Seminararbeit

# Der Riesz-Dunford'sche Funktionalkalkül

im Rahmen des Seminars zu Funktionalanalysis
im Wintersemester 2009/2010

Christoph Neuner

9. Februar 2010

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Ziel und Motivation

Sei $f : \Delta \to \mathbb{C}$, mit $\Delta \subseteq \mathbb{C}$, eine holomorphe Funktion und ein Element $a$ einer komplexen Banachalgebra mit Eins gegeben. Es stellt sich die Frage, wie der Ausdruck $f(a)$, also die "Erweiterung" von $f$ von einem komplex- auf ein banachraumwertiges Argument, vernünftigerweise erklärt werden kann. Eine Antwort liefert der in dieser Arbeit vorgestellte Funktionalkalkül. Dieser firmiert in der Literatur wahlweise unter Funktionalkalkül von F. Riesz (dem Schöpfer) und/oder Dunford (welcher ihn auf der Grundlage von Riesz' Ideen weiterentwickelte) oder schlicht als Funktionalkalkül für holomorphe Funktionen.

Als bekannt darf an dieser Stelle der Funktionalkalkül für Polynome vorausgesetzt werden, welcher den Ring der Polynome homomorph in den Ring der $n \times n$ Matrizen abbildet und im wesentlichen folgendes leistet: Sei

$$f: \ z \mapsto \sum_{i=0}^{m} \alpha_i z^i, \tag{1}$$

dann ist $f(T)$ für eine quadratische Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ erklärt durch (setze $T^0 := I$)

$$f: \ T \mapsto \sum_{i=0}^{m} \alpha_i T^i.$$

Insbesondere bedeutet das, dass man, wenn man weiß, wie man mit Polynomen rechnet, auch weiß, wie man mit (quadratischen) Matrizen zu rechnen hat.

Eine erste Idee ergibt sich zwanglos aus dem Faktum, dass (vorerst auf ganz $\mathbb{C}$) holomorphe Funktionen ebendort auch analytisch sind und damit eine Darstellung als Potenzreihe, etwa mit Anschlusspunkt 0, haben. Das bedeutet, dass in (1) die Summe bis $\infty$ geführt wird, wobei diese Reihe überall konvergiert. Es erscheint also möglich, wie oben das komplexe Argument $z$ durch die Matrix $T$ zu ersetzen, wobei Konvergenz nun im Sinne von Konvergenz in der Operatornorm zu verstehen ist. Die Menge an zulässigen holomorphen Funktionen kann sogar insofern erweitert werden, als dass nur der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe echt größer als die Operatornorm der einzusetzenden Matrix $T$ sein muss.

Leider stößt diese Vorgangsweise recht schnell an ihre Grenzen, was an einem Beispiel illustriert werden soll.

*Beispiel* 1. Betrachte die Exponentialfunktion, welche holomorph in der ganzen komplexen Ebene ist und zu folgender Potenzreihe führt:

$$exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Für reguläre Matrizen wäre es nun wünschenswert, auch eine Inverse zu $exp(.)$ zu haben. Der logische Kandidat, der natürliche Logarithmus

$$ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

konvergiert jedoch nur auf der offenen Einheitskreisscheibe um die Null. Daher findet man sich der Situation ausgesetzt, zwar für beliebige $T$ eine Funktion $exp(T)$, aber im Fall $\|T\| \geq 1$ keine Umkehrfunktion $ln(T+I)$ erklären zu können.

Das Beispiel lehrt, dass es einer Verallgemeinerung des Funktionalkalküls auf holomorphe Funktionen bedarf, die ohne Potenzreihen auskommt.

## 2 Vorbereitung für den Funktionalkalkül

In diesem Abschnitt sollen die nötigen Konzepte bereitgestellt werden, die anschließend für den Kalkül benötigt werden. Zunächst eine Reihe von Definitionen, die der Kalkül benötigen wird.

**Definition 2** (komplexe Banachalgebra mit Eins)**.** Eine komplexe Banachalgebra $A$ ist

- ein Banachraum $(A, \|.\|)$ über $\mathbb{C}$,
- auf dem zusätzlich eine bilineare, assoziative Verknüpfung $\cdot : A \times A \to A$ erklärt ist.
- Außerdem gilt für beliebige Elemente $a, b \in A$ die Abschätzung $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$.
- Schlussendlich heißt A eine komplexe Banachalgebra mit Eins, falls $A$ über ein multiplikativ neutrales Element $e$ mit $\|e\| = 1$ verfügt.

**Definition 3** (Resolventenmenge, Spektrum, Resolvente)**.** Sei $A$ eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$. Dann heißt

- $\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - a) \text{ ist invertierbar}\}$ die Resolventenmenge,
- $\sigma(a) = \mathbb{C} \backslash \rho(a)$ das Spektrum und
- die Abbildung
$$R_\lambda(a) : \begin{cases} \rho(a) & \to & A \\ \lambda & \mapsto & (\lambda e - a)^{-1} \end{cases}$$
die Resolvente.

Bekannte Resultate in der Theorie der Banachalgebren besagen, dass die Resolventenmenge offen, das Spektrum kompakt und die Resolvente auf $\rho(a)$ holomorph ist. Neben Eigenschaften von Banachalgebren, welche den Zielraum für unseren Funktionalkalkül stellen werden, sind noch Charakterisierungen von Funktionen wichtig, die am Ende den Ausgangsraum ausmachen werden.

**Definition 4** (Holomorphie, Analytizität)**.** Sei $\Delta$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Delta$ und eine Funktion $f : \Delta \to \mathbb{C}$. Dann heißt $f$

- komplex differenzierbar in $z_0$, wenn der Limes
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ z_0 + h \,\in\, \Delta}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$
existiert. In diesem Fall wird der Limes mit $f'(z_0)$ bezeichnet.
- holomorph in $z_0$, wenn $f$ in einer Umgebung von $z_0$ komplex differenzierbar ist.
- analytisch in $z_0$, wenn eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ existiert, die in einer Umgebung von $z_0$ gegen die Funktion $f(z)$ konvergiert.
- analytisch bzw. holomorph in $\Delta$, wenn $f$ in jedem Punkt von $\Delta$ die jeweilige Eigenschaft hat.

Für den Fall, dass $f$ in einen komplexen, normierten Raum $(E, \|.\|)$ abbildet, werden die angeführten Punkte über die Norm erklärt, beispielsweise die komplexe Differenzierbarkeit
$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| \xrightarrow{z \to z_0} 0.$$

Schlussendlich wird noch folgendes integrationstechnisch wichtige Konzept benötigt.

**Definition 5** (Integrationsweg)**.** Ein Integrationsweg $\Gamma$ ist das Bild einer stetigen Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, wobei $\Gamma$ endliche Länge hat (d.h. $\Gamma$ ist rektifizierbar).

Da im weiteren Verlauf gegebenenfalls aus dem Kontext heraus stets klar ist, ob wir gerade von der Bildmenge $\Gamma$ oder der zugrundeliegenden Abbildung $\gamma$ sprechen, unterlassen wir ab sofort diese Unterscheidung und verwenden für beides den selben Buchstaben.

## 2.1 Integration in einer Banachalgebra

Es wird sich zeigen, dass der Funktionalkalkül über Integrale aufgebaut werden kann. Aus diesem Grund sei hier kurz erwähnt, wie in einer Banachalgebra ein Integral erklärt ist.
Gegeben seien ein Integrationsweg $\Gamma$, ein komplexer Banachraum $E$ und eine Funktion $f : \Gamma \to E$, welche stetig sein soll. Dann können wir das Integral von $f$ über $\Gamma$ definieren als Grenzwert von Riemann'schen Summen:

$$\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda := \lim \sum_k f(\Gamma(\xi_k))(\Gamma(\lambda_k) - \Gamma(\lambda_{k-1}))$$

Dabei sind die $\lambda_k$ die Unterteilungspunkte der verwendeten Zerlegung und $\xi_k$ ein Wert aus dem Intervall $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. Der Grenzübergang wird dann wie beim Riemann-Integral üblich über die Verfeinerung der Zerlegung vorgenommen.

Dieses auf Banachräume verallgemeinerte Riemann-Integral hat einige elementare Eigenschaften, von denen die folgenden drei später noch benötigt werden: Es ist linear, d.h. für geeignete $f, g \in C(\Gamma, E)$ und $\alpha \in E$

$$\int_\Gamma \alpha f(\lambda)d\lambda = \alpha \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda \tag{2}$$

$$\int_\Gamma f(\lambda) + g(\lambda)d\lambda = \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda + \int_\Gamma g(\lambda)d\lambda. \tag{3}$$

Außerdem gilt die praktische Abschätzung

$$\left\| \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda \right\| \leq \max_{\lambda \in \Gamma} \|f(\lambda)\| \cdot \mu(\Gamma), \tag{4}$$

wobei $\mu(\Gamma)$ die Länge des Integrationswegs $\Gamma$ bezeichnen soll, und das Integral kann mit den stetigen linearen Funktionalen des Banachraums vertauscht werden, d.h.

$$e' \left[ \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda \right] = \int_\Gamma e'[f(\lambda)]d\lambda \qquad \forall e' \in E'. \tag{5}$$

## 2.2 Zum Thema Integrationswege

Eine genauere Betrachtung verdienen die Voraussetzungen, die wir im Funktionalkalkül an die verwendeten Integrationswege stellen. Sei daher $\gamma$ eine geschlossene und rektifizierbare Kurve in $\mathbb{C}$ und $\lambda \neq \gamma(t)\ \forall t \in [0,1]$. Zu dieser Kurve kann die stets ganzzahlige sogenannte Windungszahl

$$n(\gamma; \lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - \lambda} d\zeta$$

definiert werden. Sie ist auf jedem von $\gamma$ umrissenen Teilgebiet in der komplexen Ebene konstant und zählt ihrem Namen getreu, wie oft sich eine Kurve um einen fraglichen Punkt $\lambda$ windet.

Allgemein wird $\gamma$ positiv orientiert genannt, falls alle Punkte der komplexen Ebene als Windungszahl ein $n \in \mathbb{N}_0$ haben. Im Rahmen dieser Arbeit benötigen wir die folgende spezielle

**Definition 6.** Ein Integrationsweg $\gamma$ wird einfach positiv orientiert genannt, falls

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\gamma : \qquad n(\gamma;\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right.$$

Diese einfach positiv orientierten Integrationswege legen auch eine Kategorisierung der Punkte der komplexen Ebene nahe, indem das Innere bzw. Äußere von $\gamma$ als jenes Gebiet bezeichnet wird, auf dem die Windungszahl konstant 1 bzw. 0 ist.

Die Verallgemeinerung auf den Fall, dass $\Gamma$ eine Sammlung geschlossener, rektifizierbarer Kurven $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ ist, stellt nun keine Schwierigkeit mehr da:

**Definition 7.** $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ heißt einfach positiv orientiert, falls gilt

(a) $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \qquad \forall\ i \neq j$

(b) $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\Gamma = \mathbb{C}\backslash \bigcup_{i=1}^m \gamma_i : \qquad n(\Gamma;\lambda) := \sum_{i=1}^m n(\gamma_i;\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right.$

Dazu passend heißt die Menge $\text{ins}(\Gamma) \equiv \{\lambda :\ n(\Gamma;\lambda) = 1\}$ das Innere und entsprechenderweise $\text{out}(\Gamma) \equiv \{\lambda :\ n(\Gamma;\lambda) = 0\}$ das Äußere von $\Gamma$.

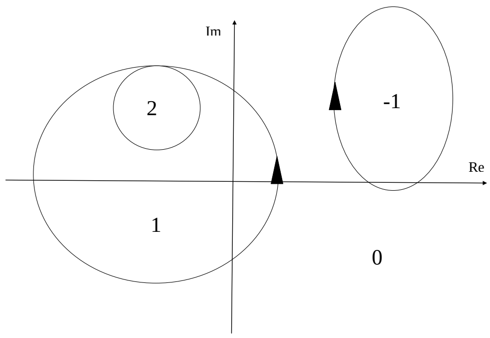


Abbildung 1: Bereiche der komplexen Ebene mit unterschiedlicher Windungszahl - bemerke, dass Definition 6 zufolge in den folgenden Abschnitten keine der gezeigten Kurven zulässig ist

Es ist somit nicht weiter verwunderlich, dass im Fall einer in einer Umgebung von $\Gamma$ stetigen Funktion $f$ die Festsetzung

$$\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda := \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f(\lambda)d\lambda$$

getroffen wird.

**Lemma 8.** Zu zwei Mengen $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subset \Delta$ kompakt findet man stets eine Sammlung $\Gamma$ endlich vieler einfach positiv orientierter geschlossener Kurven, die einerseits ganz in $\Delta\backslash K$ verlaufen und andererseits $K \subset \text{ins}(\Gamma)$ und $\mathbb{C}\backslash\Delta \subset \text{out}(\Gamma)$ leisten.

*Beweis.* Da $K$ kompakt ist, hat jede Überdeckung von $K$ durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung. Insbesondere kann man $K$ durch offene Kreisscheiben $U_{r_i}(k_i)$ mit $k_i \in K$, $r_i > 0$ und $\overline{U_{r_i}(k_i)} \subset \Delta$ überdecken, eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{r_1}(k_1), \dots, U_{r_n}(k_n)\}$ auswählen und die Vereinigung $V := \bigcup_{i=1}^n U_{r_i}(k_i)$ betrachten. Man erhält die Inklusionskette

$K \subset V \subset \overline{V} \subset \Delta$. Insbesondere ist $\partial V \subset \Delta \backslash K$. Der Rand ist aus Kreisbögen aufgebaut und hat nur endlich viele, genauer: $m \leq n$ Komponenten. Zudem sind alle Teile von $\partial V$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit (ansonsten müssen einfach die Radien $r_i$ angepasst werden) doppelpunktfrei und disjunkt, weswegen $\partial V$ einfach positiv orientiert werden kann. Damit erfüllen die so konstruierten Kurven alle Anforderungen des Lemmas. □

## 2.3 Der Cauchy'sche Integralsatz und die Cauchy'schen Integralformeln

Die beiden nächsten hier vorgestellten Sätze, die das Skelett für den Funktionalkalkül bilden, sind ein Import aus der komplexen Analysis, besser gesagt eine Verallgemeinerung auf den für uns wichtigen Fall von komplexen Banachräumen.

In Anlehnung an [KA], Kapitel 11.3 zuerst eine

**Definition 9** (stetige Deformierbarkeit). Sei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_0$, $\gamma_1$ zwei Integrationswege. Sei $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Delta$ stetig, mit $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$ und $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$, jeweils für $t \in [0,1]$. Dann heißen $\gamma_0$ und $\gamma_1$ stetig ineinander deformierbar.

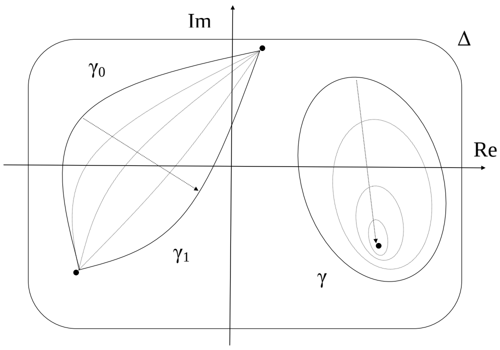


Abbildung 2: zur stetigen Deformierbarkeit in $\Delta$ von $\gamma_0$ zu $\gamma_1$ - Skizze zu den zwei Fällen im Cauchy'schen Integralsatz

**Satz 10** (Cauchy'scher Integralsatz). Sei $f: \ \Delta \to E$, wobei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein komplexer Banachraum und $f$ in $\Delta$ holomorph ist.
1) Für zwei Integrationswege $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten, die zudem in $\Delta$ stetig ineinander deformiert werden können, folgt

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda) d\lambda.$$

2) Im Fall eines geschlossenen Integrationsweges $\Gamma$, dessen Inneres nur Punkte aus $\Delta$ enthält (oder äquivalent dazu: $\Gamma$ ist stetig deformierbar zu einem einpunktigen Integrationsweg), gilt

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = 0.$$

Zur Illustration sei hier kurz gezeigt, wie sich Beweise oftmals verallgemeinern lassen, wenn man den bekannten Fall von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen bereits zur Verfügung hat.

*Beweis.* ad 1): Laut (5) gilt $\forall e' \in E'$:

$$e'\left[\int_{\Gamma_1} f(\lambda)d\lambda\right] = \int_{\Gamma_1} e'[f(\lambda)]d\lambda \stackrel{*}{=} \int_{\Gamma_2} e'[f(\lambda)]d\lambda = e'\left[\int_{\Gamma_2} f(\lambda)d\lambda\right].$$

Dabei wird bei * ausgenützt, dass $e' \circ f$ eine holomorphe, $\mathbb{C}$-wertige Funktion ist, für die laut komplexer Analysis bereits eine Version des Cauchy'schen Integralsatzes existiert. Nachdem obige Gleichheit für beliebige Funktionale $e'$ gilt, müssen die Argumente identisch sein und der erste Teil des Satzes ist bewiesen.
ad 2): Der zweite Fall folgt direkt aus dem ersten, wenn man beachtet, dass man erstens einen geschlossenen Integrationsweg an zwei beliebigen, nicht identischen Punkten in zwei Integrationswege unterteilen kann, wo der Endpunkt des einen der Anfangspunkt des anderen ist, und sich zweitens das Vorzeichen des Integrals umdreht, wenn man die Orientierung des Integrationsweges verkehrt. □

**Satz 11** (Cauchy'sche Integralformeln)**.** Sei wieder $f : \Delta \to E$, wobei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $E$ ein komplexer Banachraum und $f$ in $\Delta$ holomorph ist. Zudem sei $\Gamma$ ein geschlossener, rektifizierbarer, einfach positiv orientierter Integrationsweg, der ein $\lambda \in \Delta$ umschließt.
Dann ist $f$ beliebig oft differenzierbar und es gelten die Formeln

$$f^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda)^{n+1}}d\zeta \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{6}$$

Zudem folgt, dass $f$ um jeden Punkt $\lambda_0 \in \Delta$ in eine Potenzreihe in der Gestalt

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\lambda - \lambda_0) \qquad \alpha_k \in E$$

entwickelt werden kann, deren Konvergenz zumindest im größten offenen Kreis um $\lambda_0$, der ganz in $\Delta$ liegt, gesichert ist.

Ein Beweis dieses Satzes kann in [HE] (Satz 97.2) gefunden werden, welcher wiederum die Eigenschaft (5) der stetigen linearen Funktionale ausnützt.
Die wichtigste Aussage des obigen Satzes ist (6) im Fall $n = 0$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-\lambda}d\zeta. \tag{7}$$

Kurz gesagt ermöglicht uns diese Formel, den Funktionswert einer holomorphen Funktion $f$ an einer festen Stelle $\lambda$ über die Werte auszudrücken, die diese Funktion auf einem (wie auch immer deformierten) Kreis rund um $\lambda$ annimmt, wenn man noch mit geeigneten Faktoren multipliziert. Ersetzt man in (7) $\lambda \in \mathbb{C}$ durch ein Element $a$ einer komplexen Banachalgebra $A$, so erhält man im Integranden an Stelle von $(\zeta - \lambda)^{-1}$ einfach die Resolvente $(\zeta e - a)^{-1} = R_\zeta(a)$, während die Funktion $f$ im Zähler unverändert bleibt und aus der gesamten rechten Seite ein banachraumwertiges Riemann-Integral wird, welches, wie bereits weiter oben erwähnt, auch kein unlösbares Problem darstellt.

# 3 Der Funktionalkalkül für holomorphe Funktionen

Nach allen Vorbereitungen sind wir nun soweit, den Ausdruck $f(a)$ sinnvoll zu erklären.

**Definition 12.** Sei $A$ eine Banachalgebra mit Eins, sowie $a \in A$. Zudem sei eine Funktion $f : \Delta \to \mathbb{C}$ gegeben, die in $\Delta$ holomorph ist, und das kompakte Spektrum $\sigma(a)$ echt in $\Delta$ enthalten. Für eine ganz in $\rho(a) \cap \Delta$ verlaufende Sammlung $\Gamma$ von einfach positiv orientierten Integrationswegen setze

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)(\zeta e - a)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) R_\zeta(a) d\zeta. \tag{8}$$

An dieser Stelle wird also der Nutzen von Lemma 8 klar, wobei jedoch keine Eindeutigkeit des gefundenen $\Gamma$ gewährleistet werden kann. Deshalb ergänzen wir die Definition durch folgendes

**Lemma 13.** Durch (8) ist $f(a)$ wohldefiniert.

*Beweis.* Zu zeigen ist die Unabhängigkeit der Definition vom gewählten Integrationsweg. Seien dazu also $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ und $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ zwei Sammlungen von einfach positiv orientierten Kurven im Holomorphiebereich $\Delta$ von $f$, mit $\sigma(a) \subset \operatorname{ins}(\Gamma)$ bzw. $\sigma(a) \subset \operatorname{ins}(\Lambda)$. Wir fassen $\Gamma$ und $\Lambda$ durch die Festsetzung $\gamma_{m+i} := \lambda_i^{-1}$, das bedeutet also durch Umkehrung der Orientierung von $\Lambda$ vermittels $\lambda_i^{-1}(t) := \lambda_i(1-t)$, in der Menge $\Sigma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k}\}$ zusammen. Speziell ändert sich für das so verkehrte $\Lambda$ in jedem Punkt das Vorzeichen der Windungszahl.
Sei $\zeta \notin \Delta \backslash \sigma(a)$ beliebig. Dann ist $\zeta$ entweder Teil der Menge $\mathbb{C} \backslash \Delta$ (welche leer ist für eine überall holomorphe Funktion) oder im Spektrum von $a$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\zeta \in \mathbb{C}\backslash\Delta : \qquad & n(\Sigma; \zeta) &&= \sum_{i=1}^{m+k} n(\gamma_i; \zeta) = n(\Gamma; \zeta) - n(\Lambda; \zeta) = 0 - 0 = 0 \\
\zeta \in \sigma(a) : \qquad & n(\Sigma; \zeta) &&= 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Also ist $\Sigma$ eine Sammlung geschlossener Kurven in $\Delta \backslash \sigma(a)$ mit der Eigenschaft $n(\Sigma; \zeta) = 0$ $\forall \zeta \notin \Delta \backslash \sigma(a)$, d.h. $\mathbb{C} \backslash \Delta \cup \sigma(a) \subseteq \operatorname{out}(\Sigma)$. Ergo enthält das "Innere" von $\Sigma$ nur Punkte aus $\Delta \backslash \sigma(a)$ (zwar ist nicht gewährleistet, dass die Windungszahl hier stets 1 ist, aber dieses Detail spielt im weiteren keine Rolle). Außerdem ist $f(\zeta)$ auf $\Delta$ und $R_\zeta(a)$ auf der Resolventenmenge holomorph und damit hat deren Produkt diese Eigenschaft auf $\Delta \backslash \sigma(a)$. Mit dem Cauchy'schen Integralsatz erhalten wir

$$0 = \int_\Sigma f(\zeta) R_\zeta(a) d\zeta = \int_\Gamma f(\zeta) R_\zeta(a) d\zeta - \int_\Lambda f(\zeta) R_\zeta(a) d\zeta$$

und als Konsequenz liefert jede Wahl von Integrationswegen dasselbe Ergebnis. Damit ist die Wohldefiniertheit gezeigt. □

## 3.1 Der Hauptsatz

Mit diesem Wissen können wir nun den Funktionalkalkül formulieren. Im Gegensatz zum vorhergehenden Teil liegt unser Hauptaugenmerk nun nicht mehr darauf, wie man gewisse Elemente von $A$ in eine spezielle Funktion einsetzen kann, sondern wie man bei festem $a \in A$ mit verschiedenen holomorphen Funktionen rechnet.
Der Zielraum des Funktionalkalküls ist eine gegebene komplexe Banachalgebra $A$. Darum erscheint es zweckmäßig, als Ausgangsraum eine Struktur zur Verfügung zu stellen, die möglichst viele Eigenschaften mit $A$ teilt, um den Kalkül zu einem Algebrenhomomorphismus zu machen. Konkret führt dies zur Funktionenalgebra

$$\operatorname{Hol}(a) := \{f \mid f : \Delta_f \to \mathbb{C},\ \Delta_f \subseteq \mathbb{C} \text{ offen}, \sigma(a) \subset \Delta_f,\ f \text{ holomorph in } \Delta_f\}.$$

Dabei hängt der Holomorphiebereich jeweils von der betrachteten Funktion ab. Deshalb sind die algebraischen Operationen $f+g$ und $f \cdot g$ nur auf dem Schnitt $\Delta_f \cap \Delta_g$ erklärt, während die Skalarmultiplikation $\alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ keine Probleme bereitet. Es ist allerdings notwendig, zwei Funktionen $f,\ g \in \mathrm{Hol}(a)$ als äquivalent anzusehen, wenn sie auf dem Schnitt ihrer Holomorphiebereiche übereinstimmen: ganz offensichtlich soll $f+g-g=f$ gelten, jedoch ist die linke Seite auf $\Delta_f \cap \Delta_g$ definiert, was unter Umständen nicht mit dem Definitionsbereich der rechten Seite, $\Delta_f$, zusammenpasst und zu Widersprüchen führen würde, wenn man besagte Äquivalenzrelation außer Acht lässt. Auf diese Weise ist $\mathrm{Hol}(a)$ dann tatsächlich unter allen Operationen abgeschlossen.

**Satz 14** (Funktionalkalkül für holomorphe Funktionen)**.** Sei $A$ eine Banachalgebra mit Eins, $a \in A$.

(a) Die Funktion

$$\Phi_a : \begin{cases} \mathrm{Hol}(a) & \rightarrow & A \\ f & \mapsto & f(a) \end{cases}$$

ist ein Algebrenhomomorphismus. Insbesondere ist $f(a)g(a) = g(a)f(a)$.

(b) Sei $f: \ z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > r(a)$ (Spektralradius, i.e. der betragsmäßig größte Spektralpunkt). Dann gilt $f \in \mathrm{Hol}(a)$ und $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k$.

(c) Sei $f: \ z \mapsto 1$. Dann gilt $f(a) = e$.

(d) Sei $f: \ z \mapsto z$. Dann gilt $f(a) = a$.

(e) Ist $f(\lambda) \neq 0 \quad \forall\, \lambda \in \sigma(a)$. Dann besitzt $f(a)$ die Inverse $f(a)^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(a)$.

(f) Seien $f_1, f_2, \ldots, f \in \mathrm{Hol}(a)$ mit demselben Holomorphiebereich $\Delta$. Konvergiert die Folge $f_n$ gleichmäßig gegen $f$ auf jeder beliebigen kompakten Menge $K \subset \Delta$, so gilt

$$\|f_n(a) - f(a)\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Interessanterweise legen die Homomorphieeigenschaft, sowie (c), (d) und (f) den Funktionalkalkül bereits eindeutig fest. Ein Beweis für diese Aussage kann in [CO] VII. Proposition 4.8 nachgeschlagen werden.

*Beweis.* ad (a): Zuerst folgt $(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha f(a) + \beta g(a)$ direkt aus der Linearität des Integrals laut (2) und (3). Es bleibt also nur noch $(fg)(a) = f(a)g(a)$ zu zeigen.
Seien dazu also $f, g \in \mathrm{Hol}(a)$, $\Delta$ ihr gemeinsamer Holomorphiebereich, sowie $\Gamma$ und $\Lambda$ zwei Sammlungen einfach positiv orientierter geschlossener Integrationswege mit der zusätzlichen Eigenschaft $\sigma(a) \subset \mathrm{ins}(\Gamma) \subset \overline{\mathrm{ins}(\Gamma)} \subset \mathrm{ins}(\Lambda) \subset \Delta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(a)g(a) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left[\int_\Gamma f(z) R_z(a) dz\right]\left[\int_\Lambda g(\zeta) R_\zeta(a) d\zeta\right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma \int_\Lambda f(z) g(\zeta)\ R_z(a) R_\zeta(a)\ d\zeta dz = \\ &\overset{*}{=} -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma \int_\Lambda f(z) g(\zeta) (\zeta - z)^{-1}\ [R_z(a) - R_\zeta(a)]\ d\zeta dz = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma f(z) \underbrace{\int_\Lambda \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)}\ d\zeta}_{=:\ \mathcal{A}}\ R_z(a)\ dz + \frac{1}{4\pi^2}\int_\Lambda g(\zeta) \underbrace{\int_\Gamma \frac{f(z)}{(\zeta - z)}\ dz}_{=:\ \mathcal{B}}\ R_\zeta(a)\ d\zeta \end{aligned}$$

Bei * wird die aus der Funktionalanalysis bekannte Resolventengleichung $(\zeta - z)R_z(a)R_\zeta(a) = R_z(a) - R_\zeta(a)$ für die Umformung verwendet und im letzten Integral lässt sich die Vertauschung der Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini für Riemann-Integrale rechtfertigen: $\Gamma$ und $\Lambda$ sind im wesentlichen die stetigen Bilder kompakter Intervalle und der Integrand ist holomorph ($f, g$ auf $\Delta$, $R_\zeta(a)$ auf $\rho(a)$ und $\frac{1}{\zeta - z}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{z = \zeta\}$, ihr Produkt damit auf dem Schnitt dieser drei offenen Mengen, in welchem auch $\Gamma$ und $\Lambda$ liegen), daher insbesondere stetig, also mithin integrierbar, womit sich Fubini anwenden lässt. Schlussendlich gilt: $z \in \Gamma \subset \text{ins}(\Lambda)$, weshalb nach (7) $\mathcal{A} = 2\pi i\ g(z)$ folgt. Wegen $\zeta \in \Lambda \subset \text{out}(\Gamma)$ ist der Integrand von $\mathcal{B}$ in ganz $\text{ins}(\Gamma)$ holomorph und laut Satz 10 ergibt sich $\mathcal{B} = 0$. Obige Rechnung fortgesetzt ist somit

$$f(a)g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)g(z)R_z(a)\ dz = (fg)(a) \tag{9}$$

und (a) ist gezeigt. Das Kommutieren von $f(a)$ und $g(a)$ ist eine simple Konsequenz der punktweise erklärten abelschen Multiplikation in $\mathbb{C}$, wie aus (9) ohne Weiteres ersichtlich ist.

ad (c), (d): Sei $f$ ein allgemeines Monom, also $f: \ z \mapsto z^k$ für $k \geq 0$. Eine solche Funktion ist, wie jedes Polynom, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Daher kann mittels $\gamma(t) = R\exp(2\pi i t)$, mit $R > \|a\|$ und $t \in [0,1]$ ein spezieller Integrationsweg gewählt werden, da das Spektrum eines Elements $a \in A$ immer im abgeschlossenen Kreis mit Radius $\|a\|$ liegt und sicher $\sigma(a) \subset \text{ins}(\gamma)$ folgt. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^k R_z(a) dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^k (ze - a)^{-1} dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{k-1} (e - \frac{a}{z})^{-1} dz = \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n dz = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z^{n-k+1}} dz}_{= \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}} \ a^n = \\
&= a^k
\end{aligned}$$

Bei * wurde verwendet, dass $|z| = R$ und daher $\left\|\frac{a}{z}\right\| < 1$ gilt, weswegen sich $(e - \frac{a}{z})^{-1}$ als gleichmäßig konvergente Neumann-Reihe schreiben lässt und die Vertauschung von Summe und Integral gerechtfertigt ist. Sowohl (c) als auch (d) folgen nun klarerweise als Spezialfälle des eben gezeigten.

ad (f): Sei $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ eine einfach positiv orientierte Sammlung geschlossener Kurven, wie üblich mit $\sigma(a) \subset \mathrm{ins}(\Gamma)$.

$$\begin{aligned}
2\pi \left\|f_n(a) - f(a)\right\| &= \left\| \int_\Gamma f_n(z) R_z(a) dz - \int_\Gamma f(z) R_z(a) dz \right\| = \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f_n(z) R_z(a) dz - \int_{\gamma_i} f(z) R_z(a) dz \right\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \left\| \int_{\gamma_i} f_n(z) R_z(a) dz - \int_{\gamma_i} f(z) R_z(a) dz \right\| = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\| \int_{\gamma_i} (f_n - f)(z) [ze - a]^{-1} dz \right\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} |(f_n - f)(z)| \underbrace{\left\|[ze - a]^{-1}\right\|}_{\overset{*}{\leq} M_i} dz \leq \\
&\overset{**}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{M_i}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|\gamma_i\|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\max_{z \in \gamma_i}\{|(f_n - f)(z)|\}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} \xrightarrow{n \to \infty} 0
\end{aligned}$$

Da die Zuordnung $z \mapsto \left\|[ze - a]^{-1}\right\|$ stetig auf $\gamma_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ist - schließlich sind die Resolvente und die Norm beides stetige Funktionen - ist insbesondere die Verknüpfung der zwei Funktionen auf jedem Integrationsweg $\gamma_i$ durch ein $M_i$ beschränkt, was * erklärt. Die Abschätzung bei ** ergibt sich wegen (4).

ad (b): Für festes $n$ und $p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ folgt mit (a), (c) und (d) $p_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k$. Sei nun also $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit einem gewissen Konvergenzradius $R > r(a)$. Dann konvergiert die Folge der $p_n$ sicher punktweise gegen $f$ und sogar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Mit dem gerade bewiesenen (f) folgt daher $p_n(a) \to f(a)$.

ad (e): Wenn $f$ am Spektrum von $a$ nicht verschwindet, dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f$ insbesondere eine offene Umgebung $U$ des Spektrums, auf der $f$ nicht Null wird. Es folgt daher aus der Holomorphie von $f$ jene von $\frac{1}{f}$ auf $U$ und $\frac{1}{f}$ gehört sicherlich zu $\mathrm{Hol}(a)$. Es gilt nun trivialerweise die Gleichung $f(\lambda)\left(\frac{1}{f}\right)(\lambda) = \left(\frac{1}{f}\right)(\lambda) f(\lambda) = 1$ für $\lambda \in U$ und mit (a) und (c) ist daher klar, dass $\frac{1}{f}$ invers zu $f$ ist. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

## 3.2 Eine Anwendung

Zum Abschluss und Ausblick sei hier noch eine erste Verwendungsmöglichkeit für den Funktionalkalkül vorgestellt, namentlich ein Spektralabbildungssatz.

**Satz 15** (Spektralabbildungssatz)**.** Sei $f \in \mathrm{Hol}(a)$. Dann gilt $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

*Beweis.* $\subseteq$: Sei $\mu \in \sigma(f(a))$. Angenommen es gelte $\mu \notin f(\sigma(a))$, d.h. $\mu - f(\lambda) \neq 0$ für jeden Spektralpunkt. Laut der Aussage (e) des Funktionalkalküls hätte also $\mu e - f(a)$ eine Inverse, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\sigma(f(a)) \subseteq f(\sigma(a))$ gelten.
$\supseteq$: Sei jetzt $\mu \in f(\sigma(a))$, d.h. $\mu = f(\zeta)$ für ein gewisses $\zeta \in \sigma(a)$. Auf $\Delta_f$ definieren wir nun

$$g(\lambda) := \begin{cases} \frac{f(\lambda) - f(\zeta)}{\lambda - \zeta} & \lambda \neq \zeta \\ f'(\zeta) & \lambda = \zeta \end{cases} .$$

Diese Festsetzung ist sinnvoll, weil nach Definition 4 $g(\lambda)$ gegen $g(\zeta)$ konvergieren muss. Die Holomorphie vererbt sich von $f$ auf $g$ und wir erhalten $g \in \mathrm{Hol}(a)$. Damit kann $\Phi_a$ auf $g$ angewandt werden:

$$\begin{gathered} g(\lambda)(\zeta-\lambda) = f(\zeta) - f(\lambda) \\ \Downarrow \Phi_a \\ g(a)(\zeta e - a) = f(\zeta)e - f(a) = \mu e - f(a) \end{gathered}$$

Wir treffen an dieser Stelle die Annahme, dass $\mu \notin \sigma(f(a))$, d.h. $\mu e - f(a)$ ist invertierbar und wir erhalten

$$\left[(\mu e - f(a))^{-1} g(a)\right](\zeta e - a) = (\zeta e - a)\left[(\mu e - f(a))^{-1} g(a)\right] = e.$$

Es ist also $\zeta e - a$ invertierbar, womit wir wiederum einen Widerspruch zur Annahme erhalten. Also muss auch $f(\sigma(a)) \subseteq \sigma(f(a))$ sein und der Satz ist bewiesen. □

## Literatur


[HE] Harro Heuser: *Funktionalanalysis - Theorie und Anwendung*, Wiesbaden: B. G. Teubner Verlag, 4. Auflage 2006.

[CO] John B. Conway: *A Course in Functional Analysis*, New York: Springer, 1985.

[KA] Michael Kaltenbäck: *Analysis II für Technische Mathematik*, Vorlesungsskriptum, Wien, 2008.


Anmerkung: Als Einführung und Übersicht zum Thema ist zudem auch die Seite

`http://en.wikipedia.org/wiki/Holomorphic_functional_calculus`

zu empfehlen, von wo auch Beispiel 1 in gekürzter Form übernommen wurde.