Vollständige Metrisierbarkeit

Technische Universität Wien
Seminararbeit aus Analysis
WS 2016

Sinan Özcaliskan

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der Satz von Cech, der vollständig metrisierbare topologische Räume charakterisiert. Man nennt einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar, falls eine Metrik auf der Menge X existiert, die die Topologie induziert. Vollständige Metrisierbarkeit bedeutet, dass unter allen Metriken die die Topologie $\mathcal{T}$ induzieren mindestens eine existiert, für die der metrische Raum (X, d) vollständig ist. Am Anfang wollen wir die grundlegenden Begriffe präzise definieren.

Definition 1.1. *Es sei X eine Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf X. Die beiden Metriken heißen äquivalent, falls sie dieselbe Topologie auf X induzieren.*

Definition 1.2.

1. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt metrisierbar, falls eine Metrik d auf X existiert, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$. Dabei bezeichnet $\mathcal{T}(d)$ die von der Metrik d induzierte Topologie.*

2. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt vollständig metrisierbar, falls der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar ist und falls eine Metrik d auf X existiert, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert und die Eigenschaft besitzt, dass der metrische Raum (X, d) vollständig ist.*

Beispiel 1.3. Ein einfaches Beispiel eines vollständig metrisierbaren topologischen Raums ist eine Menge $X \neq \emptyset$, versehen mit der diskreten Topologie, also der topologische Raum $(X, \mathcal{P}(X))$. Dieser topologische Raum ist metrisierbar, da die Metrik

$$d : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die diskrete Topologie induziert. Eine Folge ist genau dann konvergent im metrischen Raum (X, d), falls sie ab einem Index konstant ist. Das Gleiche gilt auch für die Cauchyeigenschaft. Damit ist der metrische Raum (X, d) vollständig und der topologische Raum $(X, \mathcal{P}(X))$ vollständig metrisierbar.

■

Im Allgemeinen ist es bei einem vollständig metrisierbaren Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht der Fall, dass für jede Metrik d die $\mathcal{T}$ induziert der metrische Raum (X, d) vollständig ist. Wenn d_1 und d_2 zwei äquivalente Metriken sind, dann ist eine Folge genau dann konvergent im Raum (X, d_1), falls sie im Raum (X, d_2) konvergiert. Wenn aber eine Folge im Raum (X, d_1) eine Cauchyfolge ist, dann muss sie im Raum (X, d_2) keine Cauchyfolge sein. Dass heißt, dass beim Übergang zu äquivalenten Metriken Konvergenz und Divergenz erhalten bleiben, nicht aber unbedingt die Cauchyeigenschaft. Man kann den Begriff der äquivalenten Metrik auch anders einführen, indem man definiert, dass zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X äquivalent sind, falls zwei positive Konstante $a, b \in \mathbb{R}_+$ existieren mit

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y) \ \forall x, y \in X.$$

Zwei Metriken auf X, die die obige Bedingung erfüllen sind äquivalent im Sinne von Definition 1.1 und es gilt dann auch noch zusätzlich, dass eine Folge genau dann eine Cauchyfolge in (X, d_1) ist, falls sie eine Cauchyfolge in (X, d_2) ist. Geht man hingegen von der Definition 1.1 des Äquivalenzbegriffs aus, dann müssen für zwei äquivalente Metriken keine positiven Konstanten wie oben existieren.

2 Der Satz von Cech

Definition 2.1. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

1. *Der Raum erfüllt das Trennungsaxiom T_1, falls jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.*

2. *Der Raum erfüllt das Trennungsaxiom T_3, falls für jedes $x \in X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ offene Mengen O_x und O_A existieren mit $x \in O_x, A \subseteq O_A$ und $O_x \cap O_A = \emptyset$.*

3. *Der Raum erfüllt das Trennungsaxiom $T_{3.5}$, falls für jedes $x \in X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ eine stetige Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ existiert mit $f(x) = 0$ und $f(A) = \{1\}$.*

4. *Der Raum heißt regulär, falls er T_1 und T_3 erfüllt.*

5. *Der Raum heißt vollständig regulär, falls er T_1 und $T_{3.5}$ erfüllt.*

Lemma 2.2. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär.*

Beweis: Wir wählen eine Metrik d auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Dass einpunktige Mengen abgeschlossen sind ist klar. Wir wollen nun die Trennungseigenschaft $T_{3.5}$ nachweisen und betrachten daher ein $x \in X$ und eine abgeschlossene Teilmenge A von X mit $x \notin A$. Dann ist die Abbildung

$$f : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]}) : y \mapsto \frac{d(x,y)}{d(x,y) + d(y,A)}$$

stetig und erfüllt $f(x) = 0$ und $f(A) = \{1\}$. Dabei definieren wir $d(y, A) := \inf\{d(y,a) : a \in A\}$.

■

Definition 2.3. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume. Dann heißt eine bijektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ ein Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind. Die Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ heißen homöomorph, falls mindestens ein Homöomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{R})$ existiert.*

Definition 2.4.

1. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume. Weiters sei $c : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ eine Abbildung. Das Paar $(c, (Y, \mathcal{R}))$ heißt eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$, falls $(Y, \mathcal{R})$ ein kompakter T_2-Raum ist und die Abbildung c ein Homöomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ auf $(c(X), \mathcal{R}|_{c(X)})$ mit der Eigenschaft $\overline{c(X)}^{\mathcal{R}} = Y$. In disesem Fall schreibt man $(cX, \mathcal{T}_c)$ für den Raum $(Y, \mathcal{R})$.*

2. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt Tychonoffraum, falls er mindestens eine Kompaktifizierung besitzt.*

Wir werden in dieser Arbeit sowohl das Paar $(c, (Y, \mathcal{R}))$ als auch den Raum $(Y, \mathcal{R})$ selbst als Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen.

Satz 2.5. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann existiert eine Menge S, sodass der Raum $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Produktraums $(\prod_{s \in S}[0,1], \prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist.*

Beweis: Der Raum $(X, \mathcal{T})$ sei vollständig regulär. Es sei S die Menge aller stetigen Abbildungen $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$, dann ist die Menge S punktrennend, das heißt, zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ existiert eine Funktion $f \in S$ mit der Eigenschaft $f(x) \neq f(y)$. Dies folgt sofort aus der Eigenschaft, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist. Damit ist die Abbildung

$$\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (\prod_{f \in S}[0,1], \prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})) : x \mapsto (f(x))_{f \in S}$$

injektiv. Da für jedes $f \in S$ die Abbildung

$$\pi_f \circ \Phi : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]}) : x \mapsto f(x)$$

stetig ist, folgt aufgrund der Konstruktion der Produkttopologie, dass die Abbildung Φ stetig ist. Damit folgt insgesamt also, dass die Abbildung

$$\Phi' : (X, \mathcal{T}) \to (\Phi(X), (\prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\Phi(X)}) : x \mapsto (f(x))_{f \in S}$$

bijektiv und stetig ist. Wir werden nun zeigen, dass Φ' sogar ein Homöomorphismus ist. Dazu müssen wir noch zeigen, dass $(\Phi')^{-1}$ ebenfalls stetig ist. Es sei $x' \in \Phi(X)$ und $x \in X$ mit $x = (\Phi')^{-1}(x')$.

Weiters sei O eine offene Teilmenge von X die x enthält. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ das Trennungaxiom $T_{3.5}$ erfüllt, existiert eine stetige Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]})$ mit $f(x) = 0$ und $f(O^c) = \{1\}$. Wir definieren nun die Menge $V := \pi_f^{-1}([0,1))$, die in der Produkttopologie $\prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})$ liegt. Aufgrund der Tatsache $\pi_f(x') = f(x) = 0 \in [0,1)$ liegt der Punkt x' in V. Damit ist die Menge $V \cap \Phi(X)$ eine offene Umgebung des Punktes x' im Raum $(\Phi(X), (\prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\Phi(X)})$. Nun betrachten wir einen Punkt $x'' \in (\Phi')^{-1}(V \cap \Phi(X))$. Für diesen Punkt x'' gilt $\pi_f(\Phi'(x'')) = f(x'') \in [0,1)$. Damit gilt $x'' \in O$. Wir haben also die Mengeninklusion $(\Phi')^{-1}(V \cap \Phi(X)) \subseteq O$ nachgewiesen, womit auch die Abbildung $(\Phi')^{-1}$ stetig ist. Damit existiert eine Menge S, sodass der Raum $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Raums $(\prod_{f \in S}[0,1], \prod_{f \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist.

■

Korollar 2.6. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein Tychonoffraum.*

Beweis: Der Raum $(X, \mathcal{T})$ sei vollständig regulär, dann existiert wegen Satz 2.5 eine Menge S, sodass der Raum $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Produktraums $(\prod_{s \in S}[0,1], \prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist. Dieser Homöomorphismus sei $c : (X, \mathcal{T}) \to (c(X), (\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{c(X)})$. Wegen dem Produktsatz von Tychonoff ist der Raum $(\prod_{s \in S}[0,1], \prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ kompakt. Da $\overline{c(X)}^{\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})}$ eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums $(\prod_{s \in S}[0,1], \prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))$ ist, ist der Raum
$(\overline{c(X)}^{\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})}, (\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{c(X)}^{\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})}})$ kompakt. Damit ist
$(c, (\overline{c(X)}^{\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})}, (\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]}))|_{\overline{c(X)}^{\prod_{s \in S}(\mathcal{E}|_{[0,1]})}}))$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$.

■

Man kann auch zeigen, dass jeder Tychonoffraum vollständig regulär ist. Ein topologischer Raum besitzt also genau dann eine Kompaktifizierung, falls er vollständig regulär ist. Aus Lemma 2.2 und Korollar 2.6 folgt unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar 2.7. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein Tychonoffraum.*

■

Ein wichtiger Begriff bei der Untersuchung der vollständigen Metrisierbarkeit von topologischen Räumen ist der der G_δ-Teilmenge. Die andere wesentliche Begriffsbildung ist die Cech-Vollständigkeit von Tychonoffräumen

Definition 2.8. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

1. *Die Menge $G \subseteq X$ heißt eine G_δ-Teilmenge von X, falls sie dargestellt werden kann als der Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Teilmengen von X.*

2. *Die Menge $F \subseteq X$ heißt eine F_σ-Teilmenge von X, falls F^c eine G_δ-Teilmenge von X ist.*

Definition 2.9. *Ein Tychonoffraum $(X, \mathcal{T})$ heißt Cech-vollständig, falls für jede Kompaktifizierung $(c, (cX, \mathcal{T}_c))$ von $(X, \mathcal{T})$ die Menge $c(X)$ eine G_δ-Teilmenge des Raums $(cX, \mathcal{T}_c)$ ist.*

Definition 2.10.

1. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt* $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$ *der Durchmesser der Menge A.*

2. *Es sei X eine Menge, A eine Teilmenge von X und $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X. Man sagt, dass die Menge A einen kleineren Durchmesser als die Überdeckung $\mathcal{U}$ besitzt,* $\operatorname{diam}(A) < \mathcal{U}$, *falls eine Menge $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $A \subseteq U$.*

Satz 2.11. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein Tychonoffraum. Dann ist der Raum genau dann Cech-vollständig, falls für jede Kompaktifizierung $(cX, \mathcal{T}_c)$ von $(X, \mathcal{T})$ eine Folge $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von offenen Überdeckungen des Raums $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$ existiert, die folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Familie $\mathcal{F} = (F_s)_{s \in S}$ von abgeschlossenen Teilmengen des Raums $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und die die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $s_i \in S$ existiert mit* $\operatorname{diam}(F_{s_i}) < \mathcal{A}_i$, *ist der Durchschnitt über alle Mengen aus $\mathcal{F}$ nicht leer.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass für jede Kompaktifizierung $(cX, \mathcal{T}_c)$ des Raums $(X, \mathcal{T})$ eine Folge $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von offenen Überdeckungen des Raums $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$ existiert, die die im obigen Satz angeführte Eigenschaft besitzt. Wir wollen die Cech-Vollständigkeit des Raums nachweisen. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_i := \{U_{s,i} : s \in S_i\}$. Dann existiert zu jedem $i \in \mathbb{N}$ und zu jedem $s \in S_i$ eine offene Menge $V_{s,i}$ des Raums $(cX, \mathcal{T}_c)$ mit $U_{s,i} = c(X) \cap V_{s,i}$. Es ist offensichtlich, dass

$$c(X) \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in S_i} V_{s,i}$$

gilt. Wir werden nun auch die umgekehrte Mengeninklusion zeigen. Wir betrachten daher ein $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in S_i} V_{s,i}$. Weiters sei $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x im Raum $(cX, \mathcal{T}_c)$. Wir betrachten nun die Familie

$$\mathcal{F} := \{c(X) \cap \overline{V}^{\mathcal{T}_c} : V \in \mathfrak{U}(x)\}.$$

Die Familie $\mathcal{F}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft und besteht aus abgeschlossenen Teilmengen des Raums $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ existiert ein $s \in S_i$ mit $x \in V_{s,i}$. Kompakte T_2-Räume sind regulär. Damit ist der Raum $(cX, \mathcal{T}_c)$ regulär. Daher existiert eine Umgebung V von x in $(cX, \mathcal{T}_c)$ mit $x \in V \subseteq \overline{V}^{\mathcal{T}_c} \subseteq V_{s,i}$. Damit erhalten wir, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $s \in S_i$ und ein $V \in \mathfrak{U}(x)$ existiert mit

$$c(X) \cap V \subseteq c(X) \cap \overline{V}^{\mathcal{T}_c} \subseteq U_{s,i}.$$

Daraus folgt, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Menge $F_i \in \mathcal{F}$ mit $\operatorname{diam}(F_i) < \mathcal{A}_i$ existiert. Damit erhalten wir

$$c(X) \cap \bigcap \{\overline{V}^{\mathcal{T}_c} : V \in \mathfrak{U}(x)\} \neq \emptyset.$$

Da der Raum $(cX, \mathcal{T}_c)$ regulär ist gilt weiters

$$\bigcap \{\overline{V}^{\mathcal{T}_c} : V \in \mathfrak{U}(x)\} = \{x\}.$$

Insgesamt erhalten wir damit, dass x in $c(X)$ liegt. Also gilt

$$c(X) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in S_i} V_{s,i}.$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ Cech-vollständig ist.

Nun gehen wir davon aus, dass der Raum $(X, \mathcal{T})$ Cech-vollständig ist. Es sei $(cX, \mathcal{T}_c)$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Damit ist die Menge $c(X)$ eine G_δ-Teilmenge des Raums $(cX, \mathcal{T}_c)$. Damit existiert eine Folge von offenen Teilmengen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $(cX, \mathcal{T}_c)$ mit $c(X) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$. Da $(cX, \mathcal{T}_c)$ regulär ist existiert für jedes $x \in c(X)$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine offene Teilmenge $V_{x,i}$ des Raums $(cX, \mathcal{T}_c)$ mit

$$x \in V_{x,i} \subseteq \overline{V_{x,i}}^{\mathcal{T}_c} \subseteq G_i.$$

Wir definieren nun für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Familie

$$\mathcal{A}_i := \{c(X) \cap V_{x,i} : x \in c(X)\}.$$

$(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von offenen Überdeckungen des Raums $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$. Wir werden nun zeigen, dass diese Folge die im obigen Satz angeführte Eigenschaft besitzt. Wir betrachten daher eine Familie $\mathcal{F} = (F_s)_{s\in S}$ von abgeschlossenen Teilmengen des Raums $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und die die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $s_i \in S$ existiert mit $\operatorname{diam}(F_{s_i}) < \mathcal{A}_i$. Damit besteht die Familie $\overline{\mathcal{F}} := (\overline{F_s}^{\mathcal{T}_c})_{s\in S}$ aus abgeschlossen Teilmengen von $(cX, \mathcal{T}_c)$ und besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft, da $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Da der Raum $(cX, \mathcal{T}_c)$ kompakt ist, existiert damit ein $x \in \bigcap_{s\in S} \overline{F_s}^{\mathcal{T}_c}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ existiert ein $s_i \in S$ mit $\operatorname{diam}(F_{s_i}) < \mathcal{A}_i$. Dies bedeutet, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ ein $s_i \in S$ und ein $x_i \in c(X)$ existiert mit $F_{s_i} \subseteq c(X) \cap V_{x_i,i}$. Damit gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$x \in \overline{F_{s_i}}^{\mathcal{T}_c} \subseteq \overline{c(X) \cap V_{x_i,i}}^{\mathcal{T}_c} \subseteq \overline{V_{x_i,i}}^{\mathcal{T}_c} \subseteq G_i.$$

Damit gilt $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$ und daher $x \in c(X)$. Damit erhalten wir insgesamt $x \in \bigcap_{s\in S}(\overline{F_s}^{\mathcal{T}_s} \cap c(X))$. Da für jedes $s \in S$ die Menge F_s abgeschlossen in $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$ ist, existiert für jedes $s \in S$ eine Menge A_s, die abgeschlossen in $(cX, \mathcal{T}_c)$ ist und $F_s = A_s \cap c(X)$ erfüllt. Damit erhalten wir

$$x \in \bigcap_{s\in S}(\overline{F_s}^{\mathcal{T}_c} \cap c(X)) \subseteq \bigcap_{s\in S}(A_s \cap c(X)) = \bigcap_{s\in S} F_s.$$

Also ist der Durchschnitt über alle Mengen aus der Familie $\mathcal{F}$ nicht leer.

■

Lemma 2.12. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist (X, d) genau dann vollständig, falls für jede monoton fallende Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von nicht leeren abgeschlossenen Teilmengen von X mit der Eigenschaft $\lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{diam}(F_i) = 0$ die Menge $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ nicht leer ist.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass der metrische Raum (X, d) vollständig ist. Wir betrachten eine Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von nicht leeren abgeschlossenen Teilmengen von X mit folgenden zwei Eigenschaften:

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(F_i) = 0 \text{ und } F_i \supseteq F_{i+1}, \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Da für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge F_i nicht leer ist, wählen wir aus jeder Menge F_i ein Element x_i. Wir betrachten ein $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in F_i\} = \operatorname{diam}(F_i) < \epsilon \ \ \forall i \geq N(\epsilon).$$

Damit erhalten wir

$$d(x_i, x_j) < \epsilon \ \ \forall i, j \geq N(\epsilon).$$

Damit ist die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d). Da der Raum (X, d) vollständig ist, existiert nun ein $x \in X$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$. Da für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge F_i abgeschlossen ist, ist x in der Menge $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ enthalten, die damit nicht leer ist.

Es sei nun (X, d) ein metrischer Raum, der die im Lemma angeführte Eigenschaft besitzt. Es sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definieren wir nun die Menge $F_i := \overline{\{x_j : j \geq i\}}$. Es ist offensichtlich, dass die Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist und aus abgeschlossenen Teilmengen von X besteht die nicht leer sind. Für jede Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) gilt $\operatorname{diam}(A)=\operatorname{diam}(\overline{A})$. Da $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist erhalten wir daher insgesamt

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(F_i) = \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}\{x_j : j \geq i\} = 0.$$

Wegen unserer Voraussetzung ist damit die Menge $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ nicht leer. Es sei $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Damit liegt x insbesondere auch in F_1. Daher existiert eine Teilfolge der Cauchyfolge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die gegen x konvergiert. Daher konvergiert die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen x. Also ist der Raum (X, d) vollständig.

■

Lemma 2.13. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist (X, d) genau dann vollständig, falls für jede Familie $\mathcal{F} = (F_s)_{s\in S}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft und mit der Eigenschaft, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Menge $F_\epsilon \in \mathcal{F}$ existiert mit $\operatorname{diam}(F_\epsilon) < \epsilon$, die Menge $\bigcap_{s\in S} F_s$ nicht leer ist.*

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass die Bedingung des Lemmas erfüllt ist. Dann gilt wegen Lemma 2.12, dass der Raum (X, d) vollständig ist.

Umgekehrt gehen wir nun davon aus, dass (X, d) ein vollständiger metrischer Raum ist. Wir betrachten eine Familie $\mathcal{F} = (F_s)_{s\in S}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit denen im Lemma angeführten Eigenschaften. Damit existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Menge F_{s_j} aus der Familie $\mathcal{F}$ mit $\operatorname{diam}(F_{s_j}) < \frac{1}{j}$. Nun definieren wir eine Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ durch

$$F_i := \bigcap_{j\leq i} F_{s_j}, \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wegen Lemma 2.12 folgt damit, dass ein $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ existiert. Man sieht leicht, dass sogar $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \{x\}$ gilt. Wir betrachten jetzt ein $s \in S$ und definieren für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge $F_i' := F_s \cap F_i$. Nun gilt wieder wegen Lemma 2.12, dass der Durchschnitt über alle Mengen der Folge $(F_i')_{i\in\mathbb{N}}$ nicht leer ist. Insgesamt erhält man

$$\emptyset \neq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i' = F_s \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = F_s \cap \{x\}.$$

Damit erhält man $x \in F_s$. Da diese Überlegung für ein beliebiges $s \in S$ richtig ist, erhält man $x \in \bigcap_{s\in S} F_s$. Damit ist der Durchschnitt über alle Mengen aus $\mathcal{F}$ nicht leer.

■

Lemma 2.14. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar sei. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{R})$ ein Homöomorphismus. Dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ ebenfalls metrisierbar. Ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig metrisierbar, dann ist der Raum $(Y, \mathcal{R})$ ebenfalls vollständig metrisierbar.*

Beweis: Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar ist, existiert eine Metrik d auf X mit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$. Nun definieren wir eine Metrik d' auf Y durch

$$d' : Y \times Y \to \mathbb{R} : (y_1, y_2) \mapsto d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)).$$

Es ist offensichtlich, dass d' eine Metrik auf Y ist. Wir zeigen nun $\mathcal{T}(d') = \mathcal{R}$. Man sieht leicht, dass für jedes $y \in Y$ und für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$f(B^d(f^{-1}(y), \epsilon)) = B^{d'}(y, \epsilon). \tag{1}$$

Dabei bezeichnet $B^{d'}(y, \epsilon)$ die Kugel mit Mittelpunkt y und Radius ϵ bezüglich der Metrik d'. Wir betrachten nun eine Menge $O \in \mathcal{R}$ und ein $y \in O$. Es existiert genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Es gilt $x \in f^{-1}(O)$ mit $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}(d)$. Daher existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B^d(x, \epsilon) \subseteq f^{-1}(O)$. Aufgrund von (1) erhalten wir damit $B^{d'}(y, \epsilon) \subseteq O$. Damit gilt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}(d')$. Nun betrachten wir ein $O \in \mathcal{T}(d')$ und ein $y \in O$. Es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $B^{d'}(y, \epsilon) \subseteq O$. Da $B^d(f^{-1}(y), \epsilon)$ in $\mathcal{T}$ liegt und f eine offene Abbildung ist, erhalten wir wegen (1) die Aussage $B^{d'}(y, \epsilon) \in \mathcal{R}$. Daher gilt $\mathcal{T}(d') \subseteq \mathcal{R}$.

Der Raum $(X, \mathcal{T})$ sei nun vollständig metrisierbar. Es sei d eine Metrik mit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$ und sodass der metrische Raum (X, d) vollständig ist. Wir betrachten eine Cauchyfolge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in (Y, d'), wobei d' genau so wie oben definiert sei. Damit ist $(f^{-1}(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d). Da (X, d) vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} f^{-1}(y_i) = x$. Da f stetig ist, folgt daher $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = f(x)$. Damit ist (X, d') vollständig.

■

Mit den bisherigen Begriffsbildungen und Ergebnissen können wir nun zeigen, dass jeder vollständig metrisierbare Raum ein Cech-vollständiger Tychonoffraum ist.

Korollar 2.15. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein Cech-vollständiger Tychonoffraum.*

Beweis: Der Raum $(X, \mathcal{T})$ sei vollständig metrisierbar. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ damit natürlich auch metrisierbar ist, ist er wegen Korollar 2.7 ein Tychonoffraum. Wir wollen nun mit Satz 2.11 zeigen, dass der Raum auch Cech-vollständig ist. Wir betrachten daher eine Kompaktifizierung $(cX, \mathcal{T}_c)$ des Raums $(X, \mathcal{T})$. Wegen Lemma 2.14 ist der Raum $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$ vollständig metrisierbar. Wir wählen eine Metrik d' auf $c(X)$ die die Topologie $\mathcal{T}_c|_{c(X)}$ induziert und für die der metrische Raum $(c(X), d')$ vollständig ist. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definieren wir die Familie $\mathcal{A}_i := \{B^{d'}(x, \frac{1}{i}) : x \in c(X)\}$, wobei $B^{d'}(x, \frac{1}{i})$ die offene Kugel bezüglich der Metrik d' mit Mittelpunkt x und Radius $\frac{1}{i}$ bezeichnet. Weil wir den Satz 2.11 anwenden wollen, betrachten wir eine Familie $\mathcal{F} = (F_s)_{s\in S}$ von abgeschlossenen Teilmengen des Raums $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und Mengen enthält, deren Durchmesser kleiner als jedes $\mathcal{A}_i$ ist. Dass heißt, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $s_i \in S$ und ein $x_i \in c(X)$ existiert mit $F_{s_i} \subseteq B^{d'}(x_i, \frac{1}{i})$. Damit enthält diese Familie $\mathcal{F}$ Mengen, deren Durchmesser kleiner als jedes vorgegebene $\epsilon > 0$ ist. Da der metrische Raum $(c(X), d')$ vollständig ist, folgt nun mit Lemma 2.13, dass der Durchschnitt über alle Mengen aus $\mathcal{F}$ nicht leer ist. Also erfüllt die Folge $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genau die Bedingung des Satzes 2.11, womit der Raum $(X, \mathcal{T})$ Cech-vollständig ist.

■

Lemma 2.16. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum und d eine Metrik die $\mathcal{T}$ induziert. Weiters sei Y eine Teilmenge von X.*

(i) Dann existiert eine zu d äquivalente Metrik d' auf X, die durch 1 beschränkt ist und die die Eigenschaft besitzt, dass der metrische Raum (X, d) genau dann vollständig ist, falls der metrische Raum (X, d') vollständig ist.

(ii) Der Teilraum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ ist metrisierbar und es gilt $\mathcal{T}(d|_{Y\times Y}) = \mathcal{T}|_Y$.

Beweis: ad(i): Es ist offensichtlich, dass durch $d'(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}$ eine Metrik auf X definiert wird, die durch 1 beschränkt ist. Es sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt $B^d(x,\epsilon) \subseteq B^{d'}(x,\epsilon)$. Für ein $\epsilon \in (0,1)$ gilt $B^{d'}(x,\epsilon) \subseteq B^d(x,\epsilon)$. Damit gilt $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d')$. Weiters ist es auch offensichtlich, dass eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge in (X,d) ist, falls sie eine Cauchyfolge in (X,d') ist.

ad(ii): Es sei $y \in Y$. Es ist offensichtlich, dass die Familie $\mathfrak{B}(y) := \{B^d(y,\epsilon) \cap Y : \epsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes y im Raum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ ist. Da für jedes $\epsilon > 0$ gilt $B^d(y,\epsilon) \cap Y = B^{d|_{Y\times Y}}(y,\epsilon)$ sind die Mengen dieser Familie genau die offenen Kugeln des Raums $(Y, \mathcal{T}(d|_{Y\times Y}))$ mit Mittelpunkt y, die natürlich eine Umgebungsbasis von y im Raum $(Y, \mathcal{T}(d|_{Y\times Y}))$ bilden.

■

Lemma 2.17.

(i) Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge von X. Dann ist der metrische Raum $(A, d|_{A\times A})$ vollständig.

(ii) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und der Teilraum $(A, d|_{A\times A})$ sei vollständig. Dann ist A eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Beweis: ad(i): Ist $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(A, d|_{A\times A})$, dann ist sie auch eine Cauchyfolge in (X,d) und damit konvergent in (X,d), da (X,d) vollständig ist. Da A abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in A, womit $(A, d|_{A\times A})$ vollständig ist.

ad(ii): Es sei nun $(A, d|_{A\times A})$ vollständig und $x \in \overline{A}$. Dann existiert eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, deren Folgenglieder in A liegen und die im Raum (X,d) gegen x konvergiert. Damit ist die Folge eine Cauchyfolge in (X,d) und daher auch eine Cauchyfolge in $(A, d|_{A\times A})$. Daher ist die Folge konvergent in $(A, d|_{A\times A})$. Damit gilt $x \in A$, da Grenzwerte von konvergenten Folgen in metrischen Räumen eindeutig sind.

■

Proposition 2.18. *Es sei $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von topologischen Räumen.*

(i) Es sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ der Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ metrisierbar. Dann ist auch der der Produktraum $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_i)$ metrisierbar.

(ii) Es sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ der Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ vollständig metrisierbar. Dann ist auch der Produktraum $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_i)$ vollständig metrisierbar.

Beweis: ad(i): Wegen dem ersten Punkt von Lemma 2.16 existiert eine Folge von durch 1 beschränkten Metriken $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{T}(d_i) = \mathcal{T}_i$. Wir definieren nun auf der Menge $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ eine Metrik durch

$$d : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \times \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \mathbb{R} : ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i). \tag{2}$$

Es ist offensichtlich, dass d wohldefiniert und eine Metrik ist. Es sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ gegeben. Eine Umgebungsbasis von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ im Produktraum ist gegeben durch die Familie $\mathfrak{B}((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \{B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon, n) : \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}$. Die Mengen in dieser Familie sind definiert als

$$B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon, n) := \prod_{i=1}^{n} B^{d_i}(x_i, \epsilon) \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{1,\dots,n\}} X_i.$$

Für alle $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon 2^{-n}) \subseteq B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon, n).$$

Dies sieht man folgendermaßen ein: Es sei $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon 2^{-n})$, dann gilt $d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) < \epsilon 2^{-n}$ und daher ist $\frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) < \epsilon 2^{-n}$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Für $i \leq n$ folgt damit $d_i(x_i, y_i) < \epsilon$, damit gilt $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon, n)$. Umgekehrt betrachten wir ein $\epsilon > 0$ und wählen ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt

$$B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \frac{\epsilon}{2}, n) \subseteq B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon).$$

Dies sieht man folgendermaßen ein: Es sei $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \frac{\epsilon}{2}, n)$, dann gilt $d_i(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Damit erhalten wir

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Also gilt $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B^d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \epsilon)$. Damit induziert die Metrik d die Produkttopologie.

ad(ii): Wegen dem ersten Punkt von Lemma 2.16 existiert eine Folge von durch 1 beschränkten Metriken $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{T}(d_i) = \mathcal{T}_i$ und mit der Eigenschaft, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ der metrische Raum (X_i, d_i) vollständig ist. Wir werden nun zeigen, dass der metrische Raum $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, d)$ vollständig ist, wobei d die Metrik aus (2) ist. Es sei $((x_{ij})_{i\in\mathbb{N}})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge aus $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Damit gilt

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : d((x_{ij})_{i\in\mathbb{N}}, (x_{ik})_{i\in\mathbb{N}}) < \epsilon\ \forall j, k \geq N(\epsilon).$$

Daher gilt

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : d_i(x_{ij}, x_{ik}) < \epsilon\ \forall i \in \mathbb{N}, \forall j, k \geq N(\epsilon).$$

Damit ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X_i, d_i). Da für jedes $i \in \mathbb{N}$ der metrische Raum (X_i, d_i) vollständig ist, existiert für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $x_i \in X_i$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x_{ij} = x_i$. Damit konvergiert die Folge $((x_{ij})_{i\in\mathbb{N}})_{j\in\mathbb{N}}$ im Produktraum $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_i)$ gegen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, womit der metrische Raum $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, d)$ vollständig ist.

■

Lemma 2.19. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum und G eine G_δ-Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$. Dann ist G homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge des Raums $(X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E})$.*

Beweis: Es sei G eine G_δ-Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$. Damit existiert eine Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, sodass $G^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Weiters sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Wir definieren die Abbildung

$$f : (X, \mathcal{T}) \to (X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E}) : x \mapsto (x, d(x, F_1), d(x, F_2), ...).$$

Es ist offensichtlich, dass die Abbildung f stetig ist, da sie komponentenweise stetig ist. Man sieht sofort, dass die Abbildung f sogar ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Das Bild $f(X)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des Raums $(X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E})$. Es sei $x \in G$. Da für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $d(x, F_i) > 0$ erhalten wir $f(G) = f(X) \cap (X \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})$. Damit ist die Menge $f(G)$ abgeschlossen in $(X \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, (\mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E})|_{X\times\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}})$. Nun ist die Abbildung

$$g : (X \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, (\mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E})|_{X\times\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}}) \to (X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E}) : (x, x_1, x_2, ...) \mapsto (x, \ln(x_1), \ln(x_2), ...)$$

ein Homöomorphismus. Damit ist $g|_{f(G)}(f|_G(G))$ ein homöomorphes Bild von G und eine abgeschlossene Teilmenge des Raums $(X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E})$.

■

Korollar 2.20. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig metrisierbarer topologischer Raum und G eine G_δ-Teilmenge des Raums $(X, \mathcal{T})$. Dann ist der Teilraum $(G, \mathcal{T}|_G)$ vollständig metrisierbar.*

Beweis: Wegen Proposition 2.18 ist der Raum $(X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E})$ vollständig metrisierbar und es sei d eine Metrik, die die Topologie dieses Produktraums induziert und für die der metrische Raum $(X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ vollständig ist. Wegen Lemma 2.19 ist G homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge des Raums $(X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E})$. Wegen dem zweiten Punkt von Lemma 2.16 und dem ersten Punkt von Lemma 2.17 ist G damit homöomorph zu einem vollständig metrisierbaren topologischen Raum und damit wegen Lemma 2.14 vollständig metrisierbar.

■

Definition 2.21. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Paar bestehend aus einem metrischen Raum (X^*, d^*) und einer Abbildung $\iota : (X, d) \to (X^*, d^*)$ heißt eine Vervollständigung von (X, d) falls gilt:*

(a) (X^*, d^*) ist ein vollständiger metrischer Raum.

(b) Die Abbildung ι ist eine Isometrie, dass heißt: $d^*(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)\ \forall x, y \in X$.

(c) $\overline{\iota(X)} = X^*$, wobei der Abschluss bezüglich d^* zu verstehen ist.

Im Folgenden werden wir sowohl das Paar $(\iota, (X^*, d^*))$ als auch den Raum (X^*, d^*) selbst als Vervollständigung von (X, d) bezeichnen.

Satz 2.22. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert eine Vervollständigung von (X, d).*

Beweis: Aus der Analysis ist bekannt, dass der Raum $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ aller beschränkten Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist. Wir betrachten nun ein festes $a \in X$ und definieren die Abbildung ι, die jedem $x \in X$ die Funktion

$$\iota(x) : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|) : y \mapsto d(y, x) - d(y, a)$$

zuordnet. Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\|\iota(x)\|_\infty = \sup\{|d(y, x) - d(y, a)| : y \in X\} \leq d(x, a).$$

Damit ist $\iota : (X, d) \to (\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ wohldefiniert, wobei d_∞ die von der Supremumsnorm induzierte Metrik bezeichnet. Wegen

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= |d(x_1, x_1) - d(x_1, a) - d(x_1, x_2) + d(x_1, a)| \\ &= |\iota(x_1)(x_1) - \iota(x_2)(x_1)| \leq \|\iota(x_1) - \iota(x_2)\|_\infty \\ &= \sup\{d(y, x_1) - d(y, a) - d(y, x_2) + d(y, a) : y \in X\} \leq d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

ist ι eine Isometrie. Nun sei X^* der Abschluss von $\iota(X)$ in $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$. Ist nun d^* die Einschränkung von d_∞ auf X^*, so ist das Paar $(\iota, (X^*, d^*))$ eine Vervollständigung von (X, d).

■

Mit den bisherigen Ergebnissen erhalten wir nun die Umkehrung von Korollar 2.15.

Korollar 2.23. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer Cech-vollständiger topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig metrisierbar.*

Beweis: Es sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Wir betrachten nun für den metrischen Raum (X, d) eine Vervollständigung $(\iota, (X^*, d^*))$ und definieren die Topologie $\mathcal{T}^* := \mathcal{T}(d^*)$. Nun betrachten wir eine Kompaktifizierung $(c, (cX^*, \mathcal{T}_c^*))$ des Raums $(X^*, \mathcal{T}^*)$. Das Paar $(c \circ \iota, (cX^*, \mathcal{T}_c^*))$ ist dann eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ Cech-vollständig ist, ist $(c \circ \iota)(X)$ eine G_δ-Teilmenge des Raums $(cX^*, \mathcal{T}_c^*)$. Damit ist $\iota(X)$ eine G_δ-Teilmenge des Raums $(X^*, \mathcal{T}^*)$ und wegen Korollar 2.20 ist damit $(\iota(X), \mathcal{T}^*|_{\iota(X)})$ vollständig metrisierbar. Damit ist $(X, \mathcal{T})$ wegen Lemma 2.14 vollständig metrisierbar.

■

Mit Korollar 2.15 und Korollar 2.23 erhalten wir nun den Satz von Cech.

Satz 2.24 (Satz von Cech). *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann vollständig metrisierbar, falls er metrisierbar und Cech-vollständig ist.*

■

Ohne Beweis sei hier erwähnt, dass ein Tychonoffraum $(X, \mathcal{T})$, der eine Kompaktifizierung $(c, (cX, \mathcal{T}_c))$ besitzt, für die $c(X)$ eine G_δ-Teilmenge von cX ist, bereits Cech-vollständig ist. Daraus erhält man folgende Formulierung des Satzes von Cech.

Satz 2.25. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann vollständig metrisierbar, falls er metrisierbar und homöomorph zu einer G_δ-Teilmenge eines kompakten T_2-Raums ist.*

■

Aus dem Satz von Cech erhalten wir, dass für lokal kompakte Räume die Begriffe Metrisierbarkeit und vollständige Metrisierbarkeit äquivalent sind.

Korollar 2.26. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter Raum. Dann ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ genau dann metrisierbar, falls er vollständig metrisierbar ist.*

Beweis: Wir gehen davon aus, dass $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter metrisierbarer Raum ist. Es sei $(cX, \mathcal{T}_c)$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Da der Raum $(X, \mathcal{T})$ lokal kompakt ist, ist auch der Raum $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$ lokal kompakt. Es sei $x \in c(X)$. Dann betrachten wir eine kompakte Umgebung K von x im Raum $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$. Die Menge K ist auch kompakt im Raum $(cX, \mathcal{T}_c)$. Da in T_2-Räumen kompakte Mengen abgeschlossen sind erhalten wir

$$cX = \overline{c(X)}^{\mathcal{T}_c} = \overline{c(X) \backslash K}^{\mathcal{T}_c} \cup \overline{K}^{\mathcal{T}_c} = \overline{c(X) \backslash K}^{\mathcal{T}_c} \cup K.$$

Damit erhalten wir

$$cX \backslash c(X) \subseteq \overline{c(X) \backslash K}^{\mathcal{T}_c}$$

bzw.

$$cX \backslash \overline{(c(X) \backslash K)}^{\mathcal{T}_c} \subseteq c(X).$$

Da K eine Umgebung von x in $(c(X), \mathcal{T}_c|_{c(X)})$ ist, gilt $x \notin \overline{c(X) \backslash K}^{\mathcal{T}_c|_{c(X)}}$. Daher gilt auch $x \notin \overline{c(X) \backslash K}^{\mathcal{T}_c}$. Damit erhalten wir insgesamt $cX \backslash \overline{(c(X) \backslash K)}^{\mathcal{T}_c} \in \mathcal{T}_c$ und

$$x \in cX \backslash \overline{(c(X) \backslash K)}^{\mathcal{T}_c} \subseteq c(X).$$

Damit erhalten wir, dass zu $x \in c(X)$ eine offene Menge $O_x := cX \backslash \overline{(c(X) \backslash K)}^{\mathcal{T}_c} \in \mathcal{T}_c$ existiert mit $x \in O_x \subseteq c(X)$. Damit gilt $c(X) \in \mathcal{T}_c$ und damit ist $c(X)$ natürlich auch eine G_δ-Teilmenge des Raums $(cX, \mathcal{T}_c)$. Wegen dem Satz von Cech ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ vollständig metrisierbar.

■

Wir wollen nun die Umkehrung von Korollar 2.20 beweisen.

Lemma 2.27. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{R})$ zwei topologische Räume, wobei der Raum $(Y, \mathcal{R})$ vollständig metrisierbar sei. Weiters sei D eine dichte Teilmenge von X und $f : (D, \mathcal{T}|_D) \to (Y, \mathcal{R})$ eine stetige Funktion. Dann existiert eine G_δ-Teilmenge G xon X mit $D \subseteq G$, sodass die Abbildung f zu einer stetigen Funktion $F : (G, \mathcal{T}|_G) \to (Y, \mathcal{R})$ fortgesetzt werden kann.*

Beweis: Es sei d eine Merik auf Y, die $\mathcal{R}$ induziert und für die der metrische Raum (Y, d) vollständig ist. Wir definieren nun die Menge

$$G := \{x \in X | \; \forall \epsilon > 0 \; \exists U_\epsilon \in \mathfrak{U}(x) : \text{diam}(f(D \cap U_\epsilon)) < \epsilon\}.$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{U}(x)$ den Umgebungsfilter von x im Raum $(X, \mathcal{T})$. Wir können nun G darstellen als

$$G = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{x \in X | \; \exists U_{\frac{1}{i}} \in \mathfrak{U}(x) : \operatorname{diam}(f(D \cap U_{\frac{1}{i}})) < \frac{1}{i}\}.$$

Da für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X | \; \exists U_{\frac{1}{i}} \in \mathfrak{U}(x) : \operatorname{diam}(f(D \cap U_{\frac{1}{i}})) < \frac{1}{i}\}$ offen ist, ist G eine G_δ Menge. Aufgrund der Stetigkeit von f ist D eine Teilmenge von G. Nun wollen wir eine Fortsetzung F von f definieren. Dazu betrachten wir ein $x \in G$ und definieren für dieses x die Familie

$$\mathcal{F}_x := \{\overline{f(D \cap U)}^{\mathcal{R}} : U \in \mathfrak{U}(x)\}.$$

Diese Familie besteht aus abgeschlossenen Teilmengen von Y, besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft und enthält Mengen, deren Durchmesser kleiner als jedes vorgegebene $\epsilon > 0$ ist. Damit ist der Durchschnitt über alle Mengen aus dieser Familie wegen Lemma 2.13 nicht leer. Da der Durchmesser des Durchschnitts kleiner als jedes $\epsilon > 0$ ist, enthält der Schnitt über alle Mengen aus $\mathcal{F}_x$ genau ein Element. Nun definieren wir

$$F(x) := \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x)} \overline{f(D \cap U)}^{\mathcal{R}}.$$

Mit dieser Definition ist offensichtlich F eine Fortsetzung von f. Wir zeigen nun, dass F sogar eine stetige Fortsetzung von f ist. Dazu betrachten wir ein $x \in G$ und ein $\epsilon > 0$. Damit existiert eine offene Menge $U_\epsilon \in \mathfrak{U}(x)$ mit $\operatorname{diam}(\overline{f(D \cap U_\epsilon)}^{\mathcal{R}}) < \epsilon$. Wir zeigen nun die Mengeninklusion $F(G \cap U_\epsilon) \subseteq B^d(F(x), \epsilon)$. Dazu betrachten wir ein $x' \in G \cap U_\epsilon$. Nun gilt $U_\epsilon \in \mathfrak{U}(x')$ und daher $F(x') \in \overline{f(D \cap U_\epsilon)}^{\mathcal{R}}$. Da auch $F(x) \in \overline{f(D \cap U_\epsilon)}^{\mathcal{R}}$ gilt, erhalten wir

$$d(F(x), F(x')) \leq \operatorname{diam}(\overline{f(D \cap U_\epsilon)}^{\mathcal{R}}) < \epsilon.$$

Damit ist F eine stetige Fortsetzung von f.

■

Mit Lemma 2.27 erhalten wir die Umkehrung von Korollar 2.20.

Korollar 2.28. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein metrisierbarer topologischer Raum und $(G, \mathcal{T}|_G)$ ein vollständig metrisierbarer Teilraum. Dann ist G eine G_δ-Teilmenge von X.*

Beweis: Es sei d eine Metrik auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert. Wir betrachten die stetige Abbildung $\mathrm{id}_G : (G, \mathcal{T}|_G) \to (G, \mathcal{T}|_G)$. Wegen Lemma 2.27 existiert eine stetige Fortsetzung $F : (G', \mathcal{T}|_{G'}) \to (G, \mathcal{T}|_G)$, wobei G' eine G_δ-Teilmenge von $(\overline{G}^{\mathcal{T}}, \mathcal{T}|_{\overline{G}^{\mathcal{T}}})$ ist, die $G \subseteq G' \subseteq \overline{G}^{\mathcal{T}}$ erfüllt. Da F stetig ist, gilt $G = G'$. Damit ist G eine G_δ-Teilmenge von $(\overline{G}^{\mathcal{T}}, \mathcal{T}|_{\overline{G}^{\mathcal{T}}})$. Da man $\overline{G}^{\mathcal{T}}$ darstellen kann als

$$\overline{G}^{\mathcal{T}} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{x \in X : d(x, G) < \frac{1}{i}\}$$

ist $\overline{G}^{\mathcal{T}}$ eine G_δ-Teilmenge von $(X, \mathcal{T})$. Insgesamt ist damit G eine G_δ-Teilmenge von $(X, \mathcal{T})$.

■

Mit Korollar 2.20 und Korollar 2.28 können wir nun diejenigen Teilräume eines vollständig metrisierbaren Raums bestimmen, die ebenfalls vollständig metrisierbar sind.

Korollar 2.29. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist ein Teilraum $(G, \mathcal{T}|_G)$ genau dann vollständig metrisierbar, falls G eine G_δ-Teilmenge von $(X, \mathcal{T})$ ist.*

■

Beispiel 2.30. Die irrationalen Zahlen sind eine G_δ-Teilmenge der rellen Zahlen, da sie dargestellt werden können als

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}^c.$$

Damit ist der Raum $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \mathcal{E}|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}})$ wegen Korollar 2.29 vollständig metrisierbar. Der Raum $(\mathbb{Q}, \mathcal{E}|_{\mathbb{Q}})$ ist nicht vollständig metrisierbar. Wäre $(\mathbb{Q}, \mathcal{E}|_{\mathbb{Q}})$ vollständig metrisierbar, gäbe es eine Darstellung der Form $\mathbb{Q} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i$, wobei die O_i offene Teilmengen der rellen Zahlen sind. Es ist klar, dass für jedes $q \in \mathbb{Q}$ die Menge $\{q\}^c$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, müsste dann jede Menge O_i dicht in $\mathbb{R}$ liegen. Wegen dem Satz von Baire (der Satz von Baire besagt, dass der Durchschnitt über abzählbar viele offene Teilmengen eines vollständig metrisierbaren topologischen Raums, die alle dicht im Raum liegen, auch dicht im Raum liegt) müsste dann die Menge

$$\emptyset = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}^c \cap \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i$$

auch dicht in $\mathbb{R}$ liegen. Da die leere Menge aber offensichtlich keine dichte Teilmenge ist, ist $(\mathbb{Q}, \mathcal{E}|_{\mathbb{Q}})$ wegen Korollar 2.29 nicht vollständig metrisierbar.

■

Literatur

[1] Engelking, Ryszard: *General Topology.* Heldermann-Verlag, Berlin, 1986.

[2] Harald Woracek, Martin Blümlinger und Michael Kaltenbäck: *Funktionalanalysis 1.* Vorlesungsskript, Technische Universität Wien, 2016.

[3] Nagata, Jun-Iti: *Modern General Topology.* North-Holland, Amsterdam, 1968.

[4] Woracek, Harald: *Allgemeine Topologie.* Vorlesungsskript, Technische Universität Wien, 2003.