Ungleichung von Hausdorff-Young

Seminararbeit aus Analysis

Fabian Mußnig

Notationen

- Für normierte Räume X und Y bezeichne $\mathcal{B}(X, Y)$ die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen $T : X \to Y$.
- Sei X ein topologischer Raum. Wir bezeichnen mit X' den topologischen Dualraum von X - für ein normiertes X ist das gerade $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.
- Ist X mit zwei Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ versehen, so bezeichnen wir die dazugehörigen Dualräume mit $X'_{\|\cdot\|'_0}$ und $X'_{\|\cdot\|'_1}$, welche jeweils mit den Normen $\|\cdot\|'_0$ und $\|\cdot\|'_1$ versehen sind. Ist es zudem notwendig eine Unterscheidung bei X selbst zu treffen, so verwenden wir $X_{\|\cdot\|_0}$ bzw. $X_{\|\cdot\|_1}$.
- Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, sei $\Re(z) = x$ der Realteil und $\Im(z) = y$ der Imaginärteil von z.
- Für ein $x \in X$ und ein $x' \in X'$ verwenden wir $\langle x, x' \rangle := x'(x)$.

1 Holomorphe Funktionen

Holomorphe Funktionen sind als Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ bekannt. Wir wollen diesen Begriff nun auf Funktionen, die Werte in allgemeinen normierten Räumen annehmen, ausdehnen.

Definition. Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, X ein normierter Raum und $F : \Omega \to X$. Wir sagen F ist holomorph auf Ω, genau dann, wenn für jedes $x' \in X'$ die Funktion $h_{x'}(z) := \langle F(z), x' \rangle$ holomorph (im klassischen Sinn) auf Ω ist.

Man beachte, dass in diesem Sinne definierte holomorphe Funktionen insbesondere stetig sind. Oft wird diese Definition auch als schwache Holomorphie bezeichnet und eine Definition analog zur komplexen Differenzierbarkeit wird für die Holomorphie verwendet. Man kann jedoch zeigen, dass schwach holomorphe Funktionen bereits holomorph sind (vgl. [2], S. 2-4).

Für klassisch holomorphe Funktionen gilt, dass sie auch analytisch sind, d.h. sie lassen sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln. Dieses Ergebnis wollen wir für Banach-Räume auch auf den neu definierten Holomorphie-Begriff ausdehnen. Zuerst benötigen wir

Cauchy'sche Integralformel. *Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, X ein Banach Raum und $F : \Omega \to X$ holomorph. Sind $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U(z_0, r)} \subset \Omega$, dann gilt*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)} \, d\zeta \quad \forall z \in U(z_0, r),$$

wobei das Integral als Riemann'sches Kurvenintegral zu verstehen ist.

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein $z \in U(z_0, r)$, sodass die Gleichung nicht gilt. Da X' punktetrennend auf X operiert, gibt es also ein $x' \in X'$, sodass

$$x' \circ F(z) \neq x' \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)} \, d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} \frac{x' \circ F(\zeta)}{(\zeta - z)} \, d\zeta$$

Da $x' \circ F$ jedoch eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist, muss Gleichheit gelten. ■

Bemerkung. Das Kurvenintegral lässt sich analog wie eine Riemannsumme als Reihe definieren. Man beachte, dass es jedoch bei nichtstetigen Funktionen zu Problemen kommen kann. Ebenso kann es im Fall eines nicht vollständigen Raumes vorkommen, dass der Grenzwert der Folge der Partialsummen nicht mehr im Raum liegen muss. (vgl. [3], S. 476 ff.)

Für Ω, X, z_0 und r wie in obigem Lemma, können wir nun $F(z)$ als Potenzreihe anschreiben:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} F(\zeta) \cdot \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U(z_0,r)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \cdot (z - z_0)^n \quad \forall z \in U(z_0, r)$$

Man bemerke, dass in der letzten Gleichheit die Vertauschung von Summation und Integration erlaubt ist, da die geometrische Reihe auf $U(z_0, r)$ gleichmäßig konvergiert! Offensichtlich sind umgekehrt Abbildungen mit Werten in normierten Räumen, die sich als Potenzreihe darstellen lassen, holomorph in oben definiertem Sinn.

Lemma. *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$, X ein Banach-Raum und $F : \Omega \to X$, sowie $G : \Omega \to X'$ holomorph. Dann ist auch die Funktion $h(z) := \langle F(z), G(z) \rangle$ holomorph als Abbildung von Ω nach $\mathbb{C}$.*

Beweis. Da F und G holomorph sind, gilt auf einer Umgebung von $z_0 \in \Omega$, dass $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, sowie $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ (X' ist ebenso ein Banach-Raum). Somit folgt

$$h(z) = \langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n, \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k \rangle (z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \langle a_k, b_{n-k} \rangle (z-z_0)^{n-k} (z-z_0)^k \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \langle a_k, b_{n-k} \rangle \right) (z-z_0)^n$$

Die Umordnung der Doppelreihe ist erlaubt, da die Potenzreihen absolut konvergieren.

■

2 Interpolation von Normen und der Satz von Riesz-Thorin

Mit Hilfe des neu geschaffenen Holomorphie-Begriffes werden wir nun Normen interpolieren. Das nachfolgende Kapitel wurde dabei größtenteils „Interpolation of Norms and of Linear Operators“ aus [4], S. 105-109, nachempfunden.

Definition.

- Für einen linearen Raum X, der mit zwei Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ versehen ist, und $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{X}$ den Raum aller X-wertigen Funktionen, die auf einer Umgebung von Ω bezüglich $\|\cdot\|_0$, als auch $\|\cdot\|_1$, holomorph und beschränkt sind. Offensichtlich ist $\mathcal{X}$ ein linearer-Raum.

- Wir definieren eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to [0, \infty) : F \mapsto \|F\|$, wobei

$$\|F\| := \sup_{y \in \mathbb{R}} \{\|F(iy)\|_0, \|F(1+iy)\|_1\}.$$

  Offensichtlich definiert $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{X}$, denn es gilt

  - Ist $0 \equiv F \in \mathcal{X}$, so gilt offensichtlich, dass $\|F\| = 0$. Sei umgekehrt $\|F\| = 0$, so folgt insbesondere, dass $\langle F(z), x' \rangle = 0$, für alle $x' \in X'_{\|\cdot\|'_1}$, $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 1\}$. Da diese Abbildungen holomorph auf ihrem Definitionsbereich sind, folgt aus dem Identitätssatz, dass es sich bereits um Nullabbildungen handelt, also $\langle F(z), x' \rangle = 0, \forall x' \in X'_{\|\cdot\|'_1}, \forall z \in \Omega$. Da $X'_{\|\cdot\|'_1}$ punktetrennend auf X operiert, muss aber auch F auf das Nullelement in X abbilden. Somit gilt $F \equiv 0 \in \mathcal{X}$.
  - Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $F \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\|\lambda F\| = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{\|\lambda F(iy)\|_0, \|\lambda F(1+iy)\|_1\}$$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}} \{|\lambda| \cdot \|F(iy)\|_0, |\lambda| \cdot \|F(1+iy)\|_1\} = |\lambda| \cdot \|F\|$$

– Für $F, G \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\begin{aligned}\|F+G\| &= \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\|F(iy)+G(iy)\|_0, \|F(1+iy)+G(1+iy)\|_1\}\\ &\le \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\|F(iy)\|_0+\|G(iy)\|_0, \|F(1+iy)\|_1+\|G(1+iy)\|_1\}\\ &\le \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\|F(iy)\|_0, \|F(1+iy)\|_1\} + \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\|G(iy)\|_0, \|G(1+iy)\|_1\}\\ &= \|F\|+\|G\|\end{aligned}$$

- Für $0 < \alpha < 1$ sei $\mathcal{X}_\alpha := \{F \in \mathcal{X} : F(\alpha) = 0\}$ - offensichtlich ist $\mathcal{X}_\alpha$ ein linearer Unterraum. Wir sagen, dass $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ *konsistent* sind, wenn $\mathcal{X}_\alpha$ abgeschlossen in $\mathcal{X}$ ist, für alle $\alpha \in (0,1)$.

Das folgende Lemma gibt uns nun ein hinreichendes Kriterium für die Konsistenz.

Lemma. *Existiert für jedes $x \in X$ ein stetiges (in Hinblick auf sowohl $\|\cdot\|_0$, als auch $\|\cdot\|_1$), lineares Funktional x', sodass $\langle x, x'\rangle \neq 0$, so sind $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ konsistent.*

Beweis. Sei $F_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ und gelte $F_n \to F$ auf $\mathcal{X}$. Für ein beliebiges lineares, stetiges Funktional $x' \in X'_{\|\cdot\|_0'} \cap X'_{\|\cdot\|_1'}$ sind die Funktionen $\langle F_n(z), x'\rangle$ beschränkt und holomorph auf Ω. Zusätzlich konvergiert $\langle F_n(z), x'\rangle$ gleichmäßig auf $\partial\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0 \vee \Re(z) = 1\}$, wie man aus der Definition der Norm auf $\mathcal{X}$ sieht.
Nach dem Satz von Phragmén-Lindelöf nimmt $\langle F_n(z) - F(z), x'\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sein betragsmäßiges Supremum in Ω aber genau auf $\partial\Omega$ an. Somit folgt also gleichmäßgie Konvergenz auf ganz Ω. Insbesondere gilt für $0 < \alpha < 1$, dass

$$\langle F(\alpha), x'\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle F_n(\alpha), x'\rangle$$

Sei nun also zusätzlich vorausgesetzt, dass die F_n aus $\mathcal{X}_\alpha$ sind, so folgt

$$\langle F(\alpha), x'\rangle = 0$$

Da x' jedoch beliebig war, kann das nur bedeuten, dass $F(\alpha) = 0$ und somit $F \in \mathcal{X}_\alpha$, womit $\mathcal{X}_\alpha$ abgeschlossen ist. ■

Bemerkung. Die Bedingung $\langle x, x'\rangle \neq 0$ im vorangegangenen Lemma bedeutet gerade, dass $X'_{\|\cdot\|_0'} \cap X'_{\|\cdot\|_1'}$ punktetrennend auf X operiert.

Für konsistente Normen und $0 < \alpha < 1$ können wir den Faktorraum $\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha$ betrachten. Da $\mathcal{X}_\alpha$ abgeschlossen ist, erhalten wir eine Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha} := \inf_{T\in\mathcal{X}_\alpha}\|\cdot + T\|_{\mathcal{X}}$ auf $\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha$. Betrachten wir nun die Abbildung

$$\iota : \begin{cases}\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha \to X\\ F \mapsto F(\alpha)\end{cases}$$

Offensichtlich ist ι linear, denn es gilt:

$$\iota(tF + G) = tF(\alpha) + G(\alpha) = t\iota(F) + \iota(G), \quad F, G \in \mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha,\ t \in \mathbb{R}.$$

Zudem ist ι injektiv, denn aus der Definition von $\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha$ folgt, dass

$$\iota(F) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow F \equiv 0 \in \mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha$$

Für den Beweis der Surjektivität sei $x \in X$ fest und $0 \not\equiv F \in \mathcal{X}$ beliebig. Wir setzen

$$G(z) := F(z) - F(\alpha) + x.$$

Offensichtlich gilt für ein beliebiges stetiges (bzgl. $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$) lineares Funktional x', dass

$$\langle G(z), x'\rangle = \langle F(z), x'\rangle + \underbrace{\langle x - F(\alpha), x'\rangle}_{=const.}$$

und somit holomorph ist. Also ist G ein Element aus $\mathcal{X}$. Betrachten wir nun die Projektion von G auf $\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha$, so haben wir ein passendes Urbild von x unter ι.
Insgesamt erhalten wir, dass ι ein Isomorphismus ist. Somit können wir auf X eine neue Norm $\|\cdot\|_\alpha$ mittels $\|F(\alpha)\|_\alpha := \|F\|_{\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha}$, $F \in \mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha$ definieren und bezeichnen $\|\cdot\|_\alpha$ als eine *interpolierende* Norm. Insbesondere folgt für ein $x \in X$ und ein $F \in \mathcal{X}$ mit $F(\alpha) = x$, dass $\|x\|_\alpha \leq \|F\|$.

Satz. *Seien X und Y jeweils mit zwei konsistenten Normen $\|\cdot\|_0^X$, $\|\cdot\|_1^X$ bzw. $\|\cdot\|_0^Y$, $\|\cdot\|_1^Y$ versehen. Sei S eine lineare beschränkte Abbildung von X nach Y (bezüglich beiden Normpaaren), also*

$$S \in \mathcal{B}(X_{\|\cdot\|_0^X}, Y_{\|\cdot\|_0^Y}) \cap \mathcal{B}(X_{\|\cdot\|_1^X}, Y_{\|\cdot\|_1^Y}).$$

Dann gilt $S \in \mathcal{B}(X_{\|\cdot\|_\alpha^X}, Y_{\|\cdot\|_\alpha^Y})$ für $0 < \alpha < 1$. Anders ausgedrückt

$$\mathcal{B}(X_{\|\cdot\|_0^X}, Y_{\|\cdot\|_0^Y}) \cap \mathcal{B}(X_{\|\cdot\|_1^X}, Y_{\|\cdot\|_1^Y}) = \bigcap_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathcal{B}(X_{\|\cdot\|_\alpha^X}, Y_{\|\cdot\|_\alpha^Y}).$$

Zudem gilt für die entsprechenden Abbildungsnormen

$$\|S\|_\alpha \leq \|S\|_0^{1-\alpha}\|S\|_1^\alpha.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathcal{Y}$ den Raum der Y-wertigen holomorphen Funktionen. Wir wollen nun die Abbildung $S : X \to Y$ ausdehnen auf $S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $F \mapsto SF$, wobei $SF(z) = S(F(z)), z \in \Omega$. Dazu müssen wir zeigen, dass SF auch holomorph ist.
Als beschränkte lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen hat S eine konjungierte Abbildung $S' \in \mathcal{B}(Y', X')$, wobei die topologischen Dualräume hierbei natürlich von den jeweils betrachteten Normen abhängen. Somit gilt also für ein $y' \in Y'$

$$\langle SF(z), y'\rangle = \langle F(z), \underbrace{S'(y')}_{=x' \in X'}\rangle = \langle F(z), x'\rangle$$

Da der rechte Ausdruck per Definition von F holomorph ist, ist also auch SF holomorph und somit $SF \in \mathcal{Y}$ (die Beschränktheit folgt dabei elementar aus der Beschränktheit von S).
Sei nun $\alpha \in (0,1)$ fest und $x \in X$ mit $\|x\|_\alpha = 1$. Dann existiert also ein $F \in \mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha$, sodass $F(\alpha) = x$ und

$$\|F\|_{\mathcal{X}/\mathcal{X}_\alpha} = 1 = \inf_{T \in \mathcal{X}_\alpha} \|F + T\|_{\mathcal{X}}.$$

Somit gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $F \in \mathcal{X}$ mit $F(\alpha) = x$ und $\|F\|_{\mathcal{X}} < 1 + \varepsilon$. Setzen wir nun $G(z) := e^{a(z-\alpha)}F(z)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $e^a = \|S\|_0 \cdot \|S\|_1^{-1}$, so gilt $G(\alpha) = x$ und somit

$$\begin{aligned}
\|Sx\|_\alpha^Y = \|SG(\alpha)\|_\alpha^Y &\leq \|SG\|_{\mathcal{Y}} \\
= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{\|e^{a(it-\alpha)}SF(it)\|_0^Y, \|e^{a(1+it-\alpha)}SF(1+it)\|_1^Y\} \\
= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{e^{-a\alpha}\|SF(it)\|_0^Y, e^{a(1-\alpha)}\|SF(1+it)\|_1^Y\} \\
\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \{e^{-a\alpha}\|S\|_0 \cdot \|F(it)\|_0^X, e^{a(1-\alpha)}\|S\|_1 \cdot \|F(1+it)\|_1^X\} \\
\leq \max\{e^{-a\alpha}\|S\|_0, e^{a(1-\alpha)}\|S\|_1\} \cdot \|F\|_{\mathcal{X}} \\
< \max\{e^{-a\alpha}\|S\|_0, e^{a(1-\alpha)}\|S\|_1\} \cdot (1+\varepsilon) \\
= \|S\|_0^{1-\alpha}\|S\|_1^\alpha \cdot (1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Ein wichtiges Beispiel für interpolierende Normen liefern uns die L^p-Räume. Seien $(\Psi, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ und X ein Teilraum von $L^{p_0} \cap L^{p_1}$. Wir wollen nun zeigen, dass die somit auf X induzierten Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ konsistent sind. Nach obigem Lemma müssen wir dazu nur nachweisen, dass der Schnitt der jeweiligen Dualräume punktetrennend ist. Für ein $f \in X,\ f \neq 0$ wählen wir ein $g \in L^1 \cap L^\infty \subseteq L^q,\ 1 \leq q \leq \infty$ mit der Eigenschaft, dass $fg > 0$, wenn $|f| > 0$. Beispielsweise erfüllt für $f = |f|e^{i\varphi}$ die Funktion $g := \min(|f|^{p_0}, 1)e^{-i\varphi}$ diese Ansprüche. Es folgt $\langle f, g\rangle = \int fg\, d\mu > 0$, womit die Normen konsistent sind.

Satz. *Sei $(\Psi, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $X = L^{p_0} \cap L^{p_1}$ mit $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$,$p_0 \neq p_1$. Für $j \in \{0,1\}$ bezeichne $\|\cdot\|_j$ die von L^{p_j} induzierte Norm und $\|\cdot\|_\alpha$ die dazugehörigen interpolierenden Normen. Dann stimmt $\|\cdot\|_\alpha$ mit der von L^{p_α} auf X indzuierten Norm überein, wobei*

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{(1-\alpha)}{p_0}$$

Beweis. Es reicht die Gleichheit der Normen auf dem Raum $\mathcal{T}$ der endlichen integrierbaren Treppenfunktionen zu zeigen. Dann gibt es nämlich einen isometrischen Isomorphismus von $(\mathcal{T}, \|\cdot\|_{L^{p_\alpha}})$ nach $(\mathcal{T}, \|\cdot\|_\alpha)$. Vervollständigen wir die beiden Räume, so existiert eine eindeutige isometrische Fortsetzung der Abbildung. Die Vervollständigung

des Definitionsbereiches ist aber genau $L^{p_\alpha} \supseteq X$, womit die Normen also auch auf X übereinstimmen. Zudem nehmen wir o.B.d.A. an, dass $p_0 < p_1$ und zeigen zunächst $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_{L^{p_\alpha}}$:
Sei $f \in \mathcal{T} \subseteq X$ und $\|f\|_{L^{p_\alpha}} \leq 1$. Wir wählen $F(z) = |f|^{a(z-\alpha)+1} e^{i\varphi}$, wobei $f = |f| e^{i\varphi}$ und

$$a = \frac{p_0 - p_1}{p_0 \alpha + p_1(1-\alpha)} \qquad \left(= \frac{-1}{1-\alpha} \text{ für } p_1 = \infty \right)$$

Offensichtlich ist $F \in \mathcal{X}$ und es gilt $F(\alpha) = f$. Somit folgt nach der Definition von $\|\cdot\|_\alpha$, dass $\|f\|_\alpha \leq \|F\|$.
Aus $|F(iy)| = |f|^{1-a\alpha} = |f|^{\frac{p_\alpha}{p_0}}$ folgt nun

$$\|F(iy)\|_0 = \left(\int |f|^{p_\alpha} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\underbrace{\left(\int |f|^{p_\alpha} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_\alpha}}}_{\leq 1} \right)^{\frac{p_\alpha}{p_0}} \leq 1.$$

Genauso sieht man $\|F(1+iy)\|_1 \leq 1$ für $p_1 < \infty$.
Für $p_1 = \infty$ folgt das ganz einfach aus der Definition von F. Insgesamt gilt also

$$\|f\|_\alpha \leq \|F\| \leq 1.$$

Wegen der absoluten Homogenität der Normen ($\|\beta \cdot x\| = |\beta| \cdot \|x\|$) bekommen wir nun $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_{L^{p_\alpha}}$.

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, benötigen wir nun die konjugierten Exponenten. Für p_0 und p_1 notieren wir dazu einfach q_0 und q_1. Nach der Definition von p_α ergibt sich

$$\frac{1}{q_\alpha} = \frac{\alpha}{q_1} + \frac{1-\alpha}{q_0} \qquad \left(= \frac{\alpha}{q_1} \text{ für } q_0 = \infty \right)$$

Zudem setzen wir nun $X' := L^{q_0} \cap L^{q_1} \subseteq L^{q_\alpha}$ und verwenden $\mathcal{X}'$ für den entsprechenden Raum an holomorphen Funktionen. Nun gilt, dass die Menge aller endlichen integrierbaren Treppenfunktionen einen Untervektorraum aller L^p-Räume darstellt und für $p < \infty$ sogar dicht ist. Als eine Obermenge dieser Treppenfunktionen liegt X' somit dicht in L^{q_α}.
Sei nun also $f \in \mathcal{T} \subseteq X$ beliebig mit $\|f\|_{L^{p_\alpha}} > 1$. Da X' dicht in L^{q_α} liegt, existiert ein $g \in X'$ mit $\|g\|_{L^{p_\alpha}} \leq 1$ und $\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu > 1$. Entsprechend muss es ein $G \in \mathcal{X}'$ geben mit $G(\alpha) = g$. Wie im ersten Teil des Beweises folgt, dass $\|G\| \leq 1$.
Sei nun $F \in \mathcal{X}$ beliebig, jedoch so, dass $F(\alpha) = f$. Wir betrachten nun die Funktion $h(z) = \int F(z)G(z) \, d\mu$. Diese ist beschränkt und holomorph auf Ω (siehe Kapitel 1 - man betrachte hierzu $F(z)$ als Element des Banachraumes L^{p_0} und $G(z)$ als Element des Banachraumes L^{q_0}). Wie aus der Definition von F und G ersichtlich ist, gilt $h(\alpha) > 1$. Aus dem Satz von Phragmén-Lindelöf folgt nun, dass auch $|h(z)| > 1$ für ein $z \in \partial\Omega$. Mithilfe der Hölder-Ungleichung erhält man $1 < |h(z)| \leq \|F\| \|G\| \leq \|F\|$ und insbesondere, dass

$\|F\| > 1$. Da aber $F \in \mathcal{X}$ mit $F(\alpha) = f$ beliebig war, folgt bereits, dass $\|f\|_\alpha \geq 1$. Daraus folgt $\|\cdot\|_\alpha \geq \|\cdot\|_{L^{p_\alpha}}$ und somit insgesamt

$$\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_{L^{p_\alpha}}.$$

■

Als Korollar der letzten beiden Sätze erhalten wir:

Satz von Riesz-Thorin. *Seien (Ψ, μ) und (Ξ, ν) Maßräume, $X = L^{p_0}(d\mu) \cap L^{p_1}(d\mu)$, $Y = L^{p'_0}(d\nu) \cap L^{p'_1}(d\nu)$ und S eine lineare Abbildung von X nach Y. Sei vorausgesetzt, dass S stetig ist als $S : X_{\|\cdot\|_{L^{p_j}}} \to Y_{\|\cdot\|_{L^{p'_j}}}$, $j \in \{0, 1\}$. Dann sind auch die Abbildungen*

$$S : X_{\|\cdot\|_{L^{p_\alpha}}} \to Y_{\|\cdot\|_{L^{p'_\alpha}}}$$

stetig, wobei p_α und p'_α wie im vorherigen Satz definiert sind. Für die entsprechenden Abbildungsnormen gilt zudem

$$\|S\|_\alpha \leq \|S\|_0^{1-\alpha} \|S\|_1^\alpha.$$

Bemerkung. Betrachtet man nur die Aussage des Satzes von Riesz-Thorin, so vermutet man vielleicht nicht, dass der/ein Beweis holomorphe Funktionen benötigt. Man kann den Satz in der Tat auch mit erheblich weniger Aufwand beweisen - ohne Theorie über holomorphe Funktionen auf allgemein normierten Räumen und Sätze über die Interpolation von Normen (vgl. [1], S. 5 ff.).

3 Ungleichungen von Hausdorff-Young

Mit dem im letzten Kapitel bewiesenen Satz von Riesz-Thorin können wir nun ganz einfach die Ungleichung von Hausdorff-Young beweisen.

Ungleichung von Hausdorff-Young. *Sei $1 \leq p \leq 2$ und q der entsprechende konjugierte Exponent. Ist $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $\hat{f}$ die Fouriertransfomierte von f, dann gilt*

$$\left(\sum |\hat{f}(n)^q|\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{L^p}$$

Beweis. Die Abbildung

$$\mathcal{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{T}) \to L^\infty(\mathbb{Z}) = \ell^\infty \\ f \mapsto \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \end{cases}$$

ist beschränkt mit Abbildungsnorm 1, wobei wir $\mathbb{Z}$ mit dem Zählmaß versehen. Fasst man $\mathcal{F}$ als Abbildung von $L^2(\mathbb{T})$ nach $L^2(\mathbb{Z}) = \ell^2$ auf, so bekommt man sogar eine Isometrie (Parsevalgleichung).
Es gilt also:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty, \quad \|\mathcal{F}\| = 1$$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2, \quad \|\mathcal{F}\| = 1$$

Setzt man nun $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_0' = \infty$, $p_1' = 2$, so folgt aus dem Satz von Riesz-Thorin

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{T}) \to \ell^q, \quad \|\mathcal{F}\| \leq 1$$

■

Alternativ erhält man auch folgende Version der Ungleichung:

Ungleichung von Hausdorff-Young. *Sei $1 \leq p \leq 2$ und q der entsprechende konjugierte Exponent. Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}$ die Fouriertransfomierte von f, dann gilt $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\|\hat{f}\|_{L^q} \leq (2\pi)^{\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p}$$

Beweis. Für die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|\hat{f}(\zeta)| = |\int f(x) e^{-i(x,\zeta)} dx| \leq \int |f(x)|.$$

Zudem folgt aus der Parsevalgleichung für $L^2(\mathbb{R}^n)$-Funktionen

$$\int |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta = (2\pi)^n \int |f(x)|^2 dx.$$

Somit ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ein Operator auf folgenden Räumen:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|\mathcal{F}\| = 1$$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad \|\mathcal{F}\| = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

Aus dem Satz von Riesz-Thorin folgt nun, dass

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n),$$

wobei

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{1} + \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2}$$

Somit gilt für die Abbildungsnorm

$$\|\mathcal{F}\| \leq 1^{1-\alpha}((2\pi)^{\frac{n}{2}})^\alpha = (2\pi)^{\frac{n}{q}}$$

■

4 Satz von Phragmén-Lindelöf

Für holomorphe Funktionen auf einem beschränkten Gebiet G gilt bekanntlich das Maximumprinzip. Das bedeutet, dass die Funktion ihr betragsmäßiges Maximum nur am Rand von G annimmt oder andernfalls konstant auf G ist. Mithilfe der Sätze von Phragmén-Lindelöf kann man das schwache Maximumprinzip auch auf unbeschränkte Gebiete ausdehnen. Insbesondere benötigen wir im Kapitel über die Interpolation von Normen die nachfolgende Version - der Beweis dafür wurde aus [5], S. 257 f., übernommen.

Satz von Phragmén-Lindelöf. *Seien* $\Omega = \{x + iy : a < x < b\}$, $\overline{\Omega} = \{x + iy : a \leq x \leq b\}$ *und* $f : O \supseteq \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *eine Funktion.*
Ist f *stetig auf* $\overline{\Omega}$ *und holomorph auf* Ω *und gilt* $|f(z)| < B$ *für alle* $z \in \Omega$ *und ein* $B < \infty$*, so folgt*

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \quad (a < x < b),$$

wobei $M(x) = \sup\{|f(x + iy)| : -\infty < y < \infty\}$ *für* $a \leq x \leq b$*. Insbesondere gilt also*

$$|f| \leq \max(M(a), M(b)).$$

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass $M(a) = M(b) = 1$. In diesem Fall müssen wir nur zeigen, dass $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$.
Wir definieren für jedes $\varepsilon > 0$ eine Hilfsfunktion

$$h_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon(z - a)} \quad (z \in \overline{\Omega})$$

Offensichtlich gilt $\Re(1 + \varepsilon(z - a)) = 1 + \varepsilon(x - a) \geq 1$ auf $\overline{\Omega}$, wodurch

$$|h_\varepsilon| = \frac{1}{|1 + \varepsilon(z - a)|} \leq 1$$

Daraus folgt

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad (z \in \partial\Omega)$$

Außerdem gilt $|1 + \varepsilon(z - a)| \geq |\Im(1 + \varepsilon(z - a))| = \varepsilon|y|$ und somit

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \frac{B}{\varepsilon|y|} \quad (z \in \overline{\Omega}) \tag{1}$$

Schneiden wir nun $\overline{\Omega}$ an den Linien $y = \pm\frac{B}{\varepsilon}$ ab, so erhalten wir ein Rechteck R. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt, dass $|fh_\varepsilon| \leq 1$ auf ∂R. Aus dem Maximumsprinzip folgt nun aber bereits, dass $|fh_\varepsilon| \leq 1$ auf R. Jedoch zeigt 1, dass sogar $|fh_\varepsilon| \leq 1$ auf ganz $\overline{\Omega}$. Damit erhalten wir also, dass $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$ und alle $\varepsilon > 0$. Halten wir nun z fest und lassen ε gegen 0 gehen, so bekommen wir

$$f(z) \leq 1.$$

Für den allgemeinen Fall setzen wir

$$g(z) = M(a)^{(b-z)/(b-a)} M(b)^{(z-a)/(b-a)},$$

wobei für $M > 0$ und komplexes w, M^w definiert ist, als

$$M^w = e^{w \log(M)}.$$

Da $\log(M)$ reell ist, folgt, dass g holomorph ist, keine Nullstellen hat und $\frac{1}{g}$ auf $\overline{\Omega}$ beschränkt ist. Zudem gilt

$$|g(a+iy)| = M(a) \quad |g(b+iy)| = M(b),$$

womit $\frac{f}{g}$ die Voraussetzungen vom ersten Fall erfüllt. Es folgt also $|\frac{f}{g}| \leq 1$ auf Ω und somit

$$|f(z)| \leq |g| = \Big(M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}\Big)^{\frac{1}{b-a}} \quad z \in \Omega,$$

was äquivalent ist zu

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \quad (a < x < b).$$

■

Literaturverzeichnis

[1] *Vorlesung über Funktionenräume*, Universität Bonn - Abteilung für Angewandte Analysis, Webdokument: `http://www.iam.uni-bonn.de/AngewandteAnalysis/skripte/Funktionenr.pdf`, zuletzt abgerufen am 3. Dezember 2011.

[2] Moritz Gerlach. *Vektorwertige holomorphe Funktionen und der Satz von Vitali*, Universität Ulm, 2006, Webdokument: `http://www.uni-ulm.de/~s_mgerla/vitali.pdf`, zuletzt abgerufen am 3. Dezember 2011.

[3] Harro Heuser. *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung.* Vieweg +Teubner, 4. Auflage, 2006.

[4] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis.* Cambridge University Press, third corrected edition, 2002.

[5] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, third edition, 1987.