Metrisierbarkeit

Technische Universität Wien
Seminararbeit aus Analysis
WS 2014

Sinan Özcaliskan

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit beschäftigen wir uns mit einem Problem aus der Topologie, dem Metrisierbarkeitsproblem. Dabei handelt es sich um die Frage, ob auf einem topologischen Raum eine Metrik definiert werden kann, die die Topologie induziert. Wir werden hier drei Metrisierbarkeitssätze beweisen, den Satz von Alexandroff-Urysohn, den Satz von Nagata-Smirnov und den ersten Metrisierbarkeitssatz von Bing. Unter einem Metrisierbarkeitssatz verstehen wir eine Aussage, die eine hinreichende und notwendige Bedingung für Metrisierbarkeit liefert.

Bevor wir diese Sätze herleiten, wollen wir explizit die Definition von Metrisierbarkeit formulieren.

Definition 1.1 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt metrisierbar, falls eine Metrik d auf X existiert, sodass die von ihr induzierte Topologie $\mathcal{T}(d)$ mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt.*

2 Der Metrisierbarkeitssatz von Alexandroff-Urysohn

Wir werden zunächst den Satz von Alexandroff-Urysohn beweisen. Dafür benötigen wir den Begriff der Verfeinerung und der Sternmenge.

Definition 2.1 *Es sei X eine Menge, $x \in X$, $A \subseteq X$ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann definiert man:*

$$S(x,\mathcal{U}) := \bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\},$$
$$S(A,\mathcal{U}) := \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\},$$
$$\mathcal{U}^* := \{S(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}.$$

Die Menge $S(x,\mathcal{U})$ heißt der Stern von x bezüglich $\mathcal{U}$ und die Menge $S(A,\mathcal{U})$ der Stern von A bezüglich $\mathcal{U}$.

Definition 2.2 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ zwei Überdeckungen von X.*

1. *$\mathcal{V}$ heißt eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, falls für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit der Eigenschaft $V \subseteq U$.*
2. *$\mathcal{V}$ heißt eine Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$, falls $\mathcal{V}^*$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist.*

Für den Beweis des Satzes von Alexandroff-Urysohn werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 2.3 *Es sei X eine Menge und A eine Teilmenge von X. Es seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ zwei Überdeckungen von X. Ist $\mathcal{V}$ eine Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$, dann gilt $S(S(A,\mathcal{V}),\mathcal{V}) \subseteq S(A,\mathcal{U})$.*

Beweis: Es gilt $S(A,\mathcal{U}) := \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}$ und

$$S(S(A,\mathcal{V}),\mathcal{V}) = \bigcup\{V' \in \mathcal{V} : S(A,\mathcal{V}) \cap V' \neq \emptyset\} =$$
$$= \bigcup\{V' \in \mathcal{V} : (\exists V \in \mathcal{V} : A \cap V \neq \emptyset, V \cap V' \neq \emptyset)\}.$$

Kommt V' in dieser Vereinigung vor, dann wähle ein $V \in \mathcal{V}$ mit $A \cap V \neq \emptyset$ und $V \cap V' \neq \emptyset$. Wegen $\mathcal{V}^* < \mathcal{U}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $S(V,\mathcal{V}) \subseteq U$. Es gilt $V' \subseteq S(V,\mathcal{V}) \subseteq U$ und $U \cap A \supseteq S(V,\mathcal{V}) \cap A \supseteq V \cap A \neq \emptyset$, also folgt $U \subseteq S(A,\mathcal{U})$. Daher erhält man $V' \subseteq S(A,\mathcal{U})$. Insgesamt folgt damit die Behauptung.

■

Satz 2.4 (Metrisierbarkeitssatz von Alexandroff-Urysohn) *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer T_0-Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls eine Folge von offenen Überdeckungen $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X existiert mit folgenden zwei Eigenschaften:*

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{U}_{n+1}^* < \mathcal{U}_n$.

(b) $\forall x \in X : \mathfrak{B}(x) := \{S(x,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *ist eine Umgebungsbasis von* x *in* $(X,\mathcal{T})$.

Beweis: Sei zunächst $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar. Sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Weiters sei $U_\epsilon(x)$ die offene Kugel mit Radius ϵ und Mittelpunkt x bezüglich der Metrik d, dann sind die Mengensysteme $\mathcal{U}_n := \{U_{3^{-n}}(x) : x \in X\}$, $n \in \mathbb{N}$, offene Überdeckungen von X und erfüllen die beiden obigen Eigenschaften. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das $\mathcal{U}_n$ eine offene Überdeckung von X ist, ist klar. Nun wollen wir die erste Eigenschaft nachweisen. Wir betrachten ein $W \in \mathcal{U}_{n+1}^*$. Es existiert ein $x \in X$ mit der Eigenschaft

$$W = S(U_{3^{-(n+1)}}(x),\mathcal{U}_{n+1}).$$

Sei nun $y \in W$, daher existiert ein $a \in X$ mit

$$U_{3^{-(n+1)}}(a) \cap U_{3^{-(n+1)}}(x) \neq \emptyset \text{ und } y \in U_{3^{-(n+1)}}(a).$$

Daher existiert ein $b \in U_{3^{-(n+1)}}(a) \cap U_{3^{-(n+1)}}(x)$ mit

$$d(y,x) \leq d(y,a) + d(a,x) < \frac{1}{3^{n+1}} + d(a,b) + d(b,x) < \frac{1}{3^n},$$

also gilt $y \in U_{3^{-n}}(x)$ und $U_{3^{-n}}(x) \in \mathcal{U}_n$. Damit ist $\mathcal{U}_{n+1}$ eine Sternverfeinerung von $\mathcal{U}_n$.

Als nächstes zeigen wir, dass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{S(x,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x in $(X,\mathcal{T})$ ist. Sei daher $x \in X$. Es ist klar, dass jede Menge aus $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebung von x ist. Nun betrachten wir eine Menge $U \in \mathfrak{U}(x)$. Daher gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq U$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^{n-1}} < \epsilon$ gilt nun $S(x,\mathcal{U}_n) \subseteq U$. Damit ist $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von x.

Wir setzen nun voraus, dass eine Folge $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den oben erwähnten beiden Eigenschaften existiert. Wir werden nun eine Metrik d auf X konstruieren, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Dafür definieren für jede rationale Zahl der Gestalt $q = \frac{k}{2^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$ ein Mengensystem $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$. Dazu gehen wir induktiv vor. Für $n = 1$ definieren wir $\mathcal{V}(\frac{1}{2}) := \mathcal{U}_1$. Sind im n-ten Schritt die Mengensysteme $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ bereits definiert, dann definiert man im $n+1$-ten Schritt

$$\mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) := \mathcal{U}_{n+1},\ \mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) := \mathcal{V}\Big(\frac{k/2}{2^n}\Big), \quad \text{falls } k \text{ gerade},$$
$$\mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) := \{S(V,\mathcal{U}_{n+1}) : V \in \mathcal{V}\Big(\frac{[k/2]}{2^n}\Big)\}, \quad \text{falls } k \in \{3, 5, ..., 2^{n+1} - 1\}.$$

Damit ist für jede rationale Zahl q, die sich in der Form $q = \frac{k}{2^n}$ schreiben lässt, ein Mengensystem $\mathcal{V}(q)$ wohldefiniert. Wir werden nun durch vollständige Induktion zeigen, dass jedes dieser Mengensysteme eine offene Überdeckung von X ist. $n = 1$: $\mathcal{U}_1$ ist eine offene Überdeckung von X. $n \mapsto n + 1$: $\mathcal{U}_{n+1}$ ist eine offene Überdeckung von X, $\mathcal{V}(\frac{k/2}{2^n})$ ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung, schließlich $\mathcal{V}(\frac{k}{2^{n+1}})$ ebenfalls, denn $S(V,\mathcal{U}_{n+1}) \supseteq V$ und $\mathcal{V}(\frac{[k/2]}{2^n})$ ist eine Überdeckung nach Induktionsvoraussetzung. Weiters definieren wir $\mathcal{V}(1) := \{X\}$.

Wir zeigen nun induktiv die folgende Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$. Dann existiert für jedes $V \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ ein $V' \in \mathcal{V}(\frac{k+1}{2^n})$ mit $S(V,\mathcal{U}_n) \subseteq V'$. Es zeigen die Behauptung zunächst für $n = 1$. Es gilt $\mathcal{V}(\frac{1}{2}) = \mathcal{U}_1$ und $\mathcal{V}(\frac{2}{2}) = \{X\}$, also ist die Behauptung richtig. $n \mapsto n + 1$: Sei $1 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$. Betrachte zuerst den Fall, dass k gerade ist. Dann gilt

$$\mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{k/2}{2^n}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{[\frac{k+1}{2}]}{2^n}\Big).$$

Ist nun $V \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^{n+1}})$ gegeben, so ist nach der Definition von $\mathcal{V}(\frac{k+1}{2^{n+1}})$

$$S(V,\mathcal{U}_{n+1}) \in \mathcal{V}\Big(\frac{k+1}{2^{n+1}}\Big).$$

Wir können also $V' := S(V,\mathcal{U}_{n+1})$ wählen. Nun betrachten wir den Fall, dass $k = 1$ ist. Dann ist $\mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}) = \mathcal{U}_{n+1}$ und $\mathcal{V}(\frac{1+1}{2^{n+1}}) = \mathcal{U}_n$. Wegen der ersten Voraussetzung des Satzes gilt $\mathcal{U}_{n+1}^* < \mathcal{U}_n$. Ist also $V \in \mathcal{U}_{n+1}$, so gibt es ein $V' \in \mathcal{U}_n$ mit $S(V,\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq V'$. Wir betrachten schließlich den Fall $k \in \{3, 5, ..., 2^{n+1} - 1\}$. Setze $k' := [\frac{k}{2}]$, d.h. $k = 2k' + 1$, dann ist $k' \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$. Sei $V \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^{n+1}})$, dann gibt es nach Definition ein $V'' \in \mathcal{V}(\frac{k'}{2^n})$ mit $V = S(V'', \mathcal{U}_{n+1})$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $V' \in \mathcal{V}(\frac{k'+1}{2^n})$ mit $V' \supseteq S(V'', \mathcal{U}_n)$. Wir erhalten wegen der ersten Voraussetzung des Satzes und Lemma 2.3 die Aussage

$$S(V, \mathcal{U}_{n+1}) = S(S(V'', \mathcal{U}_{n+1}), \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq S(V'', \mathcal{U}_n) \subseteq V'.$$

Es seien nun q, q' zwei rationale Zahlen der Gestalt $q = \frac{k}{2^n}$ und $q' = \frac{k'}{2^n}$ mit $k < k'$ und $k, k' \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$. Wegen dem letzten Schritt gilt insbesondere $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n}) < \mathcal{V}(\frac{k+1}{2^n}) < ... < \mathcal{V}(\frac{k'}{2^n})$ und daher $\mathcal{V}(q) < \mathcal{V}(q')$. Mit diesem Resultat erhält man allgemein die Aussage $\mathcal{V}(q) < \mathcal{V}(q')$ mit $q = \frac{k}{2^n}$ und $q' = \frac{k'}{2^{n'}}$, wobei $q < q'$, $k \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$ und $k' \in \{1, 2, ..., 2^{n'} - 1\}$.

Wir definieren jetzt zwei Funktion ϕ und d.

$$\phi : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \inf\Big\{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, .., 2^n - 1\}, y \in S(x, \mathcal{V}(\frac{k}{2^n})\Big\},$$
$$d : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sup\Big\{|\phi(x, z) - \phi(y, z)| : z \in X\Big\}.$$

Wir zeigen nun, dass d eine Metrik auf X ist. Es gilt $d(x, y) = d(y, x)$ und $d(x, x) = 0$ für alle $x, y \in X$. Seien nun $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Wir werden nun die Tatsache benutzen, dass

$$d(x, y) \geq |\phi(x, y) - \phi(y, y)| = \phi(x, y). \tag{1}$$

Es seien $x, y \in X$ und $\mathcal{V}$ eine beliebige Überdeckung von X. Nun gilt $x \in S(y, \mathcal{V})$ genau dann, falls $y \in S(x, \mathcal{V})$. Wegen der zweiten Voraussetzung des Satzes und da $(X, \mathcal{T})$ ein T_0-Raum ist, existiert daher ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \notin S(x, \mathcal{U}_n) = S(x, \mathcal{V}(\frac{1}{2^n}))$, und da $\mathcal{V}(q) < \mathcal{V}(\frac{1}{2^n})$ für alle q mit $q < \frac{1}{2^n}$ gilt, folgt $y \notin S(x, \mathcal{V}(q))$, für jedes q mit dieser Eigenschaft. Daher gilt $\phi(x, y) \geq \frac{1}{2^n}$ und daher insbesondere $d(x, y) \neq 0$. Es seien nun $x, y, a \in X$, dann gilt

$$d(x, y) = \sup\{|\phi(x, z) - \phi(y, z)| : z \in X\} \leq \sup\{|\phi(x, z) - \phi(a, z)| : z \in X\} +$$
$$\sup\{|\phi(a, z) - \phi(y, z)| : z \in X\} = d(x, a) + d(a, y).$$

Wir zeigen nun, dass die von der Metrik d induzierte Topologie gleich $\mathcal{T}$ ist. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(x)$ den Umgebungsfilter von x im Raum $(X, \mathcal{T})$ und mit $U_\epsilon(x)$ die ϵ Kugel von x im Raum $(X, \mathcal{T}(d))$. Es sei ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gegeben. Wegen der zweiten Voraussetzung des Satzes existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U$. Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2^n}$ und $y \in U_\epsilon(x)$. Es gilt $d(x, y) < \epsilon$ und es folgt wegen (1.1), dass auch $\phi(x, y) < \epsilon$ ist. Daher existiert ein $0 < \delta < \epsilon$ mit $y \in S(x, \mathcal{V}(\delta)) \subseteq S(x, \mathcal{V}(\frac{1}{2^n})) = S(x, \mathcal{U}_n)$. Damit folgt

$$U_\epsilon(x) \subseteq U.$$

Wir werden nun zeigen, dass es umgekehrt zu jeder Kugel $U_\epsilon(x)$ ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt mit $U \subseteq U_\epsilon(x)$. Dazu benötigen wir folgende Hilfsaussage. Es seien $x, y \in X$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass $x \in S(y, \mathcal{U}_{n+1})$, dann gilt folgende Aussage:

$$\forall z \in X : \phi(x, z) \leq \phi(y, z) + \frac{3}{2^{n+1}}. \tag{2}$$

Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir drei Fälle:

(1) $\phi(y, z) < \frac{1}{2^n}$

(2) $\exists k \in \{2, 3, ..., 2^{n-1}\} : \frac{k-1}{2^n} \leq \phi(y, z) < \frac{k}{2^n}$

(3) $\frac{2^n - 1}{2^n} \leq \phi(y, z)$

ad(1): Da $\phi(y, z) < \frac{1}{2^n}$, folgt $z \in S(y, \mathcal{V}(\frac{1}{2^n}))$, also existiert ein $V' \in \mathcal{V}(\frac{1}{2^n})$ mit $z, y \in V'$. Nun gilt $x \in S(y, \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}))$ und daher auch $x \in S(V', \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}))$. Offenbar ist auch $z \in V' \subseteq S(V', \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}))$. Nach Definition gilt

$$V := S(V', \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}})) = S(V', \mathcal{U}_{n+1}) \in \mathcal{V}(\frac{3}{2^{n+1}}),$$

und wir schließen, dass $z \in S(x, \mathcal{V}(\frac{3}{2^{n+1}}))$, denn $x, z \in V$. Also haben wir $\phi(x,z) \leq \frac{3}{2^{n+1}}$ und daher

$$\phi(x,z) - \phi(y,z) \leq \phi(x,z) \leq \frac{3}{2^{n+1}}.$$

ad(2): In diesem Fall ist $\phi(y,z) < \frac{k}{2^n}$, also $z \in S(y, \mathcal{V}(\frac{k}{2^n}))$, und daher gibt es ein $V' \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ mit $z, y \in V'$. Es gilt

$$x \in S(y, \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}})) \subseteq S(V', \mathcal{U}_{n+1}) =: V \in \mathcal{V}(\frac{2k+1}{2^{n+1}}),$$

sowie $z \in V' \subseteq V$. Dadurch erhalten wir $z \in S(x, \mathcal{V}(\frac{2k+1}{2^{n+1}}))$ und damit $\phi(x,z) \leq \frac{2k+1}{2^{n+1}}$. Also erhalten wir

$$\phi(x,z) \leq \frac{2k-2}{2^{n+1}} + \frac{3}{2^{n+1}} \leq \phi(y,z) + \frac{3}{2^{n+1}}.$$

ad(3): Es gilt $\phi(x,z) \leq 1 < \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} = \frac{2^n-1}{2^n} + \frac{3}{2^{n+1}} \leq \phi(y,z) + \frac{3}{2^{n+1}}$.Damit erhalten wir die Aussage (1.2). Es gilt $x \in S(y, \mathcal{U}_{n+1})$ genau dann, falls $y \in S(x, \mathcal{U}_{n+1})$. Daher kann man diese Hilfsaussage auch nachweisen, indem man die Rollen von x und y vertauscht. Damit erhält man auch die Aussage

$$\forall z \in X : \phi(y,z) - \phi(x,z) \leq \frac{3}{2^{n+1}}. \tag{3}$$

Aus (1.2) und (1.3) erhält man damit die Aussage

$$\forall z \in X : |\phi(x,z) - \phi(y,z)| \leq \frac{3}{2^{n+1}}$$

und daher schlussendlich

$$d(x,y) \leq \frac{3}{2^{n+1}}.$$

Wir betrachten nun ein $\epsilon > 0$ und ein $x \in X$. Wir wählen jetzt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{3}{2^{n+1}} < \epsilon$. Weiters setzen wir $U := S(x, \mathcal{U}_{n+1})$. Da $\mathcal{U}_{n+1}$ eine offene Überdeckung von X ist, gilt $U \in \mathfrak{U}(x)$. Für ein $y \in U$ gilt $d(x,y) \leq \frac{3}{2^{n+1}} < \epsilon$ und damit ist $y \in U_\epsilon(x)$. Damit gilt $U \subseteq U_\epsilon(x)$.

Wir betrachten nun ein $O \in \mathcal{T}$ und ein $x \in O$. Da x ein innerer Punkt von O ist, existiert ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U \subseteq O$. Wir haben nachgewiesen, dass es jetzt ein $\epsilon > 0$ gibt mit $U_\epsilon(x) \subseteq U$. Damit erhalten wir

$$x \in U_\epsilon(x) \subseteq O.$$

Damit ist O eine Umgebung von x in $(X, \mathcal{T}(d))$ und daher gilt $O \in \mathcal{T}(d)$. Sei nun umgekehrt $O \in \mathcal{T}(d)$ und $x \in O$. Es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq O$. Wir haben nachgewiesen, dass es jetzt ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt mit $U \subseteq U_\epsilon(x)$. Daher gibt es ein $W \in \mathcal{T}$ mit

$$x \in W \subseteq O.$$

Damit ist O eine Umgebung von x in $(X, \mathcal{T})$ und daher gilt $O \in \mathcal{T}$. Damit erhalten wir $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$.

■

3 Der Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov und der erste Metrisierbarkeitssatz von Bing

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst den Satz von Nagata-Smirnov beweisen und aus dieser Aussage den ersten Metrisierbarkeitssatz von Bing herleiten. Diese beiden Sätze sind ähnlich und man erhält unmittelbar aus dem Satz von Nagata-Smirnov den ersten Metrisierbarkeitssatz von Bing. Die beiden Aussagen wurden aber unabhängig voneinander bewiesen. Wir werden hier wieder einige neue Begriffe einführen, die im Laufe dieses Abschnitts immer wieder verwendet werden. Zuerst definieren wir den Begriff des (σ-)lokal endlichen bzw. des (σ-)diskreten Mengensystems.

Definition 3.1 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem.*

1. *$\mathcal{U}$ heißt lokal endlich, falls für jeden Punkt $x \in X$ ein $W \in \mathfrak{U}(x)$ existiert mit der Eigenschaft, dass W mit höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ nichtleeren Durchschnitt besitzt.*
2. *$\mathcal{U}$ heißt σ-lokal endlich, falls eine Folge $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von lokal endlichen Mengensystemen existiert, sodass $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$.*
3. *$\mathcal{U}$ heißt diskret, falls für jeden Punkt $x \in X$ ein $W \in \mathfrak{U}(x)$ existiert mit der Eigenschaft, dass W mit höchstens einer Menge aus $\mathcal{U}$ nichtleeren Durchschnitt besitzt.*
4. *$\mathcal{U}$ heißt σ-diskret, falls eine Folge $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von diskreten Mengensystemen existiert, sodass $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$.*

Hat man endlich viele Teilmengen eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$, dann ist der Abschluss der Vereinigung dieser Mengen gleich der Vereinigung der Abschlüsse. Vereinigt man hingegen unendlich viele Mengen, dann muss dies nicht mehr gelten. Im folgenden Lemma werden wir nachweisen, dass bei lokal endlichen Mengensystemen Abschlussbildung und Vereinigung stets vertauscht werden können.

Lemma 3.2 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein lokal endliches Mengensystem. Dann gilt*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U}.$$

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ eine lokal endliches Mengensystem und $x \notin \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass es eine Umgebung W von x gibt, die mit jeder Menge $U \in \mathcal{U}$ leeren Schnitt besitzt. Damit würde dann gelten

$$W \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset.$$

Damit gilt

$$x \notin \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U}.$$

Die umgekehrte Inklusion folgt aus der Tatsache, dass für jedes $U \in \mathcal{U}$ gilt

$$\overline{U} \subseteq \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U}.$$

Nun betrachten wir den Fall, dass eine Umgebung V von x existiert mit der Eigenschaft, dass V mit endlich vielen Mengen, $U_1, ..., U_n$ mit $U_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$, nichtleeren Schnitt besitzt. Es gilt $x \notin \overline{U_i}$, daher ist $\overline{U_i}^c$ eine offene Umgebung von x. Daher ist auch

$$W := V \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_i}^c$$

eine Umgebung von x. Nun gilt $W \cap U_i = \emptyset$, für alle $i = 1, ..., n$, denn $\overline{U_i}^c \cap U_i = \emptyset$. Ist $U \in \mathcal{U}$ und $U \notin \{U_1, ..., U_n\}$, dann gilt $V \cap U = \emptyset$. Also folgt auch in diesem Fall $W \cap U = \emptyset$. Daher erhält man

$$W \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset$$

und daher

$$x \notin \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U}.$$

Die umgekehrte Inklusion erhält man wie beim ersten Fall.

■

Als nächstes wollen wir ein Aussage nachweisen, die eine hinreichende Bedingung für Normalität liefert.

Lemma 3.3 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer T_1-Raum mit der Eigenschaft, dass für jede abgeschlossene Teilmenge F von X und jede offene Teilmenge W von X, die F enthält, eine Folge $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von X existiert, sodass $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ und $\overline{W_n} \subseteq W$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ normal.*

Beweis: Es seien A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen der Menge X. Wir setzen nun $F := A$ und $W := X\backslash B$, dann gibt es eine Folge $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von X, sodass gilt

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \text{ und } B \cap \overline{W_n} = \emptyset \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir $F := B$ und $W := X\backslash A$, dann gibt es analog zu oben eine Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von X, sodass gilt

$$B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \text{ und } A \cap \overline{V_n} = \emptyset \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren jetzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils zwei Mengen,

$$G_n := W_n \backslash \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k} \text{ und } H_n := V_n \backslash \bigcup_{k\leq n} \overline{W_k}. \tag{4}$$

Offensichtlich sind G_n und V_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ offene Mengen. Wir definieren nun zwei Mengen U und V durch

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \text{ und } V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n.$$

Offensichtlich ist U eine offene Menge die A enthält und V eine offene Menge die B enthält. Nun zeigen wir, dass die beiden Mengen disjunkt sind. Wegen (2.1) erhalten wir $G_n \cap V_k = \emptyset$ für $k \leq n$ und daher $G_n \cap H_k = \emptyset$ für $k \leq n$. Analog erhält man $H_k \cap W_n = \emptyset$ für $n \leq k$ und daher $G_n \cap H_k = \emptyset$ für $n \leq k$. Daher folgt $G_n \cap H_k = \emptyset$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ und daher $U \cap V = \emptyset$.

■

Definition 3.4 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X.*

1. *Die Menge A heißt eine G_δ-Teilmenge von X, falls sie dargestellt werden kann als der Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Teilmengen von X.*
2. *Die Menge A heißt eine F_σ-Teilmenge von X, falls A^c eine G_δ-Teilmenge von X ist.*
3. *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt perfectly normal, falls er normal ist und falls jede abgeschlossene Teilmenge von X eine G_δ-Teilmenge ist.*

Im folgenden Korollar verwenden wir den Begriff der σ-lokal endlichen Basis. Das ist eine Basis des Raums, die dargestellt werden kann als Vereinigung von abzählbar vielen lokal endlichen Mengensystemen. Diese Mengensysteme müssen aber keine Basen des Raums sein.

Korollar 3.5 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum mit einer σ-lokal endlichen Basis. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ perfectly normal.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$ eine $\sigma-$lokal endliche Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Wir betrachten eine abgeschlossene Teilmenge F und eine offene Teilmenge W von X mit $F \subseteq W$. Da der Raum regulär ist, existiert für jedes $x \in W$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ und eine offene Menge $O_x \in \mathfrak{B}_{n(x)}$ mit $x \in O_x \subseteq \overline{O_x} \subseteq W$. Wir definieren jetzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die offene Menge $W_n := \bigcup_{x\in W}\{O_x : n(x) = n\}$. Es gilt $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ und wegen Lemma 3.2 gilt $\overline{W_n} \subseteq W$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Normalität des Raums folgt nun mit Lemma 3.3 und wegen $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{W_n}$ ist der Raum sogar perfectly normal.

■

Wir kommen nun zu einer wichtigen Aussage in der Topologie, die aus historischen Gründen als das Lemma von Urysohn bezeichnet wird. Sie stellt einen Charakterisierung der topologischen Räume dar, die die Trennungseigenschaft T_4 besitzen. Wir werden diesen Satz hier nicht beweisen, da er in den Grundlagenvorlesungen über Analysis bewiesen wird. Den Beweis dieses Satzes findet man natürlich auch in der Literatur.

Satz 3.6 (Lemma von Urysohn) *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom T_4 genau dann, falls gilt: Sind A, B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X, dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.*

■

Korollar 3.7 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer T_4-Raum und $A \subseteq X$. Dann ist A eine abgeschlossene G_δ-Teilmenge von X genau dann, falls eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ existiert mit $A = f^{-1}(\{0\})$.*

Beweis: Sei $A \subseteq X$ und es soll eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ existieren mit $A = f^{-1}(\{0\})$. Als Urbild einer abgeschlossen Menge unter einer stetigen Abbildung ist A damit abgeschlossen. A ist eine G_δ-Teilmenge von X, da gilt $A = f^{-1}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, \frac{1}{n})) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([0, \frac{1}{n}))$.

Sei nun A eine abgeschlossene G_δ-Teilmenge eines T_4-Raumes X. Dann existiert eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X mit $X\backslash A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, da das Komplement von A eine F_σ-Teilmenge von X ist. Wegen dem Lemma von Urysohn existiert nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : X \to [0, 1]$ mit $f_n(F_n) = \{1\}$ und $f_n(A) = \{0\}$. Da f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist und die Folge $(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} f_n)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$f : X \to [0, 1] : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

konvergiert, ist auch die Funktion f stetig. Nun gilt für ein $x \in A$, dass $f(x) = 0$ und für ein $x \notin A$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) = 1$. Daher gilt $f(x) \geq \frac{1}{2^n} f_n(x) = \frac{1}{2^n} > 0$. Damit erhält man $A = f^{-1}(\{0\})$.

■

Geht man im obigen Korollar zu den Komplementen über erhält man folgende Aussage.

Korollar 3.8 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer T_4-Raum und $A \subseteq X$. Dann ist A eine offene F_σ-Teilmenge von X genau dann, falls eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ existiert mit $A = f^{-1}((0, 1])$.*

■

Nun wollen wir den Begriff der kompatiblen Familie einführen und daraus eine Aussage gewinnen die stetige Funktionen charakterisiert.

Definition 3.9 *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen mit $f_i : (U_i, \mathcal{T}|_{U_i}) \to (Y, \mathcal{R})$, für alle $i \in I$.*

1. *Die Familie $(f_i)_{i\in I}$ heißt kompatibel, falls für alle $i, j \in I$ gilt $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$.*
2. *Für eine kompatible Familie $(f_i)_{i\in I}$ heißt die durch $f(x) = f_i(x)$ für $x \in U_i$ definierte Abbildung von $(X, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{R})$ die Kombination der Familie $(f_i)_{i\in I}$.*

Lemma 3.10 *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und $(f_i)_{i\in I}$ eine kompatible Familie von stetigen Abbildungen mit $f_i : (U_i, \mathcal{T}|_{U_i}) \to (Y, \mathcal{R})$ für alle $i \in I$. Dann ist die Kombination f dieser Familie ebenfalls stetig.*

Beweis: Sei U eine offene Teilmenge von Y. Es gilt

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(U).$$

Für jedes $i \in I$ ist die Menge $f_i^{-1}(U)$ offen in U_i und daher auch offen in X. Daher ist die Menge $f^{-1}(U)$ offen in X und deshalb ist f stetig.

■

Aus obigem Lemma erhält man unmittelbar folgende Aussage.

Korollar 3.11 *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume. Dann ist eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ stetig genau dann, falls für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f|_U : (U, \mathcal{T}|_U) \to (Y, \mathcal{R})$ stetig ist.*

■

Für den Beweis des Satzes von Nagata-Smirnov bzw. des ersten Metrisierbarkeitssatzes von Bing brauchen wir folgende wichtige Eigenschaft metrisierbarer Räume.

Satz 3.12 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert eine offene Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$, die lokal endlich und σ-diskret ist.*

Beweis: Es sei $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ eine offene Überdeckung von X und d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Wir wählen nun auf der Indexmenge S eine Relation $<$, sodass $(S, <)$ eine wohlgeordnete Menge ist. Weiters definieren wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein Mengensystem $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i} : s \in S\}$ von Teilmengen von X durch

$$V_{s,i} = \bigcup U_{\frac{1}{2^i}}(c),$$

wobei in dieser Vereinigung ein $c \in X$ genau dann vorkommt, falls es die folgenden 3 Bedingungen erfüllt:

(1) s ist das kleinste Element der Menge S mit der Eigenschaft $c \in U_s$

(2) $c \notin V_{t,j}$ für alle $t \in S$ und $j < i$

(3) $U_{\frac{3}{2^i}}(c) \subseteq U_s$

Die Mengen $V_{s,i}$ sind offen und wegen (3) gilt auch $V_{s,i} \subseteq U_s$. Sei nun $x \in X$. Wir betrachten das kleinste $s \in S$ mit $x \in U_s$ und ein $i \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $U_{\frac{3}{2^i}}(x) \subseteq U_s$. Nun gilt entweder $x \in V_{t,j}$ für ein $j < i$ und ein $t \in S$ oder $x \in V_{s,i}$. Damit erhält man insgesamt, dass $\mathcal{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist.

Wir zeigen nun, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ folgende Aussage gilt:

$$\text{Für alle } x_1 \in V_{s_1,i} \text{ und } x_2 \in V_{s_2,i} \text{ mit } s_1 \neq s_2 \text{ gilt } d(x_1, x_2) > \frac{1}{2^i}. \tag{5}$$

Es genügt wenn wir den Fall $s_1 < s_2$ betrachten. Es seien $x_1 \in V_{s_1,i}$ und $x_2 \in V_{s_2,i}$. Aufgrund der Definition der Mengen $V_{s_1,i}$ und $V_{s_2,i}$ existieren Punkte $c_1, c_2 \in X$, die die Bedingungen (1)-(3) erfüllen mit $x_1 \in U_{\frac{1}{2^i}}(c_1)$ und $x_2 \in U_{\frac{1}{2^i}}(c_2)$. Aus (3) folgt $U_{\frac{3}{2^i}}(c_1) \subseteq U_{s_1}$ und aus (1) erhält man $c_2 \notin U_{s_1}$. Damit folgt $d(c_1, c_2) \geq \frac{3}{2^i}$. Wendet man nun zwei mal die Dreiecksungleichung an erhält man schlussendlich

$$d(x_1, x_2) \geq d(c_1, c_2) - d(x_1, c_1) - d(x_2, c_2)$$

und damit die Behauptung (2.2). Sei nun $x \in X$ und $i \in \mathbb{N}$. Dann kann die offene Kugel $U_{\frac{1}{2^{i+1}}}(x)$ wegen (2.2) mit höchstens einer Menge aus $\mathcal{V}_i$ nichtleeren Schnitt besitzen. Damit ist das Mengensystem $\mathcal{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ σ-diskret.

Nun wollen wir nachweisen, dass $\mathcal{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_i$ auch lokal endlich ist. Wir zeigen nun, dass für jedes $t \in S, x \in X$ und alle natürlichen Zahlen $j, k \in \mathbb{N}$ folgende Aussage gilt:

$$\text{Aus } U_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq V_{t,j} \text{ folgt } U_{\frac{1}{2^{i+k}}}(x) \cap V_{s,i} = \emptyset \;\text{ für alle } i \geq j + k, s \in S. \tag{6}$$

Seien also $s, t \in S, i, j, k \in \mathbb{N}$ mit $i \geq j + k$ und $x \in X$. Ein Punkt $c \in X$ in der Definition von $V_{s,i}$ ist wegen (2) und $i \geq j + k$ kein Element der Menge $V_{t,j}$. Wegen unserer Voraussetzung $U_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq V_{t,j}$ folgt daher $d(x, c) \geq \frac{1}{2^k}$ für jedes solche c. Aufgrund der Ungleichungen $j + k \geq k + 1$ und $i \geq k + 1$ erhält man daher $U_{\frac{1}{2^{j+k}}}(x) \cap U_{\frac{1}{2^i}}(c) = \emptyset$. Damit erhält man die Aussage (2.3). Sei nun $x \in X$, dann existieren $t \in S$ und $j, k \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq V_{t,j}$. Aufgrund von (2.3) kann nun die offene Kugel $U_{\frac{1}{2^{i+k}}}(x)$, wobei $i \geq j + k$, mit höchstens $j + k - 1$ Mengen aus $\mathcal{V}$ nichtleeren Schnitt besitzen. Daher ist $\mathcal{V}$ lokal endlich.

■

Das folgende Lemma liefert eine hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit von T_0-Räumen.

Lemma 3.13 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer T_0-Raum und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Halbmetriken auf X mit folgenden drei Eigenschaften:*

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in X : d_n(x, y) \leq 1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : d_n : (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ *ist stetig, wobei $\mathcal{E}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.*

(c) Für jedes $x \in X$ und für jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge A von X mit $x \notin A$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $d_n(x, A) := \inf\{d_n(x, a) : a \in A\} > 0$.

Dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar, wobei die Funktion

$$d : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x, y)$$

eine Metrik auf X ist, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert.

Beweis: Aufgrund von (a) existiert d. Man sieht unmittelbar, dass $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ gilt. Es seien nun $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da $(X, \mathcal{T})$ ein T_0-Raum ist, gilt $x \notin \overline{\{y\}}$ oder $y \notin \overline{\{x\}}$. Aufgrund von (c) folgt damit $d(x, y) > 0$, also ist d eine Metrik auf X. Wir wollen nun nachweisen, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ gilt. Dazu zeigen wir, dass $\overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\mathcal{T}(d)}$ für jede Teilmenge A von X gilt. Wir werden dabei die Tatsache

$$\overline{A}^{\mathcal{T}(d)} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

verwenden. Wir betrachten nun eine beliebige Teilmenge A von X. Sei $x \notin \overline{A}^{\mathcal{T}}$, dann gilt wegen (c), dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft $d_n(x, \overline{A}^{\mathcal{T}}) = r > 0$. Damit folgt

$$d(x, A) \geq d(x, \overline{A}^{\mathcal{T}}) \geq \frac{r}{2^n} > 0$$

und daher $x \notin \overline{A}^{\mathcal{T}(d)}$. Aufgrund von (b) ist $d : (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ eine stetige Funktion, da d_n stetig ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} d_n)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen d konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit von d erhält man auch die Stetigkeit der Funktion

$$f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E}) : x \mapsto d(x, A).$$

Sei nun $x \in \overline{A}^{\mathcal{T}}$. Dann gilt $f(x) \in f(\overline{A}^{\mathcal{T}}) \subseteq \overline{f(A)}^{\mathcal{E}} = \{0\}$. Daher folgt $d(x, A) = 0$ und daher $x \in \overline{A}^{\mathcal{T}(d)}$.

■

Lemma 3.14 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $(X, \mathcal{T})$ genau dann, falls für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathfrak{B}(x) := \{O \in \mathcal{B} : x \in O\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x ist.*

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $(X, \mathcal{T})$ ist. Es sei $x \in X$ und V eine Umgebung von x. Daher existiert ein $O' \in \mathcal{T}$ mit $x \in O' \subseteq V$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, existiert ein $O \in \mathcal{B}$ mit $x \in O \subseteq O' \subseteq V$, womit $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von x ist. Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass $\mathfrak{B}(x)$ für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis von $(X, \mathcal{T})$ ist. Es sei $O \in \mathcal{T}$. Für jedes $x \in O$ existiert nun ein $O_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in O_x \subseteq O$. Daher gilt $\bigcup_{x\in O} O_x = O$, womit $\mathcal{B}$ eine Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$ ist.

■

Satz 3.15 (Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov) *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls eine σ-lokal endliche Basis existiert.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ eine σ-lokal endliche Basis besitzt. Es existiert also eine Basis $\mathcal{B}$ von $(X, \mathcal{T})$ und eine Folge von lokal endlichen Mengensystemen $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Es sei weiters $\mathcal{B}_n = \{U_i : i \in I_n\}$. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in I_n$ existiert wegen Korollar 3.5 und Korollar 3.8 eine stetige Funktion $f_i : X \to [0,1]$ mit der Eigenschaft $U_i = f_i^{-1}((0,1])$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Mengensystem $\{W_i : i \in I_n\}$ mit $W_i := (U_i \times X) \cup (X \times U_i)$ lokal endlich in $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$ und es gilt $|f_i(x) - f_i(y)| = 0$, für alle $(x,y) \notin W_i$. Im Folgenden betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g_n : (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E}) : (x,y) \mapsto \sum_{i \in I_n} |f_i(x) - f_i(y)|.$$

Die Funktion g_n existiert, da fast alle Summanden der Reihe Null sind. Weiters ist die Funktion wegen Korollar 3.11 stetig. Es ist leicht einzusehen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch $d_n(x,y) :=\min\{1, g_n(x,y)\}$ eine Halbmetrik auf der Menge X definiert wird, die durch 1 beschränkt ist. Die Funktionen d_n sind weiters für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig und erfüllen damit die ersten beiden Punkte vom Lemma 3.13. Sei nun $x \in X$ und A eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von X mit $x \notin A$. Dann existiert ein $U \in \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $x \in U$ und $A \subseteq X \backslash U$. Da U in $\mathcal{B}$ liegt gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in I_n$ mit $U = U_i$ und $U_i \in \mathcal{B}_n$. Aufgrund der Tatsache, dass eine stetige Funktion $f_i : X \to [0,1]$ existiert mit $f_i(x) > 0$ und $f_i(A) = \{0\}$, folgt $\inf\{d_n(x,a) : a \in A\} \geq f_i(x) > 0$. Damit ist auch der dritte Punkt von Lemma 3.13 erfüllt und daher ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar.

Wir wollen nun voraussetzen, dass der Raum metrisierbar ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{B}_n$ eine, aufgrund von Satz 3.12 existierende, lokal endliche offene Verfeinerung des Mengensystems $\mathcal{U}_n := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$. Wir definieren nun das Mengensystem $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Wir betrachten ein $x \in X$ und eine Umgebung V des Punktes x. Damit existiert ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V$. Nun betrachten wir ein $W \in \mathcal{B}_{2n(x)}$, dass x enthält. Ein solches W existiert, da $\mathcal{B}_{2n(x)}$ eine Überdeckung von X ist. Da $\mathcal{B}_{2n(x)}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}_{2n(x)}$ ist, existiert ein $y \in X$ mit

$$x \in W \subseteq U_{\frac{1}{2n(x)}}(y) \subseteq U_{\frac{1}{n(x)}}(x) \subseteq V.$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass $\mathfrak{B}(x) := \{O \in \mathcal{B} : x \in O\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x ist. Wegen Lemma 3.14 ist $\mathcal{B}$ damit eine Basis des Raums $(X, \mathcal{T})$. Insgesamt erhalten wir, dass $\mathcal{B}$ sogar eine σ-lokal endliche Basis von $(X, \mathcal{T})$ ist.

■

Korollar 3.16 (Erster Metrisierbarkeitssatz von Bing) *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, falls eine σ-diskrete Basis existiert.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ eine σ-diskrete Basis besitzt, dann ist diese auch σ-lokal endlich und wegen dem Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar. Wenn umgekehrt der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar ist, dann sei $\mathcal{B}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine, aufgrund von Satz 3.12 existierende, σ-diskrete offene Verfeinerung des Mengensystems $\mathcal{U}_n := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$. Damit ist das Mengensystem $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine σ-diskrete Basis von $(X, \mathcal{T})$.

■

Literatur

[1] Engelking, Ryszard: *General Topology.* Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.

[2] Woracek, Harald: *Allgemeine Topologie.* Vorlesungsskript, Technische Universität Wien, 2003.