.2 □

Definition 28. Eine Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Hilbertraum H heißt fast normiert, wenn

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_H > 0 \text{ und } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_H < \infty \tag{69}$$

Lemma 29. (i) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zur fast normierten Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Hilbertraum biorthogonale Basis, dann ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast normiert.

(ii) Riesz-Basen sind fast normiert.

Beweis. (i) Betrachte die Abbildung ψ_N aus Bemerkung 18. Mit dem 2.Teil der Bemerkung und Satz 14 folgt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\|_H = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_n\|_H \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\|b_n\|_H} = \frac{1}{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_H} > 0 \tag{70}$$

und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\|_H = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_n\|_H \leq C_{\mathcal{B}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\|b_n\|_H} = C_{\mathcal{B}} \frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_H} < \infty \tag{71}$$

für eine von der Basis abhängigen Konstante $C_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Bereits in Lemma 21 (ii) gezeigt.

□

Satz 30. Eine Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Hilbertraum H ist eine Riesz-Basis, genau dann wenn sie permutierbar und fast normiert ist.

Beweis.
- $\underline{\Longrightarrow}$: Bereits in Lemma 25 (ii) bzw. Lemma 29 (ii) gezeigt.
- $\underline{\Longleftarrow}$: Ein beliebiges $x \in H$ und eine beliebige Permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt lt. Bemerkung 15 und weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lt. Voraussetzung permutierbar ist, dann

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H \, b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x, c_{\sigma(n)}\right)_H b_{\sigma(n)} \tag{72}$$

wobei $(c_n)_H$ die zu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ biorthogonale Schauderbasis ist. Für eine beliebige Permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und für ein $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, c_n)_H \, b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x, c_{\sigma(n)}\right)_H b_{\sigma(n)} \in H$ gilt wegen Satz 13 dann

$$\infty > \|x\|_X \geq C \|x\|_{\mathcal{B}} \geq \left\| \sum_{n\in A} (x, c_n)_H \, b_n \right\|_{\mathcal{B}} \tag{73}$$

denn für $|A| < \infty$ ordne die $n \in A$ einfach nach vorne. Damit ist aber auch die Voraussetzung von Lemma 27 erfüllt und es gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, c_n)_H|^2 \|b_n\|_H^2 < \infty \tag{74}$$

und analog

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, b_n)_H|^2 \|c_n\|_H^2 < \infty \tag{75}$$

Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lt. Lemma 29 (ii) fast normiert sind, folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, c_n)_H|^2 < \infty \text{ und } \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, b_n)_H|^2 < \infty \tag{76}$$

die Aussage folgt nun mit Satz 23. □

Beispiel 31. Es ist gar nicht so leicht eine Schauderbasis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, die keine Rieszbasis ist. Betrachte etwa das Beispiel von K.I. Babenko.

$$\left(\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) |x|^\alpha \exp(i\pi n x)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \quad -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}\ ;\ \alpha \neq 0 \tag{77}$$

Dies ist eine Basis auf $L^2(-1, 1)$, aber keine Riesz-Basis.

3 Literatur

[ANA2] **M. Kaltenbäck**, Analysis 2 für Technische Mathematik, Vorlesungsskript an der TU Wien, 2012

[BASPTH] **M. Fabian**, **P. Habala**, **P. Hajek**, **V. Montesinos**, **V. Zizler**, Banach Space Theory-The basis for linear and non-linear Analysis, Springer , New York, 2010

[FANA1] **H. Woracek** , **M. Kaltenbäck** und **M. Blümlinger**, Funktionalanalysis, 8.Auflage, Vorlesungsskript an der TU Wien, April 2012

[GOHKREIN] **I.C. Gohberg**, **M.G. Krein**, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, American Mathematical Society, Rhode Island, 1969

[HAV] **H. Havlicek**, Lineare Algebra für Technische Mathematiker, Heldermann Verlag, Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 16, Berlin 2006

[WIKI1] http://de.wikipedia.org/wiki/Schauderbasis ; Zugriff am 3.12.2012