Topologische Trennungsaxiome T_i

und einige Un-Abhängigkeiten unter diesen
Seminararbeit aus Analysis

TU Wien

Alexander Palmrich
0825978

12. September 2013

1 Ausblick

Diese Arbeit (und der zugehörige Vortrag) befassen sich mit topologischen Axiomen, die als *Trennungsaxiome* bekannt sind. Um Zusammenhänge zwischen diesen Axiomen zu untersuchen, werden wir uns erst das notwendige Vokabular definieren, danach neun wichtige Trennungsaxiome.
In den darauffolgenden zwei Abschnitten zeigen wir erst einige bekannte Abhängigkeiten, d.h. wir überlegen uns, welche Axiome (eventuell in Verbindung mit weiteren) in ihrer Aussage stärker als andere sind. Danach konstruieren wir Gegenbeispiele, anhand derer wir erkennen, dass gewisse Implikationen nicht gelten können. Nach Möglichkeit sind das nicht jene Implikationen, die wir zuvor 'bewiesen' haben.
Der Autor stützt sich sehr stark auf das ausgezeichnete Standardwerk *Counterexamples in Topology* von Lynn A. Steen und J. Arthur Seebach Jr. (1968), speziell bei der Suche nach Gegenbeispielen, aber auch was die Formulierung der Trennungsaxiome betrifft.

2 Begriffsbildung

Wir benötigen ein paar grundlegende Begriffe aus der Topologie, diese sind im Folgenden definiert.

Definition 1. ***Topologie***[B, Seite 1]

Sei X eine Menge. Sei $\tau \subseteq P(X) = \{M \,|\, M \subseteq X\}$ ein System von Teilmengen von X. Falls τ die folgenden drei Axiome erfüllt, so nennen wir τ eine *Topologie auf* X, das Paar (X, τ) einen *topologischen Raum*, die Mengen $\mathcal{O} \in \tau$ *offen* (oder τ*-offen)* und ihre Komplemente $\mathcal{O}^c := X \setminus \mathcal{O}$ *abgeschlossen* (oder τ*-abgeschlossen*). Eine Topologie $\tau' \supseteq \tau$ nennen wir *feiner* als τ, oder wir sagen τ ist *gröber* als τ'.

$\tau_1 :$ $X \in \tau \ \wedge \ \emptyset \in \tau$
sprich: Die leere Menge und der ganze Raum sind offen (und abgeschlossen).

$$\tau_2 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \left[\forall k \in \{1,2,3,\dots,n\} : \mathcal{O}_k \in \tau \ \rightarrow \ \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i \right) \in \tau \right]$$

sprich: Der endliche Schnitt von offenen Mengen ist offen.

$$\tau_3 : \quad \forall I \left[\forall i \in I : \mathcal{O}_i \in \tau \ \rightarrow \ \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \right) \in \tau \right]$$

sprich: Die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist offen.

Hier ist I eine beliebige Menge (*Indexmenge*). Da Topologen an den zum Wohlordnungssatz äquivalenten Satz von Tichonow[B, Satz 1.4.7] glauben, kann man sich I als Wohlordnung[1] vorstellen.

Im Rahmen dieses Skriptums werden offene Mengen in Grafiken rund dargestellt, abgeschlossene Mengen eckig, und offen-abgeschlossene Mengen in runder Form mit gezacktem Rand.

Definition 2. ***Umgebung***[B, Seite 2]

Als *Umgebungen* bezeichnen wir die Obermengen von offenen Mengen. Manchmal interessieren wir uns für Umgebungen von Punkten oder von Teilmengen von X.

$$U \subseteq X \text{ ist Umgebung (bezüglich } \tau) \text{ von } A \;:\Leftrightarrow\; A \subseteq U \wedge \exists \mathcal{O} \in \tau \,:\, A \subseteq \mathcal{O} \subseteq U$$

Definition 3. ***Umgebungsbasis & erzeugte Topologie***[B, Seite 4]

Anstatt mit der Topologie τ eines Raumes X zu arbeiten, werden wir uns oftmals auf ein Teilmengensystem $\tau' \subseteq \tau$ beschränken, welches leichter handzuhaben ist. Üblicherweise geben wir ein System von offenen Mengen um einen Punkt $x \in X$ an und nennen dieses eine *Umgebungsbasis um x*. Die *erzeugte Topologie* bezeichne dann jenes Mengensystem, das sich aus beliebigen Vereinigungen dieser Mengen um beliebige Punkte in X ergibt. Im Rahmen dieser Arbeit wird stets eine Topologie hervorgehen (wie man anhand von Definition 1 nachprüft). Ist τ gegeben, so lassen sich Umgebungsbasen punktweise folgendermaßen charakterisieren:

$$\tau' \text{ ist Umgebungsbasis von } \tau \text{ um } x \;:\Leftrightarrow\; \forall \mathcal{O} \in \tau : \Big[x \in \mathcal{O} \rightarrow \exists \mathcal{O}' \in \tau' : x \in \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O} \Big]$$

Definition 4. ***Spurtopologie***[B, 1.3.2]

In einem topologischen Raum (X, τ) trägt eine Teilmenge $A \subseteq X$ auf natürliche Weise eine vererbte Topologie und wird mit dieser sogenannten *Spurtopologie* τ_A selbst zu einem topologischen Raum (A, τ_A).

$$\tau_A := \Big\{ \mathcal{O} \cap A \,\Big|\, \mathcal{O} \in \tau \Big\}$$

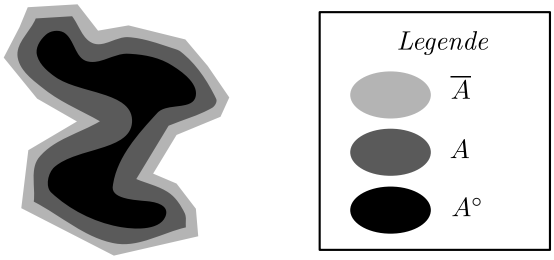
Definition 5. ***Abschluss & Inneres***[B, Seite 2]

In einem topologischen Raum (X, τ) gibt es zu jeder Teilmenge $A \subseteq X$ zwei ausgezeichnete Mengen, den *Abschluss* von A (bezüglich τ), in Zeichen $\overline{A}$ (oder $\overline{A}^{\tau}$), sowie das *Innere* von A (bezüglich τ), in Zeichen A° (oder A°_τ}). Der Abschluss ist die kleinste abgeschlossene Obermenge, das Innere die größte offene Teilmenge.

$$\begin{aligned} \overline{A} &:= \bigcap \Big\{ M \subseteq X \,|\, M \supseteq A \wedge M^c \in \tau \Big\} \\ A^{\circ} &:= \bigcup \Big\{ M \subseteq X \,|\, M \subseteq A \wedge M \in \tau \Big\} \end{aligned}$$

Mit der obigen Konvention zur Darstellung von Mengen sieht die Schachtelung im Fall $A^{\circ} \neq A \neq \overline{A}$ so aus:

[1] Eine Wohlordnung auf einer Menge I bezeichnet eine Totalordnung $\preceq$, bezüglich der jede Teilmenge von I ein Minimum hat.[J, 2.3]



Definition 6. ***Dichtheit***[B, Seite 2]

Wir nennen eine Teilmenge $D \subseteq A \subseteq X$ eines topologischen Raumes X eine *dichte Teilmenge von* A oder sagen D *liegt dicht in* A, falls $\overline{D} = A$.

$$D \text{ ist dicht in } A \;:\Leftrightarrow\; \overline{D} = A$$

Definition 7. ***Stetigkeit***[B, Seite 4]

Eine Funktion $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ von einem topologischen Raum X_1 in einen zweiten solchen X_2 nennen wir *stetig*, falls das Urbild $f^{-1}(\mathcal{O}_2) := \{x \in X_1 \mid f(x) \in \mathcal{O}_2\}$ von τ_2-offenen Mengen τ_1-offen ist.

$$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2) \text{ ist stetig } :\Leftrightarrow \forall \mathcal{O}_2 \in \tau_2 : \; f^{-1}(\mathcal{O}_2) \in \tau_1$$

Definition 8. ***Kompaktheit***[B, Seite 10]

Wir nennen eine Menge $K \subseteq X$ *kompakt*, wenn jede Überdeckung von K durch offene Mengen sich auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren lässt. Dadurch ist *kompakt* eine natürliche Erweiterung des Endlichkeits-Begriffes für Topologen.

$$K \text{ kompakt } :\Leftrightarrow \forall (\mathcal{O}_i)_{i \in I} : \left[K \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \;\to\; \left(\exists I_{fin} \subseteq I : |I_{fin}| < \infty \wedge K \subseteq \bigcup_{i \in I_{fin}} \mathcal{O}_i \right) \right]$$

Definition 9. ***Lokalkompaktheit***[B, Seite 21]

Ein Raum (X, τ) heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die in (X, τ) kompakt ist.

$$X \text{ ist lokalkompakt } :\Leftrightarrow \forall x \in X \; \exists U \subseteq X \; \exists \mathcal{O} \in \tau : \left[x \in \mathcal{O} \subseteq U \wedge U \text{ ist kompakt} \right]$$

3 Trennungsaxiome

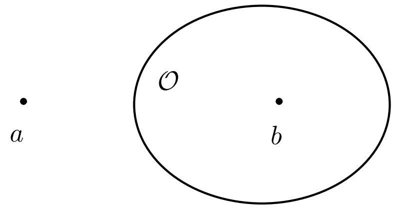
Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Wir werden uns mit der Definition von *Trennungsaxiomen* T_i beschäftigen, die ein Maß dafür darstellen, wie fein die Topologie eines Raumes ist. Je mehr Trennungsaxiome erfüllt sind, desto mehr[2] offene Mengen gibt es, und viele Aussagen können getroffen werden ohne Kenntnis des konkreten Raumes, nur durch Kenntnis von T_i-Eigenschaften. Zum Beispiel: Ist X ein T_2-Raum, dann gilt, dass kompakte Mengen abgeschlossen sind[B, Satz 1.4.4]. Wie X wirklich aussieht brauchen wir gar nicht wissen.
Die Formel $a \neq b \in X$ ist zu lesen als Abkürzung für $a \in X \wedge b \in X \wedge \neg(a = b)$.

[2] Hier ist mit *mehr* keinesfalls eine Abzählung gemeint. Vielmehr soll das heißen, dass es hinreichend viele Mengen gibt, mit denen sich andere Mengen trennen lassen.

Definition 10. ***Trennungsaxiome***[S&S, Seite 11]

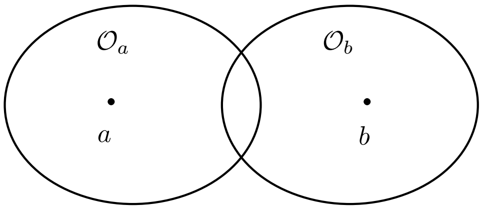
$$\mathbf{T_0}: \quad a \neq b \in X \to \exists \mathcal{O} \in \tau : \left[\left(a \in \mathcal{O} \wedge b \notin \mathcal{O} \right) \vee \left(a \notin \mathcal{O} \wedge b \in \mathcal{O} \right) \right]$$

Ein Raum ist T_0 genau dann, wenn seine Topologie ungleiche Punkte unterscheiden kann.



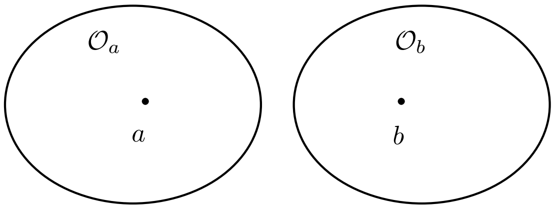
$$\mathbf{T_1}: \quad a \neq b \in X \to \exists \mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b \in \tau : \left[a \in \mathcal{O}_a \wedge b \notin \mathcal{O}_a \wedge a \notin \mathcal{O}_b \wedge b \in \mathcal{O}_b \right]$$

Ein Raum ist T_1 genau dann, wenn alle seine Punkte als Singletons abgeschlossen sind.

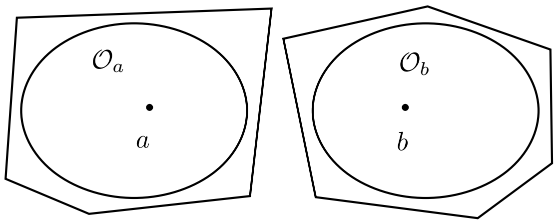


$$\mathbf{T_2}: \quad a \neq b \in X \to \exists \mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b \in \tau : \left[a \in \mathcal{O}_a \wedge b \in \mathcal{O}_b \wedge \mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b = \emptyset \right]$$

Ein Raum ist T_2 genau dann, wenn jeder Punkt als Singleton der Schnitt seiner abgeschlossenen Umgebungen ist. Ein T_2-Raum heißt auch *hausdorffsch* oder *Hausdorff*.

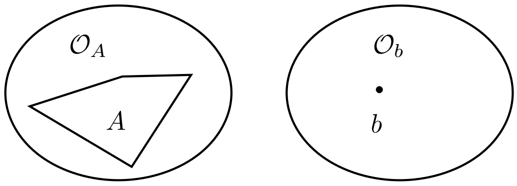


$$\mathbf{T_{2\frac{1}{2}}}: \quad a \neq b \in X \to \exists \mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b \in \tau : \left[a \in \mathcal{O}_a \wedge b \in \mathcal{O}_b \wedge \overline{\mathcal{O}_a} \cap \overline{\mathcal{O}_b} = \emptyset \right]$$



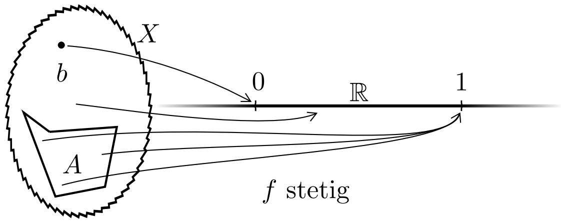
$$\mathbf{T_3}: \quad \overline{A} \subseteq X \wedge b \in X \setminus \overline{A} \to \exists \mathcal{O}_A, \mathcal{O}_b \in \tau : \left[\overline{A} \subseteq \mathcal{O}_A \wedge b \in \mathcal{O}_b \wedge \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_b = \emptyset \right]$$

Ein Raum ist T_3 genau dann, wenn sich zu jeder offenen Menge um einen beliebigen Punkt dieser Menge eine abgeschlossene Umgebung schachteln lässt, die in der offenen Menge liegt.



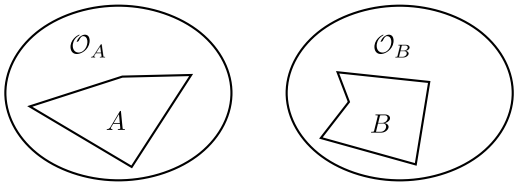
$$\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}: \quad \overline{A} \subseteq X \wedge b \in X \setminus \overline{A} \to \exists f : \Big[X \to [0,1]\,\text{stetig} \wedge f\restriction_{\overline{A}} = 0 \wedge f\restriction_{\{b\}} = 1\Big]$$

Eine solche Funktion f wird URYSOHN-Funktion genannt.

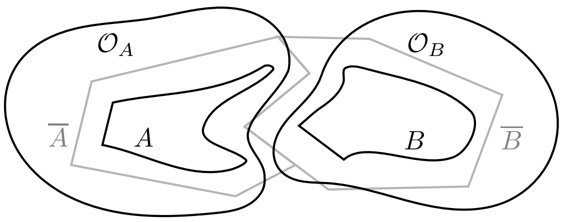


$$\mathbf{T_4}: \quad A, B \subseteq X \wedge \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \to \exists \mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \in \tau : \Big[\overline{A} \subseteq \mathcal{O}_A \wedge \overline{B} \subseteq \mathcal{O}_B \wedge \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \emptyset\Big]$$

Ein Raum ist T_4 genau dann, wenn jede offene Menge zu jeder abgeschlossenen Teilmenge eine abgeschlossene Umgebung dieser Teilmenge umfasst. Das Lemma von URYSOHN[B, Satz 1.6.2] besagt, dass ein Raum T_4 ist genau dann, wenn es zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Mengen eine URYSOHN-Funktion gibt.



$$\mathbf{T_5}: \quad A, B \subseteq X \wedge A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B \to$$
$$\exists \mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \in \tau : \Big[A \subseteq \mathcal{O}_A \wedge B \subseteq \mathcal{O}_B \wedge \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \emptyset\Big]$$



$$\textbf{regulär}: \quad X \text{ ist regulär } :\Leftrightarrow X \text{ ist } T_0 \wedge X \text{ ist } T_3$$

Wie wir später sehen werden, besagt Regularität eines Raumes, dass er T_0, T_1, T_2, $T_{2\frac{1}{2}}$ und T_3 ist.

$$\textbf{normal}: \quad X \text{ ist normal } :\Leftrightarrow X \text{ ist } T_1 \wedge X \text{ ist } T_4$$

Wie wir später sehen werden, besagt Normalität eines Raumes, dass er T_0, T_1, T_2,$T_{2\frac{1}{2}}$, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ und T_4 ist.

4 Beziehung der Trennungsaxiome

4.1 Implikationen

Wir wollen nun untersuchen, in welcher Beziehung die T_i-Axiome zueinander stehen. Dazu zeigen wir zuerst einige geltende Implikationen, die Gegenbeispiele für nicht gültige Implikationen folgen später.

Theorem 1. *Behauptung*: $T_5 \Rightarrow T_4$

Beweis: Es gelte

$$L, M \subseteq X \,\wedge\, L \cap \overline{M} = \emptyset = \overline{L} \cap M \rightarrow \exists \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_M \in \tau : \Big[L \subseteq \mathcal{O}_L \,\wedge\, M \subseteq \mathcal{O}_M \,\wedge\, \mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_M = \emptyset\Big]$$

zu zeigen ist

$$A, B \subseteq X \,\wedge\, \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \rightarrow \exists \mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \in \tau : \Big[\overline{A} \subseteq \mathcal{O}_A \,\wedge\, \overline{B} \subseteq \mathcal{O}_B \,\wedge\, \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \emptyset\Big]$$

Wir wählen $L := \overline{A}$ und $M := \overline{B}$ und beachten, dass die Voraussetzungen der T_4-Implikation $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{L} \cap \overline{M} = \emptyset$ verlangen. Dann ist die linke Seite der ersten Formel erfüllt, die rechte Seite genau die gewünschte Aussage der zweiten Formel. ■

Theorem 2. *Behauptung*: $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$

Beweis: Es gelte

$$\overline{A} \subseteq X \,\wedge\, b \in X \setminus \overline{A} \rightarrow \; \exists f : \Big[X \rightarrow [0,1]\,\text{stetig} \,\wedge\, f \restriction_{\overline{A}} = 0 \,\wedge\, f \restriction_{\{b\}} = 1\Big]$$

zu zeigen ist

$$\overline{A} \subseteq X \,\wedge\, b \in X \setminus \overline{A} \rightarrow \; \exists \mathcal{O}_A, \mathcal{O}_b \in \tau : \Big[\overline{A} \subseteq \mathcal{O}_A \,\wedge\, b \in \mathcal{O}_b \,\wedge\, \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_b = \emptyset\Big]$$

$f^{-1}\big([0,\, 1/3)\big), f^{-1}\big((2/3\,,1]\big)$ sind als Urbilder offener Mengen des Einheitsintervalles offene Umgebungen von $\overline{A}$ bzw b, außerdem nach Definition des Urbildes disjunkt. ■

Theorem 3. *Behauptung*: $T_{2\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

Beweis: Es gelte

$$a \neq b \in X \rightarrow \exists \mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b \in \tau : \Big[a \in \mathcal{O}_a \,\wedge\, b \in \mathcal{O}_b \,\wedge\, \overline{\mathcal{O}_a} \cap \overline{\mathcal{O}_b} = \emptyset\Big]$$

zu zeigen ist (für T_2 - aber T_1 und T_0 sind um nichts schwieriger)

$$a \neq b \in X \rightarrow \exists \mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b \in \tau : \Big[a \in \mathcal{O}_a \,\wedge\, b \in \mathcal{O}_b \,\wedge\, \mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b = \emptyset\Big]$$

das funktioniert wegen $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B \subseteq \overline{\mathcal{O}_A} \cap \overline{\mathcal{O}_B} = \emptyset$, weiters trennen die offenen Mengen, die wir wegen T_2 finden, wie in T_1 und T_0 gefordert. ■

Die $T_{n\frac{1}{2}}$-Axiome tragen nicht zufällig diesen Namen. Sie liegen in ihrer Stärke zwischen zwei ganzzahligen T_i, wie wir nun feststellen wollen.

Theorem 4. *Behauptung*: $T_3 \wedge T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$

Beweis[S&S, Seite 14]: Es gelten

$$\overline{C} \subseteq X \,\wedge\, d \in X \setminus \overline{C} \rightarrow \; \exists \mathcal{O}_C, \mathcal{O}_d \in \tau : \Big[\overline{C} \subseteq \mathcal{O}_C \,\wedge\, d \in \mathcal{O}_d \,\wedge\, \mathcal{O}_C \cap \mathcal{O}_d = \emptyset\Big]$$

T_4

Zu zeigen ist

$$\overline{A} \subseteq X \wedge b \in X \setminus \overline{A} \rightarrow \exists f: \Big[X \rightarrow [0,1] \,\text{stetig} \wedge f\restriction_{\overline{A}} = 0 \wedge f\restriction_{\{b\}} = 1\Big]$$

d.h. wir wollen $\overline{A}$ und b mit einem stetigen f trennen. Mit $\overline{C} := \overline{A}$ und $d := b$ gilt, dass $\mathcal{O}_C^c$ als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, und außerdem zu $\overline{C}$ disjunkt. Auf diese beiden disjunkten, abgeschlossenen Mengen können wir wegen T_4 das Lemma von Urysohn anwenden und erhalten so eine stetige Funktion $g: X \rightarrow [0,1]$, die konstant 0 bzw. 1 auf der einen bzw. der anderen Menge ist. Dann hat g alle von f gewünschten Eigenschaften. ■

Theorem 5. *Behauptung*: $T_2 \wedge T_3 \Rightarrow T_{2\frac{1}{2}}$

Beweis: Es gelten

$$c \neq d \in X \rightarrow \exists \mathcal{O}_c, \mathcal{O}_d \in \tau: \Big[c \in \mathcal{O}_c \wedge d \in \mathcal{O}_d \wedge \mathcal{O}_c \cap \mathcal{O}_d = \emptyset\Big]$$

$$\overline{L} \subseteq X \wedge m \in X \setminus \overline{L} \rightarrow \exists \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_m \in \tau: \Big[\overline{L} \subseteq \mathcal{O}_L \wedge m \in \mathcal{O}_m \wedge \mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_m = \emptyset\Big]$$

Zu zeigen ist

$$a \neq b \in X \rightarrow \exists \mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b \in \tau: \Big[a \in \mathcal{O}_a \wedge b \in \mathcal{O}_b \wedge \overline{\mathcal{O}_a} \cap \overline{\mathcal{O}_b} = \emptyset\Big]$$

Mit $c := a$ und $d := b$ erhalten wir aus T_2 zwei offene, disjunkte Mengen $\mathcal{O}_c, \mathcal{O}_d$. Es gilt nun $a \notin \mathcal{O}_c^c$, also liefert T_3 vermöge $\overline{L} := \mathcal{O}_c^c$ und $m := c$ zwei Mengen $\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_m$. Wir definieren nun $\overline{\mathcal{O}_a} := \mathcal{O}_L^c \ni a$ und $\overline{\mathcal{O}_b} := \overline{L} \ni b$, die disjunkte abgeschlossene Mengen sind. Wir wollen aber Umgebungen finden, daher zeigen wir als letzten Schritt noch, dass $\overline{\mathcal{O}_a}$ und $\overline{\mathcal{O}_b}$ offene Mengen umfassen:

$$\mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_m = \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}_m \subseteq \mathcal{O}_L^c = \overline{\mathcal{O}_a}$$
$$\mathcal{O}_c \cap \mathcal{O}_d = \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{O}_c^c = \overline{L} = \overline{\mathcal{O}_b}$$

■

Theorem 6. *Behauptung*: $T_0 \wedge T_3 \Rightarrow T_2$

Beweis: Wir nehmen hier im Beweis an, dass T_0 eine Umgebung für a liefert. Ansonsten ist das Argument symmetrisch für b zu führen.

$$\begin{aligned} a \neq b &\overset{T_0}{\Rightarrow} \exists \mathcal{O}_a \in \tau: \ a \in \mathcal{O}_a \wedge b \notin \mathcal{O}_a \\ &\Rightarrow a \notin \mathcal{O}_a^c \\ &\overset{T_3}{\Rightarrow} \exists \mathcal{U}_a, \mathcal{U}_b \in \tau: \ a \in \mathcal{U}_a \wedge b \in \mathcal{O}_a^c \subseteq \mathcal{U}_b \wedge \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset \end{aligned}$$

■

Theorem 7. *Behauptung*: $T_1 \wedge T_4 \Rightarrow T_3$

Beweis: Sind $m \notin \overline{L}$ ein Punkt in X und eine abgeschlossene Menge, dann müssen wir diese beiden offen trennen. Dazu beachten wir, dass in T_1-Räumen einzelne Punkte stets abgeschlossen sind (denn ihr Komplement lässt sich aus offenen Mengen vereinigen), können somit T_4 in Form des Urysohn-Lemmas anwenden auf $\{m\} \cap \overline{L} = \emptyset$ und erhalten die gesuchten offenen Umgebungen. ■

Nun ist es nicht mehr schwierig einzusehen, dass (wie zuvor behauptet) *regulär* alle T_i bis $i = 3$ impliziert und *normal* alle T_i bis $i = 4$. Wir müssen nur bisherige Resultate einsammeln.

Theorem 8. *Behauptung*: X regulär $\Rightarrow X$ ist $T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_{2\frac{1}{2}}$ und T_3

Beweis: Sei X ein regulärer Raum, also T_0 und T_3. Laut Theorem 6 ist X auch T_2, folglich mit Theorem 5 auch $T_{2\frac{1}{2}}$, und weiter mit Theorem 3 auch T_1. ■

Theorem 9. *Behauptung*: X normal $\Rightarrow X$ ist $T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_{2\frac{1}{2}},\ T_3,\ T_{3\frac{1}{2}}$ und T_4

Beweis: Sei X ein normaler Raum, also T_1 und T_4. Laut Theorem 7 ist X dann T_3 und mit Theorem 3 bekommen wir aus T_1 das schwächere T_0. Also ist X regulär. Nun liefert uns das vorige Theorem 8, dass X alle T_i bis incl. $i = 3$ erfüllt, mit Theorem 4 erhalten wir auch noch $T_{3\frac{1}{2}}$. ■

4.2 Gegenbeispiele zu Implikationen

Nun wollen wir uns den Nicht-Implikationen zwischen den T_i-Axiomen widmen, also untersuchen, welche echt stärker als andere oder unabhängig zu anderen sind.

Theorem 10. *Behauptung*: $T_0 \not\Rightarrow T_1$ und $T_0 \not\Rightarrow T_3$ und $T_0 \not\Rightarrow T_4$

Beweis: Wir basteln in Anlehnung an [S&S, II.8] ein Beispiel eines T_0-Raumes, der nicht T_1 oder T_3 ist. Weiters geben einen T_0-Raum an, welcher T_4 verletzt.
Sei $X := \{0, 1\}$, $\tau := \big\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\big\}$. Nun lässt sich um 0 keine Umgebung legen, die von 1 trennt (die einzige Umgebung ist schon ganz X). Dieser Raum ist folglich weder T_1 noch T_3.
Für $T_0 \not\Rightarrow T_4$ sei $Y := \{1, 2, 3\}$, $\tau := \big\{\emptyset, \{1, 2\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$. Dann ist Y zwar T_0, aber $\{1\}$ und $\{3\}$ sind abgeschlossene Mengen, die sich nicht durch disjunkte offene Mengen trennen lassen, da Umgebungen stets 2 enthalten. Also ist Y nicht T_4. ■

Da wir schon gezeigt haben, dass T_2 und $T_{2\frac{1}{2}}$ stärker als T_1 sind, $T_{3\frac{1}{2}}$ stärker als T_3 ist und T_5 stärker als T_4, wissen wir nun, dass auch diese nicht aus T_0 folgen.
Die eben konstruierten Gegenbeispiele waren die einzigen mit einer endlichen Grundmenge, ab jetzt müssen wir auf kompliziertere Konstruktionen zurückgreifen. Das liegt daran, dass ein endlicher T_1-Raum die diskrete Topologie $\tau = P(X)$ trägt, und damit alle T_i erfüllt.

Lemma 1. *Behauptung*: $|X| < \infty \wedge (X, \tau)$ ist $T_1 \Rightarrow \tau = P(X)$

Beweis: In einem T_1-Raum sind Punkte abgeschlossen, da sich ihr Komplement als Vereinigung offener Mengen darstellen lässt. Eine beliebige Teilmenge von X ist somit die endliche (!) Vereinigung abgeschlossener Mengen und als solche abgeschlossen. Damit ist jede Teilmenge abgeschlossen (und offen). ■

Theorem 11. *Behauptung*: $T_1 \not\Rightarrow T_2 \vee T_3 \vee T_4 \vee T_5$

Beweis[S&S, II.18]: Wir geben einen T_1-Raum X an, der nicht T_2 ist. Aufgrund des vorigen Lemma 1 muss $|X| = \infty$ sein.

$$X := \mathbb{N}, \quad \tau := \Big\{M \subseteq \mathbb{N} \,\Big|\, |M^c| < \infty\Big\} \cup \Big\{\emptyset\Big\}$$

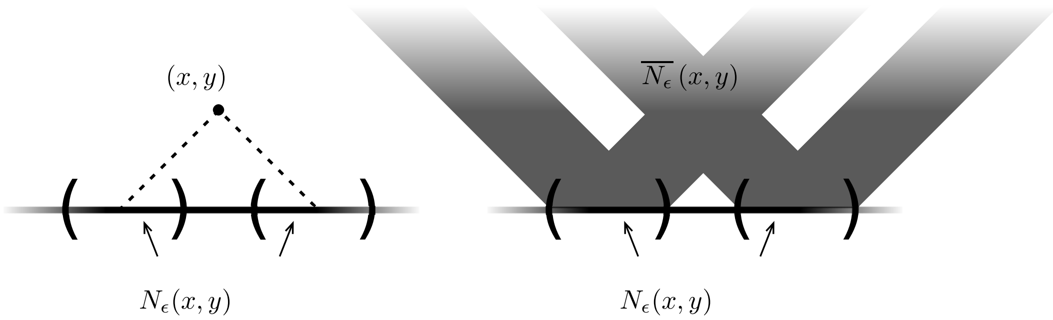
τ ist eine Topologie, weil die Vereinigung von Mengen mit endlichen Komplementen selbst wieder endliches (sogar kleineres) Komplement hat, und weil der endliche Schnitt solcher Mengen ein Komplement hat, das sich als endliche Vereinigung endlicher Mengen darstellen lässt. Ferner gilt $\emptyset \in \tau$ und $\mathbb{N} \in \tau$.
Dieser Raum ist T_1, denn sind $a \neq b \in \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{N} \setminus \{a\}$ Umgebung von b und $\mathbb{N} \setminus \{b\}$ Umgebung von a. Zwei offene Mengen $\neq \emptyset$ können aber nie disjunkt sein, weil sie einen Endabschnitt von $\mathbb{N}$ teilen. Die Existenz von disjunkten, offenen Mengen ist jeweils notwendig für T_2, T_3, T_4 und T_5. Wir erkennen, dass X keines dieser Axiome erfüllt. ■

Theorem 12. *Behauptung*: $T_2 \not\Rightarrow T_{2\frac{1}{2}}$

Beweis[S&S, II.75]: Wir geben einen T_2-Raum X an, der nicht $T_{2\frac{1}{2}}$ ist. Sei $X := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_0^+$ und τ die Topologie, die erzeugt wird durch die ϵ-Umgebungsbasis

$$N_\epsilon(x,y) := \Big\{(x,y)\Big\} \cup \Big\{(s,0) \in \mathbb{Q} \times \{0\} \,\Big|\, |s - \sqrt{2}y| < \epsilon \vee |s + \sqrt{2}y| < \epsilon\Big\}$$

Diese Umgebungen bestehen neben (x,y) aus zwei ϵ-Intervallen rationaler Zahlen auf der Abszisse $\mathbb{Q}\times\{0\}$, welche um jene zwei Punkte zentriert sind, die man als Projektion von (x,y) entlang Geraden der Steigung $\pm 1/\sqrt{2}$ auf die Abszisse erhält.
Dieser Raum ist T_2, denn $(s,t) \neq (x,y) \in X$ werden auf die irrationalen Punkte der Abzisse $(\sigma, 0) \neq (\xi, 0)$ projeziert, die sich durch disjunkte offene Intervalle trennen lassen.
Dieser Raum ist nicht $T_{2\frac{1}{2}}$, denn der Abschluss von zwei Umgebungen ist nie disjunkt. Um das einzusehen betrachten wir eine Menge $N_\epsilon(x,y)$ auf der Umgebungsbasis. Den Abschluss von $N_\epsilon(x,y)$ erhalten wir, wenn wir die zwei ϵ-Intervalle auf $\mathbb{Q} \times \{0\}$ abschließen, dann jedes Intervall entlang Geraden der Steigung $\pm 1/\sqrt{2}$ nach oben verschieben, und diese verschobenen Intervalle dazuvereinigen. Denn dadurch erreichen wir genau jene Punkte, deren sämtliche Umgebungen nichtleeren Schnitt mit $N_\epsilon(x,y)$ haben.



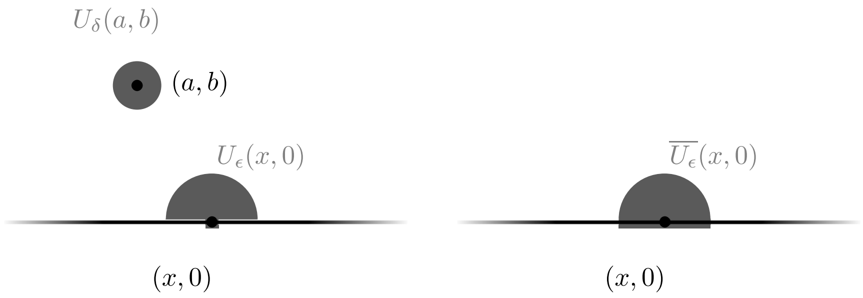
■

Theorem 13. *Behauptung*: $T_{2\frac{1}{2}} \not\Rightarrow T_3$

Beweis[S&S, II.78]: Wir geben einen $T_{2\frac{1}{2}}$-Raum X an, der nicht T_3 ist. Sei $X := \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_0^+$ und $\tau := \tau_+ \cup \tau_0$, wobei τ_+ die euklidische Topologie auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ bezeichne und τ_0 erzeugt sei von der ϵ-Umgebungsbasis

$$U_\epsilon(x,0) := \Big\{(x,0)\Big\} \cup \Big\{(s,t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \,\Big|\, (s-x)^2 + (t-0)^2 < \epsilon^2\Big\}$$

Die Topologie τ beinhaltet also oberhalb der Abszisse alle ϵ-Kugeln; auf der Abszisse werden die Umgebungen erzeugt von Mengen, die einen Punkt auf der Achse beinhalten und eine um diesen Punkt zentrierte Halbkugel in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$.
Wir zeigen, dass X $T_{2\frac{1}{2}}$ ist. Auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ ist das einfach, weil die euklidische Topologie $T_{2\frac{1}{2}}$ ist. Der interessante Fall tritt auf, wenn ein Punkt $(x,0)$ auf der Abszisse liegt. Wir betrachten eine Basisumgebung $U_\epsilon(x,0)$ und deren Abschluss. Dieser besteht aus einer abgeschlossenen ϵ-Kugel in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$, zusammen mit dem Intervall $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ auf der Abszisse. Durch hinreichend kleine Wahl von ϵ lässt sich $(x,0)$ somit von beliebigem (a,b) durch abgeschlossene Umgebungen trennen.
Wir zeigen, dass X nicht T_3 ist. Dafür untersuchen wir bei festem $\alpha > 0$ erneut eine Basis-Umgebung $U_\alpha(x,0)$ eines Punktes auf der Abszisse. Das Komplement $U_\alpha^c(x,0)$ dieser Menge ist abgeschlossen und besteht u.A. aus $\mathbb{Q} \times \{0\} \setminus \{(x,0)\}$. Diese abgeschlossene Menge $U_\alpha^c(x,0)$ lässt sich nicht offen von $(x,0)$ trennen, denn für beliebiges $\epsilon > 0$ umfasst eine ϵ-Kugel $U_\epsilon(x,0)$ ein ϵ-Intervall der Abszisse, ist also nicht disjunkt zu $\mathbb{Q} \times \{0\} \setminus \{(x,0)\} \subseteq U_\alpha^c(x,0)$. Es lässt sich folglich keine Umgebung von $(x,0)$ finden, die disjunkt zu $U_\alpha^c(x,0)$ wäre. Es lassen sich $(x,0)$ und die obige abgeschlossene Menge nicht offen trennen, also kann X nicht T_3 sein.



∎

Die Aussage $T_3 \not\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ überspringen wir an dieser Stelle und zeigen sie erst am Ende des Abschnittes. Das liegt daran, dass das Gegenbeispiel recht aufwändig ist und leichter zu behandeln ist, wenn wir das Gegenbeispiel zu $T_4 \not\Rightarrow T_5$ verstanden haben.

Theorem 14. *Behauptung*: $T_{3\frac{1}{2}} \not\Rightarrow T_4$

Beweis[S&S, II.82]: Wir geben einen $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum X an, der nicht T_4 ist. Sei $X := \mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$ und $\tau := \tau_+ \cup \tau_0$, wobei τ_+ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ bezeichne und τ_0 erzeugt sei von der ϵ-Umgebungsbasis

$$U_\epsilon(x,0) := \Big\{(x,0)\Big\} \cup \Big\{(s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \;\Big|\; (s-x)^2 + (t-\epsilon)^2 < \epsilon^2\Big\}$$

Die Topologie τ beinhaltet also oberhalb der Abszisse alle ϵ-Kugeln; auf der Abszisse werden die Umgebungen erzeugt von Mengen, die einen Punkt auf der Achse beinhalten und eine diesen Punkt tangierende ϵ-Kugel in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.
Wir zeigen, dass X $T_{3\frac{1}{2}}$ ist. Auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ ist das einfach, weil die euklidische Topologie $T_{3\frac{1}{2}}$ ist. Der interessante Fall tritt auf, wenn ein Punkt $(x,0)$ auf der Abszisse liegt. Gilt $(x,0) \notin \overline{A}$, so müssen wir eine Funktion f angeben, die $(x,0)$ von $\overline{A}$ stetig trennt. Da $\overline{A}^c$ offen ist, finden wir eine Basis-Umgebung $U_\epsilon(x,0)$, die disjunkt ist zu $\overline{A}$. Wir definieren nun

$$f(x,0) := \begin{cases} 0 & (s,t) = (x,0) \\ 1 & (s,t) \in U_\epsilon^c(x,0) \\ \frac{(s-x)^2+t^2}{2\epsilon t} & (s,t) \in U_\epsilon(x,0) \setminus \{(x,0)\} \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ ist f stetig, weil innerhalb der Kugel stetige Funktionen zusammengesetzt werden und der Definitionsübergang am Kugelrand stetig erfolgt. Für (s,t) am Kugelrand gilt nämlich

$$\begin{aligned} & (s-x)^2 + (t-\epsilon)^2 = \epsilon^2 \\ \Rightarrow\quad & (s-x)^2 = \epsilon^2 - (t-\epsilon)^2 \\ \Rightarrow\quad & \frac{(s-x)^2+t^2}{2\epsilon t} = \frac{\epsilon^2-(t-\epsilon)^2}{2\epsilon t} = \frac{2\epsilon t}{2\epsilon t} = 1 \end{aligned}$$

Vermöge der Folge $f(x,1/n) = 1/2\epsilon n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ erkennen wir, dass f auch in $(x,0)$ stetig ist, insgesamt also auf ganz X. Wir haben somit gezeigt: X ist $T_{3\frac{1}{2}}$.
Wir zeigen nun, dass X nicht T_4 ist. Dazu geben wir zwei abgeschlossene Mengen $\overline{A}$, $\overline{B}$ an, die sich nicht offen trennen lassen. Wir definieren

$$\overline{A} := \mathbb{Q}\times\{0\}, \quad \overline{B} := (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\{0\}$$

Diese Mengen sind abgeschlossen, weil ihr jeweiliges Komplement in X um jeden Punkt eine Basis-Umgebung umfasst. Außerdem sind sie offensichtlich disjunkt. Der Versuch, $\overline{A}$ von $\overline{B}$ durch Umgebungen zu trennen, kann jedoch nicht gelingen. Wir zeigen dies, indem wir solche Umgebungen annehmen und einen Widerspruch erzeugen. Ist $(\mathcal{O}_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ eine Überdeckung von $\overline{A}$, dann schleppt jedes $q \in \mathbb{Q}$ eine tangierende Kugel in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ mit sich. Wollen wir auch $\overline{B}$ offen überdecken, so gilt dasselbe für jedes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wenn wir nun mit S_n die Menge jener irrationalen Punkte bezeichnen, deren tangierende Kugel einen Radius größer als $1/n$ hat, dann ist diese Menge nirgends dicht bezüglich der euklidischen Topologie. (Enthielte ihr euklidischer Abschluss nämlich einen rationalen Punkt, dann wäre an diesem Punkt kein Platz mehr für eine offene, tangierende Kugel.) Jedes S_n besteht somit nur aus abzählbar vielen isolierten Punkten. Es gilt aber $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, wobei die Menge rechts des Gleichheitszeichens als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, $\mathbb{R}$ jedoch nicht. Das liefert den gesuchten Widerspruch. ∎

Das folgende Lemma stellt eine Verschärfung des Resultates $T_5 \Rightarrow T_4$ dar. Wir werden später die Kontraposition der Aussage verwenden. Es gilt hier sogar Äquivalenz[K, §14.V], wir benötigen aber nur die Implikation und verzichten daher auf einen Beweis der Gegenrichtung.

Lemma 2. *Behauptung*: (X, τ) ist $T_5 \Rightarrow \forall A \subseteq X : (A, \tau_A)$ ist T_4

Beweis: Wir weisen T_4 nach, indem wir zwei in A abgeschlossene disjunkte Mengen $\overline{L}^A$, $\overline{M}^A$ trennen durch Mengen, die bezüglich τ_A disjunkte Umgebungen sind. Aufgrund der Definition der Spurtopologie können wir die abgeschlossenen Mengen darstellen als

$$\overline{L}^A = A \cap \overline{L}^X \qquad \text{mit } \overline{L}^X \subseteq \overline{A}^X$$
$$\overline{M}^A = A \cap \overline{M}^X \qquad \text{mit } \overline{M}^X \subseteq \overline{A}^X$$

Nun folgt aus

$$\begin{aligned} & \overline{L}^A \cap \overline{M}^A = \emptyset \\ \Rightarrow \quad & \overline{L}^X \cap \overline{M}^X \subseteq \overline{A}^X \setminus A \\ \Rightarrow \quad & \overline{L}^A \cap \overline{M}^X = (A \cap \overline{L}^X) \cap \overline{M}^X \subseteq A \cap (\overline{A}^X \setminus A) = \emptyset \end{aligned}$$

und analog $\overline{L}^X \cap \overline{M}^A = \emptyset$. Damit liefert T_5 angewendet auf $\overline{L}^A$, $\overline{M}^A$ zwei in X offene, disjunkte Mengen $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_M$. Deren Schnitte mit A sind die gesuchten Umgebungen. ∎

Wir brauchen für das nächste Gegenbeispiel ein paar Aussagen über kompakte Mengen, diese Aussagen werden wir in den folgenden Lemmata bereitstellen.
Eine linear geordnete[3] Menge $X, \preceq$ lässt sich auf sehr kanonische Weise topologisieren[S&S, II.39], indem man sie mit der Topologie $\tau_\preceq$ versieht, die von offenen Intervallen $(a, b) := \{x \in X \mid a \prec x \prec b\}$ erzeugt wird.

Lemma 3. *Behauptung*: $X, \tau_\preceq$ ist kompakt $\Leftrightarrow$[4] $\forall A \subseteq X : \; \exists \inf A \wedge \exists \sup A$

Beweis[S&S, II.39]: Der Beweis erfolgt für beide Implikationen seperat.
"$\Rightarrow$": Wir zeigen die Kontraposition. Wenn eine Teilmenge $A \subseteq X$ kein Supremum (analog für Infimum) in X besitzt, dann bilden die Anfangsabschnitte $X_{\prec a} := \{x \in X \mid x \prec a\}$ bei laufendem $a \in A$ (gemeinsam mit $X_{\succ b} := \{x \in X \mid x \succ b\}$ für b eine obere Schranke von A falls eine solche existiert, ansonsten ohne diese Menge) eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Zu jeder endlichen Anzahl von Elementen in A existiert nämlich ein noch größeres.
"$\Leftarrow$": Sei $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir wollen eine endliche Teilüberdeckung finden. Dafür betrachten wir jene Anfangsabschnitte $X_{\prec a}$, welche von endlich vielen $\mathcal{O}_i$ überdeckt werden können. Wir fassen diese a in einer Menge A zusammen. Dann ist A ein (echter oder unechter) Anfangsabschnitt von X, weil A nach unten abgeschlossen ist. (Wenn ein langer Anfangsabschnitt von X endlich überdeckt werden kann, dann ein kurzer erst recht.) Wir behaupten nun, dass A ein unechter Anfangsabschnitt ist, also ganz X. Um das einzusehen, überlegen wir uns, dass wir an A hinten immer noch ein Stück dranhängen können. Ist nämlich $\alpha \prec \sup A \prec \sup X$, dann kann $X_{\prec \alpha}$ endlich überdeckt

[3] Eine lineare Ordnung $\preceq$ auf X ist eine 2-stellige Relation, die reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und total ist.

werden. Es gibt ein $\mathcal{O}_s$, welches $\sup A$ überdeckt, und weil $\mathcal{O}_s$ offen ist, ragt es ein Stück weit unter $\sup A$, enthält also ein $\beta \in A$. Genauso ragt $\mathcal{O}_s$ auch nach oben über $\sup A$ hinaus, enthält also auch ein $\gamma \succ \sup A$. Nun können wir eine endliche Überdeckung von $X_{\prec\alpha}$ um $\mathcal{O}_s$ erweitern und somit $X_{\prec\gamma}$ endlich überdecken. Also gilt $\gamma \in A$, folglich $\gamma \preceq \sup A$, was ein Widerspruch ist. Unsere Annahme $\sup A \prec \sup X$ muss demnach falsch gewesen sein. Mit dieser Argumentation sehen wir auch $\sup X \in A$, also tatsächlich $A = X$. Das heißt ganz X kann endlich überdeckt werden, ist also kompakt. ■

Lemma 4. *Behauptung*: $K \subseteq X \wedge X$ kompakt $\Rightarrow \overline{K}$ kompakt

Beweis[B, Satz 1.4.4]: Ist $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $\overline{K}$, so ist die um $\overline{K}^c$ erweiterte Mengenfamilie eine offene Überdeckung von X. Diese lässt sich auf endlich viele Mengen reduzieren, womit auch $\overline{K}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. ■

Lemma 5. *Behauptung*: X kompakt $\wedge$ X ist $T_2 \Rightarrow X$ normal

Beweis: Wie wir schon wissen gilt $T_2 \Rightarrow T_1$, weswegen es genügt T_4 zu zeigen (Erinnerung: *normal* $\Leftrightarrow T_1 \wedge T_4$). Wir wollen also zeigen

$$A, B \subseteq X \wedge \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \to \exists \mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \in \tau : \left[\overline{A} \subseteq \mathcal{O}_A \wedge \overline{B} \subseteq \mathcal{O}_B \wedge \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \emptyset\right]$$

Sei $a \in \overline{A}$ beliebig aber fest. Wegen T_2 finden wir offene Überdeckungen $(\mathcal{O}_{a,\neg b})_{b\in\overline{B}}$ und $(\mathcal{O}_{b,\neg a})_{b\in\overline{B}}$ von a respektive $\overline{B}$ mit $\mathcal{O}_{a,\neg b} \cap \mathcal{O}_{b,\neg a} = \emptyset$ für jedes $b \in \overline{B}$. Wegen Kompaktheit von $\overline{A}$ und $\overline{B}$ (siehe Lemma 4) dürfen wir diese Überdeckungen als endlich annehmen. Dann sind $\mathcal{O}_a := \bigcap_{b\in\{1,\dots,n\}} \mathcal{O}_{a,\neg b} \ni a$ und $\mathcal{O}_{B,a} := \bigcup_{b\in\{1,\dots,n\}} \mathcal{O}_{b,\neg a} \supseteq \overline{B}$ disjunkte Umgebungen von a und $\overline{B}$. Nun bildet $(\mathcal{O}_a)_{a\in A}$ eine offene Überdeckung von $\overline{A}$, die wir wiederum wegen Kompaktheit als endlich annehmen können. Mit $\mathcal{O}_A := \bigcup_{a\in\{1,\dots,m\}} \mathcal{O}_a$ und $\mathcal{O}_B := \bigcap_{a\in\{1,\dots,m\}} \mathcal{O}_{B,a}$ erkennen wir, dass T_4 erfüllt ist. ■

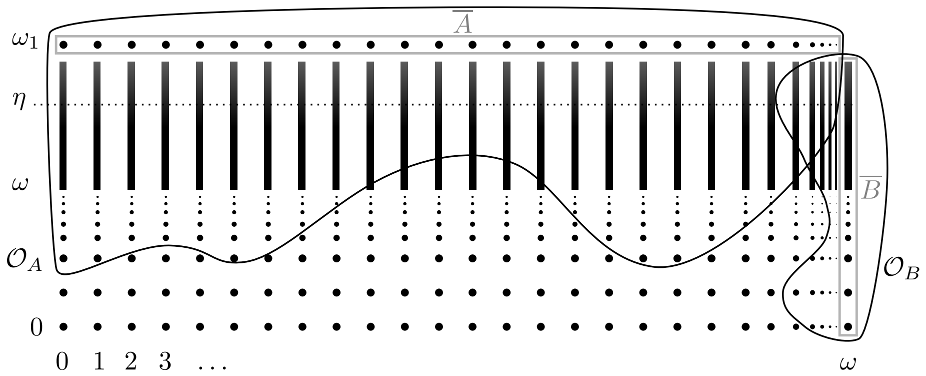
Für die Konstruktion des nächsten Gegenbeispiels verwenden wir Ordinalzahlen. Dabei handelt es sich um Wohlordnungen[1] unterschiedlicher Länge (im ordnungstheoretischen Sinn) und unterschiedlicher Größe (im mengentheoretischen Sinn). Wir werden hier nicht viel weiter auf die Theorie der Ordinalzahlen eingehen, dafür sei zB. auf [J] verwiesen.

Theorem 15. *Behauptung*: $T_4 \not\Rightarrow T_5$

Beweis[S&S, II.86]: Wir geben einen T_4-Raum X an, der nicht T_5 ist. Das machen wir, indem wir einen T_4-Raum konstruieren, der einen Unterraum besitzt, welcher nicht T_4 ist. Laut Lemma 2 kann X dann nicht T_5 sein.
Wir definieren $X_1 := [0, \omega]$, das ist die abzählbare, wohlgeordnete Menge all jener Wohlordnungen, die kürzer[5] als oder gleich lang wie $\mathbb{N}, \leq$ sind. X_1 ist also isomorph zu $\{1, 2, 3, \dots, \infty\}$. Weiters sei $X_2 := [0, \omega_1]$, das ist die überabzählbare, wohlgeordnete Menge all jener Wohlordnungen, die kürzer als oder gleich lang sind wie die kleinste überabzählbare Ordinalzahl ω_1. Dieses Intervall ist sehr groß, X_1 ist nur ein winziges Anfangsstück davon. Wir topologisieren X_1 und X_2 mit der von der Ordnungsrelation *kürzer oder gleich* induzierten Topologie. Weil X_1 und X_2 vollständig sind, also jede Teilmenge Infimum und Supremum in X_i besitzt, sind beide Räume laut Lemma 3 kompakt.
Wir betrachten nun $X := X_1 \times X_2$ ausgestattet mit der Produkttopologie, die von offenen Rechtecken $(l_1, l_2) \times (u_1, u_2) \subseteq X$ erzeugt wird. Dann ist X als Produkt kompakter Räume laut dem Satz von Tichonow[B, Satz 1.4.7] kompakt (im Spezialfall eines endlichen Produktes wie hier kommt man sogar ohne Auswahlaxiom aus) und wie man sich leicht verdeutlicht ist X auch T_2. Laut Lemma 5 ist X daher normal, insbesondere T_4.
Wir zeigen, dass X nicht T_5 ist, indem wir $X' := X \setminus \{\omega, \omega_1\}$ definieren, also den Eckpunkt rechts oben aus

[4] Ein Element x einer linear geordneten Menge X heißt Supremum von A, genau wenn x die kleinste obere Schranke von A in X ist. Analog heißt x Infimum von A, genau wenn es die größte untere Schranke ist.
[5] Eine Wohlordnung[1] $K, \preceq$ heißt *kürzer* als eine Wohlordnung $L, \sqsubseteq$ genau wenn es eine monotone Bijektion $K \to L_{\sqsubset m}$ zwischen K und einem Anfangsabschnitt von L gibt. Mit dem Auswahlaxiom sind je zwei Wohlordnungen vergleichbar.

X entfernen, und von diesem Unterraum zeigen, dass er nicht T_4 ist. Sind $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ offene Umgebungen der in X' abgeschlossenen Mengen $\overline{A} := [0,\omega) \times \{\omega_1\}$ und $\overline{B} := \{\omega\} \times [0,\omega_1)$, dann sind $\mathcal{O}_A$ und $\mathcal{O}_B$ nicht disjunkt. Um das einzusehen untersuchen wir die Umgebung $\mathcal{O}_A$. Diese enthält zu jedem Punkt (n,ω_1) ein offenes Intervall um ω_1, d.h. wir finden eine Ordinalzahl α_n auf der Ordinate, sodass alle größeren Ordinalzahlen (bis ω_1) in $\mathcal{O}_A$ liegen. Wenn wir $n \in [0,\omega)$ laufen lassen, dann erhalten wir eine punktweise horizontale Schranke in X', oberhalb derer alle Punkte in $\mathcal{O}_A$ liegen. Mit $\eta := \sup_{n\in[0,\omega)} \alpha_n$ gilt $\eta < \omega_1$, denn wie oben erwähnt ist $[0,\omega]$ ein kurzes Anfangsstück des längeren Intervalls. (Das sieht man z.B. indem man sich überlegt, dass ω_1 überabzählbar viele echt kleinere Vorgänger hat und somit durch abzählbar viele echt kleinere Ordinalzahlen unerreichbar ist.) Es gilt also $[0,\omega) \times [\eta,\omega_1) \subseteq \mathcal{O}_A$. Betrachten wir $\mathcal{O}_B$, so stellen wir fest, dass zu jedem $b \in [0,\omega_1)$ ein horizontal nach links ragendes offenes Intervall $(\beta_b,\omega) \times b$ von $\mathcal{O}_B$ umschlossen ist. Insbesondere finden wir zu $b := \eta + 1$ einen Punkt links von ω, der dann aber sowohl in $\mathcal{O}_A$ als auch in $\mathcal{O}_B$ liegt. D.h. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ lassen sich nicht offen trennen, womit X' nicht T_4 und X nicht T_5 ist.



■

Lemma 6. *Behauptung*: (X,τ) ist $T_3 \Rightarrow \forall A \subseteq X : (A,\tau_A)$ ist T_3

Beweis: Sind $m \notin \overline{L}^A$ ein Punkt in A und eine disjunkte in A abgeschlossene Menge, so wollen wir diese beiden offen trennen. Wir behaupten es gibt eine in X offene Obermenge $\overline{L}^X$ zu $\overline{L}^A$, in der m nicht liegt. Mit der Darstellung $\overline{L}^A = \overline{L}^X \cap A$, die sich aus der Definition der Spurtopologie ergibt, gilt

$$\begin{aligned} m \notin \overline{L}^A &\Rightarrow \quad m \in (\overline{L}^A)^c = (\overline{L}^X)^c \cup A^c \\ &\overset{m\in A}{\Rightarrow} \quad m \in (\overline{L}^X)^c \\ &\Rightarrow \quad m \notin \overline{L}^X \end{aligned}$$

Nun können wir verwenden, dass X T_3 ist und erhalten τ-offene Mengen $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_m$. Deren Schnitte mit A sind die gesuchten τ_A-offenen Mengen, mit denen wir trennen können. ■

Für das Gegenbeispiel, welches uns verdeutlicht, dass $T_{3\frac{1}{2}}$ echt stärker ist als T_3 verwenden wir als Bausteine rechteckige Räume Y_i, wobei jeder Quadrant einer solchen Platte Y_i dem in Theorem 15 konstruierten Raum X' gleicht. Wir wollen erst so einen Raum Y_i definieren und im folgenden Lemma 7 eine zentrale Eigenschaft zeigen, bevor wir uns in Theorem 16 an die Konstruktion des Gegenbeispiels machen.
Sei $A := [0^-,\ldots,\omega,\ldots,0^+]$ das am rechten Eckpunkt gespiegelte Intervall $[0,\omega]$ aus Theorem 15, und $B := [0^-,\ldots,\omega_1,\ldots,0^+]$ entsprechend entstanden durch Spiegelung von $[0,\omega_1]$. Wir setzen nun $Y := A \times B \setminus \{(\omega,\omega_1)\}$, spiegeln also den Raum X' aus Theorem 15 an der unteren und der linken Achse, sodass eine rechteckige Platte mit herausgebohrtem Mittelpunkt resultiert.

Lemma 7. *Behauptung*: Y wie oben $\wedge\ f : Y \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \exists \alpha < \omega_1 : f \restriction_{[\alpha^-,\alpha^+]\times\{\omega_1\}}$ konstant

Beweis[S&S, II.87]: Wir gehen in zwei Schritten vor. Erst zeigen wir für jedes $k \in [0, \omega)$ die Existenz eines horizontalen Intervalles um (ω_1, k) auf dem f konstant ist, dann folgern wir daraus die Existenz eines solchen Intervalles um den gelöschten Punkt (ω, ω_1).
Schritt 1: Sei $k \in [0, \omega)$. Wir betrachten die horizontale $\{k\} \times [0^-, \omega_1)$-Halbgerade in Y. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha_n^- \in \{k\} \times [0^-, \omega_1)\ \forall \beta > \alpha_n^- : |f(\alpha_n^-) - f(\beta)| < \frac{1}{n}$$

Bilden wir nun den Grenzübergang $n \to +\infty$, so erkennen wir, dass f auf $\{k\} \times [\sup \alpha_n^-, \omega_1]$ konstant ist ($\sup \alpha_n^- \neq \omega_1$ wie schon in Theorem 16 erwähnt). Das Argument funktioniert analog auf $\{k\} \times (\omega_1, 0^+]$, mit der ω_1-näheren der beiden Ordinalzahlen $\sup \alpha_n^-$ und $\inf \alpha_n^+$ finden wir sogar ein um (k, ω_1) symmetrisches Intervall, auf dem f konstant ist.
Schritt 2: Aus Schritt 1 haben wir zu jedem $k \in [0, \omega)$ ein α_k erhalten, sodass f auf $\{k\} \times [\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ konstant ist. Nun gilt $\alpha^- := \sup_{k \in [0,\omega]} \alpha_k^- \neq \omega_1 \neq \inf_{k \in [0,\omega]} \alpha_k^+ =: \alpha^+$, weil die Ordinalzahl ω_1 nicht von abzählbar vielen echt kleineren Ordinalzahlen erreicht wird. Somit finden wir ein Intervall $[\alpha^-, \alpha^+]$ symmetrisch um den Punkt ω_1, auf dem f in jeder horizontalen Gerade in Y_i konstant ist. Bilden wir nun für festes $\gamma \in [\alpha^-, \alpha^+] \setminus \{\omega_1\}$ eine vertikale Folge $(n, \gamma)_{n \in [0,\omega]}$, dann geht $f(n, \gamma)$ wegen Stetigkeit gegen $f(\omega, \gamma)$. Da f bezüglich γ konstant war für alle n, ist f konstant auf $\{\omega\} \times ([\alpha^-, \alpha^+] \setminus \{\omega_1\})$. ■

Theorem 16. *Behauptung*: $T_3 \not\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$

Beweis[S&S, II.90]: Wir geben einen T_3-Raum an, der nicht $T_{3\frac{1}{2}}$ ist. Sei Y_i die abzählbar unendliche konstante Familie, die für jedes $i \in \mathbb{Z}$ den oben definierten Raum Y_i als Eintrag hat. Wir statten diesen Raum mit der Produkttopologie aus und modifizieren diese Topologie noch, um eine zusammenhängende Schnecke (oder Schraube) aus den Platten Y_i zu generieren. Wir kleben den vierten Quadranten $[\omega, 0^+] \times [0^-, \omega_1] \setminus \{\omega_1\}$ eines jeden Y_i mit der Kante $K := (\omega, 0^+] \times \{\omega_1\}$ an den ersten Quadranten $[\omega, 0^+] \times [\omega_1, 0^+] \setminus \{\omega_1\}$ seines Nachfolgers Y_{i+1}, indem wir Umgebungen von Punkten (x, y) auf K erzeugen lassen von Intervallen der Form

$$\underbrace{(\beta, \gamma) \times (\alpha^-, \omega]}_{\subseteq Y_i} \cup \underbrace{(\beta, \gamma) \times (\omega, \alpha^+)}_{\subseteq Y_{i+1}} \ni (x, y)$$

Sprich: Umgebungen von Punkten auf K ragen oberhalb der Klebekante in Y_i und unterhalb in Y_{i+1}.
Weiters führen wir zwei Endpunkte $\pm\infty$ an den Enden der Schnecke ein, und lassen Umgebungen dieser zwei Punkte erzeugen von Mengen der Form $\bigcup_i Y_i$ mit $i > n$ respektive $i < n$ bei laufendem $n \in \mathbb{N}$. Diesen Raum nennen wir (X, τ).
Bemerkung: Man kann sich die Konstruktion von X vorstellen als eine Stange mit zwei Kugeln an den Enden, um diese Stange schlängelt sich eine unendlich lange Wendeltreppe, die die beiden Endkugeln verbindet. Wenn wir nun die Stange entfernen, die Endkugeln aber belassen, dann erhalten wir X.

Wir behaupten nun, dass der so konstruierte Raum X zwar T_3 aber nicht $T_{3\frac{1}{2}}$ ist, und prüfen zuerst T_3 nach. Dazu müssen wir einen Punkt $x \in X$ von einer abgeschlossenen Menge $x \notin \overline{A} \subseteq X$ offen trennen. Wir unterscheiden zwischen den zwei Fällen $x \in Y_i$ und $x = \pm\infty$.
Fall $\mathbf{x \in X}$: Laut Lemma 6 ist jeder Quadrant eines Y_i ein T_3-Raum, weil er ein Teilraum des T_3-Raumes $[0, \omega] \times [0, \omega_1]$ ist. Wie man sich leicht verdeutlicht, ist daher jede Platte Y_i ebenfalls T_3. Die Spur von $\overline{A}$ in Y_i ist eine abgeschlossene, zu x disjunkte Menge (oder wenigstens Teil einer solchen Menge) und kann in Y_i (weil T_3) daher vermöge $\mathcal{O}_x$ und $\mathcal{O}_A$ getrennt werden. Diese Umgebungen sind auch in X offen. Den Sonderfall $x \in K_i$, wenn x also an der Klebestelle zweier Y_i liegt, behandelt man genauso, man muss die offenen Mengen dann in Y_i und Y_{i+1} suchen und die $\mathcal{O}_A$ vereinigen, die $\mathcal{O}_x$ schneiden.
Fall $\mathbf{x = \pm\infty}$: Sei o.B.d.A. $x = \infty$, der andere Fall wird analog behandelt. $\overline{A}^c$ ist offen und daher Obermenge zu einer Basisumgebung von x der Form $\bigcup_{i>n} Y_i$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\mathcal{O}_x := \bigcup_{i>n+1} Y_i$ sowie $\mathcal{O}_A := \bigcup_{i<n} Y_i \setminus K_n$ und erhalten damit die gesuchten offenen Mengen.
Also ist X T_3. Nun prüfen wir nach, dass X nicht $T_{3\frac{1}{2}}$ sein kann, d.h. wir geben einen Punkt y und eine abgeschlossene Menge $\overline{B}$ an, die sich nicht durch eine stetige Funktion trennen lassen. Wir setzen $y := +\infty$ und $\overline{B} := -\infty$ (als Punkt abgeschlossen, weil $X \setminus \{-\infty\}$ offen ist). Sei f eine stetige Funktion

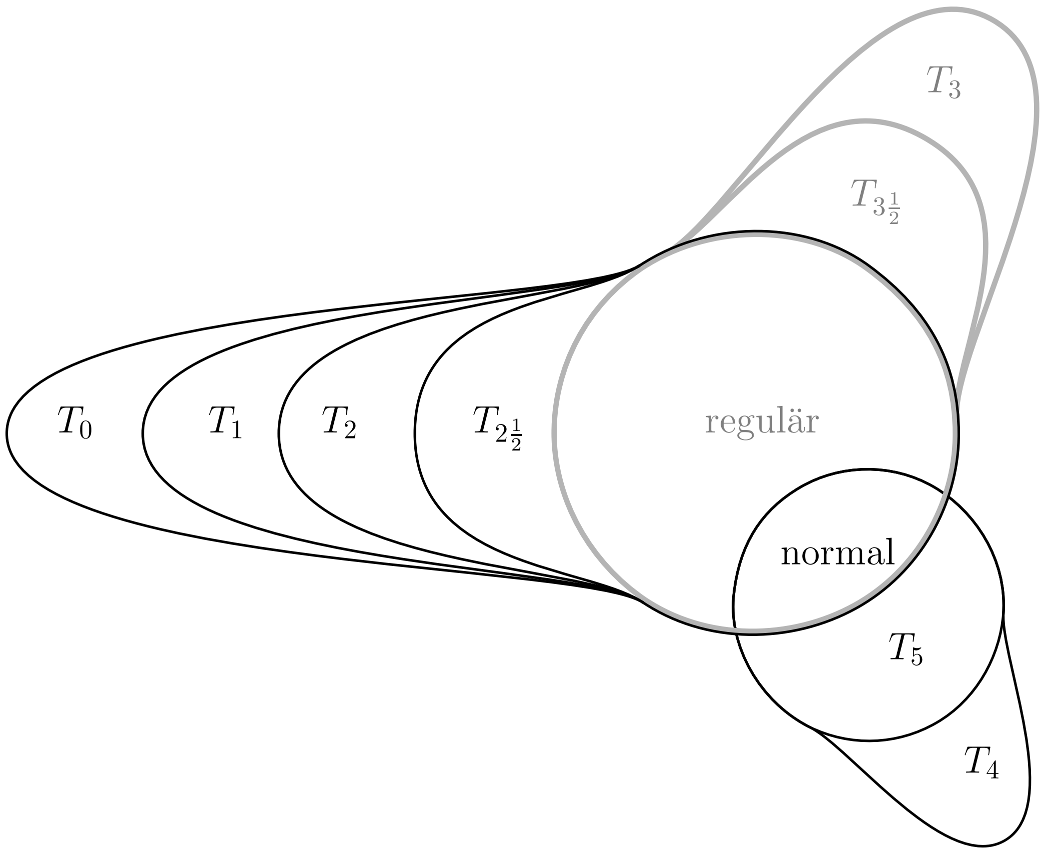
$X \to \mathbb{R}$. Laut Lemma 7 ist f in jedem Y_i auf einem zentrierten Intervall der $\big([0^-, \omega) \cup (\omega, 0^+]\big) \times \{\omega_1\}$-Geraden konstant. Dieses Intervall liegt mit der rechten Hälfte auf der Klebestelle K_i zwischen zwei Platten, womit f in beiden Platten denselben konstanten Wert annimmt. Dies gilt für jedes $i \in \mathbb{Z}$, daher können wir eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $x_i \in Y_i$ finden, auf der f konstant ist. Weil f als stetige Funktion insbesondere folgenstetig ist, gilt

$$f(-\infty) = \lim_{i\to-\infty} f(x_i) = f(x_0) = \lim_{i\to+\infty} = f(+\infty)$$

Also hat jede stetige Funktion in $-\infty$ und $+\infty$ denselben Wert, folglich ist X nicht $T_{3\frac{1}{2}}$.
Bemerkung: Wenn wir uns X als Wendeltreppe vorstellen, dann ist der Raum so gebaut, dass jede stetige Funktion auf der mittigen Stange konstant ist, um die sich die Treppe schlängelt (und die den gelöschten Punkten $(\omega, \omega_1)_i$ entspricht). Unsere Treppe ist 'eng' genug, sodass selbst nach Entfernen dieser Stange die Konstantheit der stetigen Funktion erhalten bleibt und damit die Kugeln am oberen und unteren Ende auf denselben Wert abgebildet werden. ■

5 Zusammenfassung

Die Zusammenhänge unter den T_i-Axiomen, die im Rahmen dieser Arbeit erörtert wurden, lassen sich im folgenden Diagramm veranschaulichen. Dabei sind Mengen, die sich grafisch unterscheiden, auch tatsächlich verschieden - und diese Tatsache wurde hier gezeigt. Es sei aber darauf hingewiesen, dass nicht alle Verhältnisse, die in der Realität gelten, in diesem Diagramm korrekt wiedergegeben werden. So folgt etwa aus T_0 gemeinsam mit T_4 noch nicht Normalität des Raumes[S&S, II.16], auch wenn das hier suggeriert wird. Da diese Aussage aber hier nicht bewiesen wurde, wird sie in der Grafik bewusst nicht visualisiert.



Literatur

[B] Martin Blümlinger: *Analysis 3 (WS 2011/12)* Vorlesungsskriptum, `http://asc.tuwien.ac.at/~blue/Ana3.pdf`, 2011

[J] Thomas Jech: *Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2006

[K] Kazimierz Kuratowski: *Topology*, Academic Press, New York London, 1966

[S&S] Lynn A. Steen, J. Arthur Seebach Jr.: *Counterexamples in Topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York u.a., 1968