C^*-Algebren und der Satz von Gelfand-Naimark

Seminararbeit

Michalis Neururer

22. April 2010 in Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitende Worte zu Banachalgebren

1.0.1.: Definition: Sei A ein Banachraum und $\cdot$ eine assoziative Bilinearform (Multiplikation). Das Paar $(A, \cdot)$ heißt Banachalgebra, wenn die Norm von A submultiplikativ ist, also

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in A$$

Eine Banachalgebra mit einem Element e, sodass

$$a \cdot e = e \cdot a = a, \ \forall a \in A \text{ und } \|e\| = 1$$

nennt man Banachalgebra mit Eins.

Statt $a \cdot b$ werden wir in Zukunft auch ab schreiben. Ist die Multiplikation kommutativ nennt man $(A, \cdot)$ auch eine kommutative Banachalgebra. Oft wird auch A alleine als Banachalgebra bezeichnet, wenn klar ist, welche Multiplikation dazugehört. Um Trivialitäten zu vermeiden, sei A immer $\neq \{0\}$. Analog zur Operatortheorie, in der man die Banachalgebra $B(X)$(das sind die beschränkten linearen Operatoren von X nach X) betrachtet, kann man das Spektrum und die Resolventenmenge der Elemente einer Banachalgebra betrachten.

1.0.2.: Definition: Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$:

$$\mathrm{Inv}(A) := \{x \in A : \exists y \in A : xy = yx = e\}, \quad \rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)\}, \quad \sigma(a) := \mathbb{C} \setminus \rho(a)$$

Wie für $B(X)$ zeigt man:

1.0.3.: Satz (Spektralabbildungssatz): Sei $p \in \mathbb{C}[x]$, dann gilt $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$
1.0.4.: Satz : Sei $a \in A$

-) $\|a\| < 1 \Rightarrow e - a \in \mathrm{Inv}(A)$ wobei $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$

-) $\mathrm{Inv}(A)$ ist offen; $\sigma(a) \subseteq \mathrm{K}_{\|a\|}(0)$ ist kompakt und nichtleer; $\rho(a)$ ist offen

-) $r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$

Für den Rest dieses Kapitels sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins.

1.0.5.: Definition: Ein lineares Funktional $\tau \neq 0$ auf A heißt multiplikativ, wenn

$$\tau(ab) = \tau(a) \cdot \tau(b), \ \forall a, b \in A$$

Die Menge aller multiplikativen Funktionale (Γ_A) nennt man Gelfandraum.

1.0.6.: Lemma : Ein multiplikatives Funktional ist stetig mit Norm 1.

Multiplikative Funktionale spielen bei der Untersuchung von kommutativen Banachalgebren eine große Rolle, vor allem die Gelfandtransformation ist sehr vielfältig einsetzbar und erlaubt uns die Elemente von A als Funktionen von Γ_A nach $\mathbb{C}$ zu betrachten.

1.1 Die Gelfandtransformation

Wegen Lemma 1.0.6 können wir Γ_A als Teilmenge vom Dualraum A' betrachten. Es gilt

$$\Gamma_A = \bigcap_{a,b \in A} \{f \in A' : f(ab) - f(a) \cdot f(b) = 0\} \cap \{f : f(e) = 1\}$$

Somit ist Γ_A eine abgeschlossene Teilmenge der schwach*-kompakten Einheitskugel in A' und damit selber kompakt.

Für $a \in A$ definieren wir eine Funktion $\hat{a}$ auf Γ_A:

$$\hat{a}(\tau) := \tau(a)$$

Da Γ_A mit der schwach*-Topologie versehen ist, ist $\hat{a}$ eine stetige Funktion von Γ_A nach $\mathbb{C}$.

1.1.1.: Definition: [Gelfandtransformation]
Die Abbildung

$$\hat{}: A \to C(\Gamma_A), \quad a \mapsto \hat{a}$$
$$\text{wobei } \hat{a}(\tau) := \tau(a)$$

nennt man Gelfandtransformation auf A.

1.1.2.: Satz : Die Gelfandtransformation ist ein beschränkter Algebrenhomomorphismus mit Abbildungsnorm 1 und $\hat{a}(\Gamma_A) = \sigma(a)$ und daher $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$

2 C*-Algebren

2.1 Kommutative C^*-Algebren und die Gelfandtransformation

2.1.1.: Definition: C^*-Algebren sind Banachalgebren mit einer Involution, also einer konjugiert linearen Abbildung $* : A \to A$ mit

$$a^{**} = a \text{ und } (ab)^* = b^* a^*, \ \forall a, b \in A$$

Außerdem muss die Norm von A folgende Voraussetzung erfüllen:

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| \tag{C*1}$$

Unmittelbar aus der Definition einer Involution folgt $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$ und damit $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$. In einer C^*-Algebra lassen sich normale, selbstadjungierte und unitäre Elemente in Analogie zur Operatortheorie defnieren:
2.1.2.: Definition: Ein Element $a \in A$ heißt normal wenn a mit a^* kommutiert. a heißt selbstadjungiert wenn $a = a^*$ gilt, und unitär wenn $a^* = a^{-1}$.

Bemerkung 1: Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen kann man jedes Element x als $a + ib, \ a, b \in A_{sa}$ schreiben. Dazu wählt man $a = \frac{x+x^*}{2}$ und $b = \frac{x-x^*}{2i}$.
Beispiel: Sei M eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes. Die Menge $C(M)$ aller stetigen Funktionen von M nach $\mathbb{C}$ wird mit der punktweisen Multiplikation und $\| \, . \, \|_\infty$ zu einer Banachalgebra. Als Involution bietet sich die Konjugation $(f \mapsto \overline{f})$ an die offensichtlich auch die Voraussetzung (C^*1) erfüllt. Die selbstadjungierten Elemente dieser kommutativen C^*-Algebra sind genau die Funktionen mit reellem Bild.
Beispiel: Sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum, dann ist $B(H)$, die beschränkten Operatoren von H nach H, eine C^*-Algebra. A^* ist dabei der zu A adjungierte Operator, also der Operator, der $(Ax, y) = (x, A^*y)$ für alle $x, y \in A$ erfüllt.

2.1.3.: Lemma : Ist $a \in A$ normal, so gilt $\|a\| = r(a)$

Beweis : Aus den Eigenschaften einer C^*-Algebra folgt

$$\left\|a^2\right\|^2 = \|a^* a^* a a\| = \|(a^* a)^* (a^* a)\| = \|a^* a\|^2 = \|a\|^4$$

Nach einer vollständigen Induktion folgt $\left\|a^{2^n}\right\| = \|a\|^{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow r(a) = \lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim \left\|a^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|$$

□

Dieses Lemma zeigt, wie stark die Voraussetzung (C*1) ist. Da für $a \in A$ das Element a^*a selbstadjungiert und damit normal ist, gilt $r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Die Voraussetzung koppelt also die algebraischen Eigenschaften von A mit den metrischen. Aus diesen Überlegungen folgt unmittelbar:
2.1.4.: Korollar :
Es gibt höchstens eine Norm die eine Banachalgebra mit Involution (auch *-Algebra) zu einer C^*-Algebra macht.

2.1.5.: Lemma : Für selbstadjungierte $a \in A$ gilt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$

Beweis : Sei $\alpha + i\beta \in \sigma(a)$. Aus dem Spektralabbildungssatz folgt

$$\alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(a + i\lambda) \text{ , für } \lambda \in \mathbb{R}$$

Da für $x \in A$ $\sigma(x)$ in einer Kugel um 0 mit Radius $\|x\|$ enthalten ist (Satz 1.0.4), gilt $|\alpha + i(\beta + \lambda)| \leq \|a + i\lambda\|$. Das ist äquivalent zu $\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 \leq \|a + i\lambda\|^2$. Eine kurze Rechnung zeigt

$$\|a + i\lambda\|^2 = \|(a - i\lambda)(a + i\lambda)\| = \left\|a^2 + \lambda^2\right\| \leq \left\|a^2\right\| + \lambda^2$$

also muss $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\lambda \leq \left\|a^2\right\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten. Daraus folgt $\beta = 0$, also ist das Spektrum von a eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ □

In kommutativen C^*-Algebren sind multiplikative Funktionale automatisch *-Homomorphismen, d.h. sie sind mit der Involution $*$ verträglich:
2.1.6.: Lemma : $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ für ein multiplikatives Funktional τ.

Beweis : Nach Bemerkung 1 gilt $a = b + ic,\ b, c \in A_{sa}$. Außerdem gilt nach Satz 1.1.2 und Lemma 2.1.5, $\hat{x}(\tau) = \tau(x) \in \sigma(x) \subseteq \mathbb{R},\ \forall x \in A_{sa}$, also

$$\tau(a^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b + ic)} = \overline{\tau(a)}$$

□

2.1.7.: Satz Gelfandtransformation in kommutativen C^*-Algebren:
Sei A eine kommutative C^*-Algebra mit Eins. Dann ist die Gelfandtransformation ein isometrischer *-Isomorphismus von A auf $C(\Gamma_A)$.

Beweis : Es gilt $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \|a\|$, da alle a normal sind. Die *-Verträglichkeit ist eine einfache Folgerung aus Lemma 2.1.6

$$\hat{a^*} = \tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \overline{\hat{a}(\tau)}$$

Damit ist die Gelfandtransformation ein isometrischer *-Homomorphismus. $\hat{A}$ ist eine (wegen der Isometrie) abgeschlossene C^*-Unteralgebra von $C(\Gamma_A)$. Es bleibt zu zeigen dass Die Gelfandtranfsormation surjektiv ist. Dazu verwenden wir den Satz von Stone-Weierstraß. Die Voraussetzungen sind schnell überprüft: Wenn $\tau_1 \neq \tau_2$ gibt es ein $a \in A$ mit $\hat{a}(\tau_1) = \tau_1(a) \neq \hat{a}(\tau_2) = \tau_2(a)$, also ist $\hat{A}$ punktetrennend. Die Identität $\mathbb{1}$ ist als $\hat{e}$ auch enthalten. Somit ist $\hat{A}$ abgeschlossen und dicht in $C(\Gamma_A)$, also

$$\hat{A} = C(\Gamma_A)$$

□

Die folgenden 2 Sätze erlauben es, die Gelfandtransformation auch bei nicht kommutativen C^*-Algebren zu benützen und einige aus der Analysis bekannte Sätze auf C^*-Algebren zu verallgemeinern. Beweise dafür sind in [1, 2, 3] zu finden.

2.1.8.: Satz : Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und B eine C^*-Unteralgebra von A. Wenn $e \in B$ dann gilt

$$\sigma_B(b) = \sigma_A(b) \text{ ,} \forall b \in B$$

2.1.9.: Definition: Für ein normales x sei $A_0(x)$ die von x und e erzeugte C^*-Algebra, also die kleinste C^*-Unteralgebra von A die x und e enthält.
Wenn klar ist welches x gemeint ist schreibt man auch nur A_0 dafür.

Bemerkung: Es gilt $A_0 = cls(\left[x^j \cdot x^{*k} :\ j,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right])$ ([.] steht dabei für die lineare Hülle). Mit Hilfe dieser Darstellung kann man folgern, dass A_0 kommutativ ist, weil x normal ist.

Wegen Satz 2.1.7 wissen wir, dass A_0 isometrisch isomorph zu $C(\Gamma_{A_0})$ ist. Es gilt $\hat{x}(\Gamma_{A_0}) = \sigma(x)$, also ist $\hat{x}$ eine surjektive Abbildung von Γ_{A_0} auf $\sigma(x)$. Es stellt sich heraus, dass $\hat{x}$ sogar ein Homöomorphismus von Γ_{A_0} auf $\sigma(x)$ ist.

2.1.10.: Satz : Sei x normal: Γ_{A_0} ist homöomorph zu $\sigma(x)$ und es gilt

$$C(\sigma(x)) \tilde{=} C(\Gamma_{A_0}) \tilde{=} A_0$$

Es gibt einen *-Isomorphismus $\Phi : A_0 \to C(\sigma(x))$ sodass x auf die Funktion $\mathbf{t}$:$\lambda \mapsto \lambda$ und e auf die Funktion $\mathbf{1}$:$\lambda \mapsto 1$ abgebildet werden.

2.2 Der Satz von Gelfand-Naimark

2.2.1.: Satz Gelfand-Naimark: Für jede C^*-Algebra A existiert ein Hilbertraum H und ein isometrischer *-Homomorphismus $\phi : A \to L(H)$

Der Satz von Gelfand-Naimark gilt für alle C^*-Algebren, in dieser Arbeit werden wir uns allerdings auf C^*-Algebren mit Eins beschränken. Für den Beweis werden wir H schrittweise explizit konstruieren.

2.2.1 Sesquilinearformen definieren

Bei nicht kommutativen C^*-Algebren reicht es nicht mehr aus multiplikative Funktionale zu betrachten.

2.2.2.: Definition: $\omega \in A'$ heißt Zustand wenn $\omega(e) = \|\omega\| = 1$. Die Menge aller Zustände bezeichnen wir mit $S(A)$.
Ähnlich wie beim Gelfandraum sieht man, dass $S(A)$ eine konvexe w^*-kompakte Teilmenge von A' ist.

2.2.3.: Definition: $x \in A_{sa}$ heißt positiv wenn $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+$. A^+ bezeichne die Menge aller positiven Elemente.

2.2.4.: Lemma : Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $x, y \in A_{sa}$:

a) $\omega(x) \in \mathbb{R},\ \forall \omega \in S(A)$ und für alle $\lambda \in \sigma(x)$ existiert ein Zustand ω mit $\omega(x) = \lambda$.

b) x ist genau dann positiv, wenn $\omega(x) \geq 0$ für alle Zustände ω gilt.

c) Wenn x, y positiv sind, so ist auch $x + y$ positiv.

d) Es existieren zwei positive Elemente x_+ und x_- mit $x = x_+ - x_-$ und $x_+ x_- = x_- x_+ = 0$.

e) x ist genau dann positiv wenn es ein $u \in A$ gibt, mit $x = u^* u$.

Beweis :
zu a) Wir definieren $\omega_0 : C(\sigma(x)) \to \mathbb{C}$ durch $\Phi(a) \mapsto \omega(a)$. ω_0 ist wohldefiniert da Φ bijektiv von A_0 nach $C(\sigma(x))$ geht. Außerdem ist ω_0 stetig, also in $C(\sigma(x))'$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es ein eindeutiges reguläres komplexes Borelmaß μ sodass $\omega_0(\Phi(a)) = \int \Phi(a) d\mu$. Es gilt $1 = \omega_0(\mathbf{1}) = \mu(\sigma(x)) \leq \|\mu\| = \|\omega_0\| \leq \|\omega\| = 1$. Daraus kann man schließen, dass $\mu \geq 0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Nun gilt

$$\omega(x) = \omega_0(\Phi(x)) = \int \Phi(x) d\mu \in \mathbb{R},$$

da $\Phi(x) = \mathbf{t}$ die Elemente des reellen Spektrums identisch abbildet und μ ein positives Maß ist. Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt, für den zweiten Teil definieren wir ein Funktional ω_0 auf A_0 durch $a \mapsto \Phi(a)(\lambda)$. Wegen $\Phi(a)(\lambda) \in \sigma(a)$ gilt $\omega_0(a) \leq \|a\|$. Zusätzlich ist $\omega_0(e) = 1$, womit $\|\omega_0\| = 1$. Also ist ω_0 ein Zustand auf A_0 den wir mit dem Satz von Hahn-Banach zu einem Zustand ω von A fortsetzen können.
zu b)
"$\Rightarrow$": Sei ω_0 und μ wie im Beweis von Teil a):

$$\omega(x) = \omega_0(\Phi(x)) = \int \Phi(x) d\mu \geq 0,$$

da $\Phi(x)$ eine positive Funktion und μ ein positives Maß ist.
"$\Leftarrow$": Sei $\lambda \in \sigma(x)$. Aus dem zweiten Teil von Punkt a) folgt die Existenz eines Zustands ω mit $0 \leq \omega(x) = \lambda$.
zu c) Folgt sofort aus Punkt b).
zu d) Wir können $\Phi(x)$ in $C(\sigma(x)) \tilde{=} A_0$ so zerlegen. Daraus bekommen wir unmittelbar die gewünschte Zerlegung in A_0.
zu e)
"$\Rightarrow$": Wenn x positiv ist existiert $\sqrt{\Phi(x)} \in C(\sigma(x))$. Also existiert ein $u \in A_0$ mit $\Phi(u) = \sqrt{\Phi(x)} \Rightarrow x = u^2 = u^* u$
"$\Leftarrow$“: Da $x = u^* u$ selbstadjungiert ist, kann man es laut Punkt d) als

$$x = x_+ - x_- \text{ mit } x_+ x_- = x_- x_+ = 0$$

darstellen. Ausmultiplizieren zeigt

$$-(ux_-)^*(ux_-) = -x_- u^* u x_- = x_-^3$$

also ist $-(ux_-)^*(ux_-)$ positiv. Mit $ux_- = a + ib,\ a, b \in A_{sa}$ folgt:

$$(ux_-)^*(ux_-) = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 + i(ab - ba)$$

$$(ux_-)(ux_-)^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 + i(ba - ab)$$

$$(ux_-)(ux_-)^* = 2(a^2 + b^2) + (-(ux_-)^*(ux_-))$$

Da man $(ux_-)(ux_-)^*$ als Summe von zwei positiven Elementen von A darstellen kann ist $(ux_-)(ux_-)^*$ positiv. Nun gilt aber für das Spektrum folgendes Lemma:

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}, \quad \forall a, b \in A$$

Daraus folgt $(-\infty, 0] \supseteq \sigma((ux_-)^*(ux_-)) \setminus \{0\} = \sigma((ux_-)(ux_-)^*) \setminus \{0\} \subseteq [0, \infty)$. Also $\sigma(x_-^3) = \sigma(-(ux_-)^*(ux_-)) = \{0\}$, das heißt aber, dass $\hat{x_-}$ die Nullabbildung ist und somit $x_- = 0$. Damit ist $x = x_+$ positiv. □

Wir definieren nun für jeden Zustand eine Sesquilinearform:

$$[x, y]_\omega := \omega(y^* x)$$

Mit $y^* x = a + ib,\ a, b \in A_{sa}$ folgt sofort $(\omega(a), \omega(b) \in \mathbb{R})$

$$\overline{[x, y]_\omega} = \overline{\omega(a + ib)} = \omega(a) - i\omega(b) = \omega(a - ib) = \omega(x^* y) = [y, x]_\omega$$

Da ω linear ist, handelt es sich tatsächlich um Sesquilinearformen. Es gilt $[x, x]_\omega = \omega(x^* x) \geq 0$, also ist die einzige Eigenschaft die noch zu einem Skalarprodukt fehlt, die Definitheit.

2.2.2 Skalarprodukte und Hilberträume

Wir definieren

$$I_\omega := \{x \in A : [x, x]_\omega = 0\}$$

mit dem Ziel A nach I_ω zu faktorisieren. Dazu müssen wir I_ω als Teilraum von A identifizieren. Das ist eine einfache Folgerung aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Diese beweist man ähnlich wie für Skalarprodukte.

2.2.5.: Lemma (Cauchy-Schwarz Ungleichung):
$|[x,y]_\omega| \leq [x,x]_\omega^{\frac{1}{2}} \cdot [y,y]_\omega^{\frac{1}{2}}$

2.2.6.: Korollar : $[x,x]_\omega = 0$ gilt genau dann, wenn $[x,y]_\omega = 0$ für alle $y \in A$ gilt.

2.2.7.: Lemma :

a) $[ax,ax]_\omega \leq \|a\|^2 \cdot [x,x]_\omega$, für alle $a, x \in A$

b) I_ω ist ein Unterraum mit
$$a \in A, x \in I_\omega \Rightarrow ax \in I_\omega$$
Also ist I_ω ein Linksideal von A

Beweis :
zu a)
$$\|a\|^2 \cdot [x,x]_\omega - [ax,ax]_\omega = \omega(x^* \|a\|^2 x) - \omega(x^* a^* a x) = \omega(x^*(\|a\|^2 - a^* a)x)$$
Wegen $\|a^*a\| = \|a\|^2$ ist $\|a\|^2 - a^*a$ positiv. Man kann $\|a\|^2 - a^*a$ nach Lemma 2.2.4 als u^*u für ein gewisses $u \in A$ darstellen. Setzt man das in die obige Gleichung ein, erhält man mit dem gleichen Lemma
$$\|a\|^2 \cdot [x,x]_\omega - [ax,ax]_\omega = \omega(x^*u^*ux) = \omega((ux)^*ux) \geq 0$$
zu b) Dass I_ω Unterraum ist, folgt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Punkt a) zeigt, dass I_ω Linksideal ist. □

Mit diesem Lemma können wir nun auf A/I_ω übergehen und das Skalarprodukt
$$\langle x + I_\omega, y + I_\omega \rangle_\omega := [x,y]_\omega$$
definieren. Lemma 2.2.7 zeigt, dass damit tatsächlich ein Skalarprodukt wohldefiniert ist.
Den Praehilbertraum $(A/I_\omega, \langle .,. \rangle_\omega)$ kann man isometrisch und dicht in einen Hilbertraum H_ω einbetten. Den Beweis dafür, dass so eine Hilbertraumvervollständigung immer existiert, findet man in [1]. Jetzt wollen wir jedem $a \in A$ einen Operator in $L(H_\omega)$ zuordnen. Wir definieren:
$$\tilde{\pi_\omega} : A \to L(A/I_\omega): \quad \tilde{\pi_\omega}(a)(x + I_\omega) := ax + I_\omega$$
$\tilde{\pi_\omega}$ ist wohldefiniert, da I_ω Linksideal ist. Aus Lemma 2.2.7 folgt $\|\tilde{\pi_\omega}(a)\| \leq \|a\|$. Außerdem gilt $\|\tilde{\pi_\omega}(a)\| \geq \|a \cdot e + I_\omega\| = [a,a]_\omega^{\frac{1}{2}}$, da $\|e + I_\omega\| = 1$. $\tilde{\pi_\omega}(a)$ können wir stetig fortsetzen auf $\pi_\omega(a) \in L(H_\omega)$. Damit erhalten wir eine Abbildung $\pi_\omega : A \to L(H_\omega)$.

2.2.8.: Lemma :
$\pi_\omega : A \to L(H_\omega)$ ist ein stetiger *-Homomorphismus mit $[a,a]_\omega^{\frac{1}{2}} \leq \|\pi_\omega(a)\| \leq \|a\|$

Beweis : Nach der obigen Bemerkung bleibt nur mehr zu zeigen, dass es sich um einen *-Homomorphismus handelt. Da A/I_ω dicht in H_ω ist, können wir uns auf Elemente der Form $x + I_\omega$ beschränken (Die Stetigkeit von π_ω haben wir ja bereits gezeigt).
$$\pi_\omega(ab)(x + I_\omega) = abx + I_\omega = \pi_\omega(a)\pi_\omega(b)(x + I_\omega)$$
Damit ist die Multiplikativität gezeigt, also $\pi_\omega(ab) = \pi_\omega(a)\pi_\omega(b)$. Es fehlt noch die *-Verträglichkeit.
$$\begin{aligned} \langle x + I_\omega, \pi_\omega(a^*)(y + I_\omega) \rangle_\omega &= \langle x + I_\omega, a^*y + I_\omega) \rangle_\omega = \\ &= \omega(y^*ax) = \\ &= \langle ax + I_\omega, y + I_\omega \rangle_\omega = \\ &= \langle \pi_\omega(x + I_\omega), y + I_\omega \rangle_\omega \end{aligned}$$
Das zeigt $\pi_\omega(a^*) = \pi_\omega(a)^*$ □

2.2.3 Isometrie

Da π_ω im Allgemeinen keine Isometrie ist betrachten wir:

$$\begin{aligned} H \quad &:= \sum_{\omega\in S(A)} H_\omega := \left\{ (\xi_\omega)_{\omega\in S(A)} :\ \xi_\omega \in H_\omega \text{ und } \sum_{\omega\in S(A)} \langle \xi_\omega, \xi_\omega\rangle_\omega < \infty \right\} \\ \langle(\xi_\omega),(\eta_\omega)\rangle &:= \sum_{\omega\in S(A)} \langle(\xi_\omega),(\eta_\omega)\rangle_\omega \end{aligned}$$

Die Summation ist hier in folgendem Sinn zu verstehen: Versieht man $S(A)$ mit dem Zählmaß auf der Potenzmenge von $S(A)$, kann man einem Vektor $(\xi_\omega)_{\omega\in S(A)}$ eine Funktion zuordnen, die einen Zustand ω auf die komplexe Zahl $\langle\xi_\omega,\xi_\omega\rangle_\omega$ abbildet. Die obigen Summen kann man dann als $\int_{\omega\in S(A)} \left\langle \xi_{(.)}, \xi_{(.)}\right\rangle_{(.)} d\omega$ interpretieren. Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung für Integrale folgt nun, dass das Skalarprodukt $\langle .,.\rangle$ wohldefiniert ist. Man kann elementar nachprüfen, dass H mit dem obigen Skalarprodukt ein Hilbertraum ist. Wir definieren:

$$\begin{aligned} &\pi : A \to L(H) \\ &\pi(a)((\xi_\omega)_\omega) = (\pi_\omega(a)(\xi_\omega))_\omega \end{aligned}$$

Da die π_ω *-Homomorphismen sind, ist π auch einer. Ebenso leicht kann man $\|\pi(a)\| = \sup_\omega \|\pi_\omega(a)\|$ zeigen. Mit Lemma 2.2.8 folgt $\sup_\omega [a,a]_\omega^{\frac{1}{2}} \leq \|\pi_\omega(a)\| \leq \|a\|$. Ein letztes Lemma fehlt nun, um den Beweis von Satz 2.2.1 zu vervollständigen:

2.2.9.: Lemma :
Zu jedem $a \in A$ existiert ein Zustand ω mit $[a,a]_\omega^{\frac{1}{2}} = \|a\|$.

Beweis : Gesucht ist ein Zustand ω mit $\omega(a^*a) = \|a\|^2 = \|a^*a\|$. a^*a ist ein selbstadjungiertes positives Element. Aus Lemma 2.1.3 folgt $r(a^*a) = \max_{\lambda\in\sigma(a^*a)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(a^*a)} \lambda = \|a^*a\|$. Also ist $\|a^*a\| \in \sigma(a^*a)$ und laut Lemma 2.2.4 existiert der gesuchte Zustand. □

Damit ist der Satz von Gelfand-Naimark bewiesen. Die Konstruktion die wir für den Beweis benützt haben, nennt man auch GNS-Konstruktion, benannt nach Gelfand, Naimark und Segal.

Beispiel für die GNS-Konstruktion: Sei A die C^*-Algebra $L(\mathbb{C}^n)$ und e_i die kanonischen Einheitsvektoren von $\mathbb{C}^n$. Ein Zustand ist zum Beispiel:

$$\omega(T) := \frac{1}{n} tr(T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle Te_i, e_i\rangle$$

Die Sesquilinearform, die für diesen Zustand konstruiert wird ist bereits ein Skalarprodukt, man kann sich also den Übergang zu A/I_ω ersparen. Es gilt:

$$[S,T] = \omega(T^*S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle Se_i, Te_i\rangle$$

Führt man die GNS-Konstruktion fort, bekommt man als H einen unendlich-dimensionalen nicht separablen Hilbertraum, obwohl $L(\mathbb{C}^n)$ selber schon die gesuchte Form hat. Der Hilbertraum den man über die GNS-Konstruktion bekommt, ist also nicht immer leichter zu handhaben, als die ursprüngliche C^*-Algebra. Oft reicht es aber, nur zu wissen dass man eine C^*-Algebra A in einen $L(H)$ einbetten kann, ohne diesen explizit darzustellen.

2.2.4 C^*-Algebren ohne Eins

Der Satz von Gelfand-Naimark gilt genauso für C^*-Algebren ohne Eins. Die Konstruktion des Hilbertraumes und der Isometrie verläuft ähnlich, allerdings treten verschiedene technische Komplikationen auf.

Statt Zuständen betrachtet man positive Funktionale. Das sind lineare Funktionale τ mit $\tau(A^+) \subseteq \mathbb{R}^+$.
In C^*-Algebren mit Eins entsprechen die Zustände genau den positiven Funktionalen mit Norm 1.
Statt einem Einselement e verwendet man eine approximative Eins, also ein Netz $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von positiven Elementen in $K_1(0)$ mit $a = \lim_\lambda u_\lambda a, \ \forall a \in A$. So eine approximative Eins existiert in jeder C^*-Algebra.

Literatur

[1] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, Springer Verlag

[2] Michael Kaltenbäck und Manuel Weberndorfer, *Funktionalanalysis 2*

[3] Gerard J.Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press INC.