Beschränkte, selbstadjungierte Operatoren

SÄTZE VON WEYL UND VON NEUMANN

Gudmund Pammer

15. April 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit befasse ich mich mit dem Spektrum und Störungen selbstadjungierter Operatoren, insbesondere mit dem *Weyl-Kriterium*, dem *Satz von Weyl* und einer Umkehrung dieser Aussage, dem *Satz von von Neumann*. Die Notationsweise ist angelehnt an das *Funktionalanalysis 1*-Skript von *Woracek, Kaltenbäck und Blümlinger* [2]. Als Motivation zur Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren dient der *Schrödinger Operator*:

$$A : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3) : Af = -\Delta f + q \cdot f,$$

$$\text{wobei } q := q_1 + q_2 \text{ mit } q_1 \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ und } q_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Durch *Fouriertransformation* $\mathscr{F}$ erhält man:

$$\mathscr{F}(-\Delta)(f) = |k|^2 \hat{f} =: M \circ \mathscr{F}.$$

Man kann zeigen, dass der Operator M auf entsprechendem Definitionsbereich selbstadjungiert ist und gilt:

$$\sigma(M) = \sigma_{ess}(M) = [0, \infty).$$

Weiters ist die Fouriertransformation ein unitärer Operator, also folgt:

$$[0, \infty) = \sigma_{ess}(M) = \sigma_{ess}(\mathscr{F}^{-1} \circ M \circ \mathscr{F}).$$

Ausgehend von diesen Ergebnissen kann man Rückschlüsse auf das Spektrum des *Schrödinger Operators* ziehen, welcher auch ein selbstadjungierter Operator ist.

2 Das wesentliche Spektrum

Sei im folgenden H ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathscr{B}(H)$.

Definition 2.1 (Wesentliches Spektrum)**.** Wir bezeichnen mit $\sigma_d(A)$ das *Punktspektrum* und mit $\sigma_{ess}(A)$ das *wesentliche Spektrum* von A.

$$\sigma_d(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \dim \ker(A) < \infty \text{ und } \lambda \text{ isoliert in } \sigma(A)\} \tag{1}$$

$$\sigma_{ess}(A) := \sigma(A) \backslash \sigma_d(A) \tag{2}$$

Bemerkung. Diese Definitionen können analog auch für *unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren* übernommen werden. In der Vorlesung von *M. Langer: Spektraltheorie für Differentialoperatoren* [1] wurde der Begriff des wesentlichen Spektrums über *Fredholm-Operatoren* eingeführt. Natürlich ist es eine interessante Tatsache, dass diese Definitionen für selbstadjungierte Operatoren übereinstimmen.

Definition 2.2 (Fredholm-Operator)**.** Ein oBdA. unbeschränkter Operator wird als *abgeschlossen* bezeichnet, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathrm{dom}(A)$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $(Ax_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in \mathrm{ran}\ (A)$ folgt, dass $y = Ax$, welches in natürlicherweise für beschränkte Operatoren immer gilt.

Wir nennen einen abgeschlossenen Operator *Fredholm-Operator*, wenn $\dim\ker(A) < \infty$, $\dim {}^{H}/_{\mathrm{ran}\ (A)} < \infty$ und ran (A) abgeschlossen in H ist.

Um eine andere Charakterisierung des wesentlichen Spektrums zu beweisen, führe ich die Menge M bezüglich eines abgeschlossenen Operators A ein:

$$M := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda) \text{ ist kein Fredholm-Operator}\}$$

und greife auf Satz 2.28 aus [1] zurück, der folgend lautet:

Satz 2.3. Sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Hilbertraum H und Ω eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$, sodass $\Omega \cap M = \emptyset$ und $\Omega \cap \rho(A) \neq \emptyset$. So beinhaltet $\Omega \cap \sigma(A)$ höchstens abzählbar-viele Eigenwerte endlicher Vielfachheit ohne Häufungspunkt in Ω. Weiters ist M eine abgeschlossene Teilmenge des Spektrums.

Satz 2.4 (Wesentliches Spektrum und Fredholm-Operatoren)**.** Sie A ein abgeschlossener Operator, so gilt $\sigma_{ess}(A) = M$.

Beweis. Aus Satz 2.3 folgt, dass entweder $M = \mathbb{R}$ ist oder $\Omega := \mathbb{C}\backslash M$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche die Voraussetzungen aus Satz 2.3 erfüllt, ist. So existieren in Ω höchstens abzählbar-viele Eigenwerte endlicher Vielfachheit ohne Häufungspunkt in Ω. Wir erhalten daher:

$$M \supseteq \sigma_{ess}(A).$$

Sei $\lambda \in M$ und $\lambda \in \sigma_d(A)$, so folgt durch Proposition 6.5.2 aus [2], dass

$$\ker(A - \lambda) = \mathrm{ran}\ (A - \lambda)^{\perp}.$$

Daher folgt, dass $\dim\ \ker(A - \lambda)$ und $\dim {}^{H}/_{\mathrm{ran}\ (A-\lambda)}$ kleiner als unendlich sind und das Bild von $(A-\lambda)$ abgeschlossen ist. Weiters ist $A-\lambda$ als Summe eines abgeschlossenen Operators und eines beschränkten Operators wiederum abgeschlossen. Also ist $(A-\lambda)$ ein Fredholm Operator, dh. $\lambda \notin M$. Dadurch erhalten wir die zweite Inklusion. Es folgt:

$$\sigma_{ess}(A) = M.$$

□

Definition 2.5 (Singuläre Folge)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir nennen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in \mathscr{D}(A)$ *singuläre Folge*, wenn:

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| > 0; \quad \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0,\ y \in H; \quad \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)x_n\| = 0. \tag{3}$$

Wenn zusätzlich gilt, dass die Folgenglieder paarweise orthonormal aufeinanderstehen, nennt man die Folge *orthonormale, singuläre Folge.*

Um das wesentliche Spektrum näher zu verstehen, wollen wir ein einfaches Beispiel betrachten:

Beispiel 2.6. Wir betrachten den Multiplikationsoperator A mit einer beliebigen Nullfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{R}$ auf $l^2(\mathbb{N})$. A ist offensichtlich beschränkt und selbstadjungiert, weiters ist $\sigma(A) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Die erstere Menge ist das Punktspektrum, dh. isolierte Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit. Das wesentliche Spektrum des Operators ist $\{0\}$, weil der Punkt 0 kein isolierter Punkt ist und auch nicht in der Resolventenmenge liegt. Weiters sieht man ein, dass die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine singuläre Folge bezüglich 0 bildet. Dies dient als Motivation für das *Weyl Kriterium.*

Lemma 2.7. Sei A ein selbstadjungierter, beschränkter Operator und $\lambda \in \sigma(A)$. Wir bezeichnen mit E_A das Spektralmaß von A, so gilt $\forall \epsilon > 0$:

$$E_A(\{t \in \mathbb{C} : |\lambda - t| \leq \epsilon\}) \neq 0 \tag{4}$$

Beweis. Wir definieren $\alpha_c := (\{t \in \mathbb{C} : |\lambda - t| \leq c\})$. Angenommen (4) wäre falsch, dh. es existiert ein $c > 0$, sodass $E_A(\alpha_c) = 0$ für λ aus dem Spektrum. Auf $\sigma(A)\backslash\alpha_c$ ist $|t-\lambda| \geq c$ und daher invertierbar mit:

$$\int\limits_{\sigma(A)\backslash\alpha_c} \frac{1}{t-\lambda} dE_A(t) = \int \frac{1}{t-\lambda} dE_A(t) = (A-\lambda)^{-1}$$

Daraus folgt jedoch, dass $(A-\lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(H)$ und damit, dass auch λ in der Resolventemenge, was ein Widerspruch zur Annahme ist. □

Satz 2.8 (Weyl Kriterium)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$;

(ii) Es existiert eine orthonormale, singuläre Folge von A bei λ;

(iii) Es existiert eine singuläre Folge von A bei λ;

(iv) $\dim\ textrmran(E_A((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon))) = \infty$ für alle $\epsilon > 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Wenn λ ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit ist, so wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als beliebige orthonormale Folge im Kern von $(A-\lambda)$. Es gilt $\|x_n\| = 1$ und $(A-\lambda)x_n = 0$. Wegen der *Bessel'schen Ungleichung* folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0,\ y \in H$, und es sich daher um eine orthonormale, singuläre Folge handelt.

Sei nun λ ein Häufungspunkt von $\sigma(A)$, so existiert eine monotone, paarweise-verschiedene Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \in \sigma(A)$, sodass $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Wähle eine positive Nullfolge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathscr{F}_n := (\lambda_n - \epsilon_n, \lambda_n + \epsilon_n)$, sodass $\mathscr{F}_n \cap \mathscr{F}_m = \emptyset$ für $m \neq n$. Wegen Lemma 8 existieren normierte $x_n \in \text{ran } (E_A(\mathscr{F}_n))$ und auf Grund der paarweisen Disjunktheit der $\mathscr{F}_n$ folgt, dass $\langle x_n, x_m \rangle = 0$. Durch die *Bessel'schen Ungleichung* folgt wiederum, dass $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle$, $y \in H$.

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda)x_n\|^2 &= \int_{\mathscr{F}_n} (t-\lambda)^2 dE_{x_n,x_n} \leq \int_{\mathscr{F}_n} (|\lambda_n - \lambda| + \epsilon_n)^2 dE_{x_n,x_n} \\ &\leq (|\lambda_n - \lambda| + \epsilon_n)^2 \cdot \langle E_A(\mathscr{F}_n)x_n, x_n\rangle = (|\lambda_n - \lambda| + \epsilon_n)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Also handelt es sich um eine singuläre Folge für A bei λ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Jede orthonormale, singuläre Folge ist natürlich eine singuläre Folge.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine singuläre Folge für A bei λ.
Angenommen es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass die Dimension des Bildes von $E_A((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon))$ endlich ist, folgt, dass $E_A((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon))$ kompakt ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned}\epsilon^2\|x_n\|^2 &= \int_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \epsilon^2 dE_{x_n,x_n} + \int_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \epsilon^2 dE_{x_n,x_n} \\ &\leq \int_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \epsilon^2 dE_{x_n,x_n} + \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda)^2 dE_{x_n,x_n} \\ &\leq \epsilon^2 \cdot \|E_A((\lambda+\epsilon, \lambda-\epsilon))x_n\|^2 + \|(A-\lambda)x_n\|^2\end{aligned}$$

Da der Operator $E_A((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon))$ kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine singuläre Folge ist, und damit schwach gegen 0 konvergiert, folgt, dass die Norm von x beliebig klein wird und damit der Widerspruch zu $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| > 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Angenommen $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$.
Sei $\lambda \in \sigma_d(A)$, so ist λ ein isolierter Eigenwert endlicher Vielfachheit. So folgt, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass die Dimension des Bildes von $E_A((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon))$ gleich der Dimension von $\ker(A-\lambda)$ welche endlich ist, ist. Das steht jedoch im Widerspruch zu (iv).
Sei $\lambda \in \rho(A)$. Da die Resolventenmenge eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen ist, existiert eine offene ϵ-Kugel um λ, welche ganz in der Resolventenmenge liegt. Daraus folgt jedoch, dass das Spektralmaß von dieser ϵ-Kugel geschnitten mit dem Spektrum der Nulloperator ist, was den Beweis vervollständigt. □

3 Störungssätze

Unter Verwendung des *Weyl Kriteriums* können wir folgendes interessantes Resultat zeigen, mit welchem wir den *Satz von Weyl* beweisen werden:

Satz 3.1 (Kompakte Resolvente)**.** Seien A und B zwei beschränkte, selbstadjungierte Operatoren auf H. Weiters sei $\mu \in \rho(A) \cap \rho(B)$ gegeben, sodass $K := (B-\mu)^{-1} - (A-\mu)^{-1}$ ein kompakter Operator auf H ist, dann gilt:

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B) \tag{5}$$

Beweis. Auf Grund der Symmetrie des Problems müssen wir nur eine Inklusion beweisen. Die zweite folgt analog durch vertauschen der Rollen von A und B.
Sei $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, so folgt durch *Weyl's Kriterium*, dass eine singuläre Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für A bei λ existiert. Wenn wir nun eine weitere Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren, sodass diese eine singuläre Folge für B bei λ ist, wäre $\lambda \in \sigma_{ess}(B)$ und wir hätten die Behauptung bewiesen. Wir definieren:

$$y_n := (B-\mu)^{-1}(A-\mu)x_n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= (B-\mu)^{-1}(A-\mu)x_n - x_n \\ &= ((B-\mu)^{-1} - (A-\mu)^{-1})(A-\mu)x_n \\ &= K(A-\lambda+\lambda-\mu)x_n \\ &= K(A-\lambda)x_n + (\lambda-\mu)Kx_n \end{aligned}$$

Weil x_n schwach gegen 0 konvergiert und K kompakt ist, folgt, dass Kx_n gegen 0 konvergiert. Weiters konvergiert auch $(A-\lambda)x_n$ gegen 0. Daraus können wir schließen, dass $\lim_{n\to\infty} \inf \|y_n\| > 0$ und $\lim_{n\to\infty} \langle y_n, y\rangle = 0,\ y \in H$.

$$\begin{aligned} (B-\lambda)y_n =& (B-\mu)y_n + (\mu-\lambda)y_n \\ =& (A-\mu)x_n + (\mu-\lambda)y_n \\ =& (A-\lambda)x_n + (\mu-\lambda)(y_n - x_n) \end{aligned}$$

Da $(y_n - x_n)$ und $(A-\lambda)x_n$ gegen 0 konvergieren, folgt dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine singuläre Folge von B bei λ ist und damit die Behauptung. □

Satz 3.2 (Satz von Weyl)**.** Sei A ein beschränkter, selbstadjungierter Operator und K ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf H, so gilt

$$\sigma_{ess}(A+K) = \sigma_{ess}(A) \tag{6}$$

Beweis. Für beschränkte Operatoren wissen wir, dass das Spektrum beschränkt ist, daraus folgt, dass ein $\mu \in \rho(A) \cap \rho(A+K)$ existiert.

$$\begin{aligned} (A+K-\mu)^{-1} - (A-\mu)^{-1} =& (A+K-\mu)^{-1} - (A-\mu)^{-1}(A+K-\mu)(A+K-\mu)^{-1} \\ =& (I - I - (A-\mu)^{-1})K(A+K-\mu)^{-1} \\ =& -(A+K-\mu)^{-1}K(A-\mu)^{-1} \end{aligned}$$

Das Produkt von einem beschränkten und einem kompakten Operator ist wiederum kompakt, daher kann Satz 3.1 angewandt werden und es folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Diesen Satz kann man mit Hilfe des Satzes von *Kato-Rellich* in jene Richtung für unbeschränkte Operatoren "verallgemeinern", wenn man anstatt der Kompaktheit von K, A-Kompaktheit und Symmetrie von K fordert.
Weiters kann man sich durch diese Resultate folgend weiter motivieren:

Sei A selbstadjungiert, K kompakt und selbstadjungiert, U ein beliebiger unitärer Operator und B folgend definiert

$$B := U(A+K)U^{-1}$$

Wegen unserer Charakterisierung des wesentlichen Spektrums, kann man sich leicht davon überzeugen, dass dieses unter Anwendung unitärer Operatoren unverändert bleibt. Daher folgt unter Verwendung von (6):

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+K) = \sigma_{ess}(U(A+K)U^{-1}) = \sigma_{ess}(B)$$

Das führt uns zu einem interessanten Resultat von *von Neumann.*

Satz 3.3 (Satz von von Neumann)**.** Seien A und B beschränkte, selbstadjungierte Operatoren auf einem separablen Hilbertraum H mit gleichem wesentlichen Spektrum, so existiert ein unitärer Operator U, sodass:

$$A = U(B+K)U^{-1}. \tag{7}$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, benötigen wir noch folgende Hilfsresultate:

Lemma 3.4. Sei A ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf einem separablen Hilbertraum H und $0 \neq g \in H$ beliebig. So existiert für beliebiges $\delta > 0$ ein endlich-dimensionaler Teilraum G von H und ein selbstadjungierter Operator endlichen Ranges K, sodass:

$$(i)\ g \in G, \quad (ii)\ G \text{ reduziert } A+K, \quad (iii)\ \|K\| \leq \delta.$$

Beweis. Ich definiere $\gamma_0 := \inf_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda$ und $\gamma_n := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda$. Diese Zahlen existieren, da $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ und $\sigma(A)$ beschränkt ist. Weiters unterteile ich das Intervall $[\gamma_0, \gamma_n]$ in n-Teile mit n, einer beliebigen natürlichen Zahl. Die so definierten Intervalle bezeichne ich mit $\Delta_k := [\gamma_{k-1}, \gamma_k]$, $1 \leq k \leq n$. Wir betrachten nun die Projektion von g durch $E(\Delta_k)$ und definieren $h_k := E(\Delta_k)g$. Im Falle, dass $h_k \neq 0$, erhalten wird durch normieren dieser eine Orthonormalbasis g_k des von ihnen aufgespannten endlich-dimensionalen Unterraumes $G \ni g$ mit Dimension kleiner bzw. gleich n. Für $k > n$ definieren wir g_k als die Elemente einer Orthonormalbasis von $G^\perp$ und erhalten damit durch $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis vom gesamten Raum. Weiters sei P die Orthogonalprojektion auf G.

$$\begin{aligned} R &:= -(I-P)AP \\ K &:= R + R^* = -(I-P)AP - PA(I-P) \end{aligned}$$

$$A + K = (I-P)A(I-P) + PAP$$

Daher reduziert der Unterraum G den Operator $A+K$, wobei K ein Operator endlichen Ranges ist.

$$\begin{aligned}\|(A-\gamma_j)g_j\|^2 =&\int\limits_{\Delta_j}(t-\gamma_j)^2 dE_{g_j,g_j} \le \int\limits_{\Delta_j}(\gamma_{j-1}-\gamma_j)^2 dE_{g_j,g_j}\\ \le&\|g_j\|^2\cdot(\gamma_{j-1}-\gamma_j)^2 = \frac{(\gamma_n-\gamma_0)^2}{n^2}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$Ag_j = \gamma_j g_j + f_j \text{ mit } \|f_j\| \le \frac{\gamma_n-\gamma_0}{n}$$

$$\begin{aligned}\|Rg_j\| =&\|(I-P)APg_j\| = \|(I-P)Ag_j\|\\ =&\|(I-P)(\gamma_j g_j + f_j)\| \le \|I-P\|\cdot\|f_j\|\\ \le&\frac{\gamma_n-\gamma_0}{n}\end{aligned}$$

Sei x beliebig und normiert in H, so gilt, weil das arithmetische Mittel kleiner als das quadratische Mittel ist:

$$\|Rx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle R\sum_{i=1}^{n} c_i g_i, g_j\right\rangle\right|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot|\langle Rg_i, g_j\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|Rg_i\|^2 \le \frac{(\gamma_n-\gamma_0)^2}{n}$$

Da n beliebig war, kann ein K mit beliebig kleiner Norm gewählt werden:

$$\|K\| \le \frac{\gamma_n-\gamma_0}{\sqrt{n}}.$$

$\square$

Satz 3.5. Sei H ein separabler Hilbertraum und A ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf H, dann existiert ein kompakter, selbstadjungierter Operator K mit beliebig kleiner Norm, sodass die Eigenwerte des Operators $A+K$ ein vollständiges System in H bilden.

Beweis. Die Idee hinter diesem Beweis ist die Konstruktion eines Operators K in abzählbar vielen Schritten. Da H separabel ist, können wir ein abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voraussetzen. Beginnend mit $f_1 := e_1$ und $\delta := \epsilon/2$ erhalten wir durch Lemma 3.4, einen kompakten Operator K_1 mit Norm kleiner als $\epsilon/2$ und einem endlich-dimensionalen Teilraum G_1, welcher den Operator $A+K_1$ reduziert. Wir setzen rekursiv fort:
Wir setzen $\tilde{H} := \bigcap_{i=1}^{n-1} G_i^{\perp}$, $\delta := \epsilon/2^{n-1}$ und $\tilde{A} := A + \sum_{i=1}^{n-1} K_i$. Sei e_n oBdA. nicht in $\bigcup_{i=1}^{n-1} G_i$ enthalten, so definiere f_n als die Projektion von e_n auf $\tilde{H}$. Lemma 3.4 liefert uns hierfür nun einen endlich-dimensionalen Unterraum G_n von $\tilde{H}$, sodass $f_n \in G_n$ und dieser $\tilde{A}+K_n$ reduziert. Weiters können wir K_n auf ganz H mit null fortsetzen.

$$K := \sum_{i=1}^{\infty} K_i, \quad \|K\| \le \sum_{i=1}^{\infty}\|K_i\| \le \sum_{i=1}^{\infty}\epsilon/2^i = \epsilon, \text{ } K \text{ ist daher beschränkt und linear.}$$

K ist als Grenzwert von selbstadjungierten Operatoren endlichen Ranges selbstadjungiert und kompakt. Jeder Teilraum G_i reduziert per Konstruktion $A+K$. Wegen der endlichen Dimension

von G_i existiert, daher für diese jeweils eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren (,wenn man 0 als Eigenwert zulässt).
Jetzt stellt sich noch die Frage, ob die so definierte Basis von $G := \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i$ vollständig in H ist, dh. ob $G^{\perp}$ trivial ist. Dazu wählen wir $e_n = f_n + h_n$ mit $h_n \perp \bigcap_{i=1}^{n-1} G_i^c$ und $f_n \in G_n$. Daraus folgt, dass e_n orthogonal auf $\bigcap_{i=1}^{n} G_i^c$ steht und damit insbesondere, dass e_n orthogonal auf $G^{\perp}$ steht. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes H war, folgt, dass $G^{\perp}$ der Nullraum ist und damit die Behauptung. □

Beweis. Da das wesentliche Spektrum von A und B übereinstimmen, folgt, dass die Menge der Häufungspunkte von $\sigma(A)$ gleich jener von $\sigma(B)$ ist. Der Beweis hierfür ist einfach: Angenommen es gäbe oBdA. einen Häufungspunkt in $\sigma(A)\backslash\sigma(B)$, so muss es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma_p(A)$ geben, die gegen ein λ konvergiert. Die Eigenvektoren bilden jedoch eine singuläre Folge von A bei λ. Daraus folgt aber schon durch das *Weyl Kriterium* der Widerspruch, dass λ auch Element von $\sigma_{ess}(B)$ sein muss. An Hand von Satz 3.4 bezeichnen wir mit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Basis aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $A + K_1$ und mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Basis aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $B+K_2$, wobei K_1 und K_2 die selbstadjungierten, kompakten Operatoren aus Satz 3.4 sind. Angenommen es würde eine Folge von Eigenwerten geben, sodass $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k - \gamma_{p_k} = 0$ für eine Permutation p_k, der natürlichen Zahlen, so definiere:

$$Uf_{p_k} := e_k \ \forall k \in \mathbb{N},$$

welcher offensichtlich unitär ist und weiters:

$$K_3 f_{p_k} := (\lambda_k - \gamma_{p_k}) f_{p_k} \ \ k \in \mathbb{N},$$

welcher selbstadjungiert und wegen der Eigenschaft der Permutation folglich auch kompakt ist.

$$(B + K_2 + K_3) f_{p_k} = \lambda_k f_{p_k} = U^{-1}(A + K_1) U f_{p_k},$$

dh. die so definierten Operatoren besitzen die gewünschten Eigenschaften, wenn man sich ein neuen kompakten Operator K definiert als:

$$K := K_2 + K_3 - U^{-1} K_1 U$$

Nun stellt sich noch die Frage, ob eine solche Permutation überhaupt existiert. Diese Frage lässt sich mit Ja beantworten, da die Menge der Häufungspunkte übereinstimmen. □

Um den Beweis von Satz 3.3 zu vervollständigen, benötigen wir noch dieses technische Hilfslemma aus der Analysis zur Konstruktion der Permutation:

Lemma 3.6. Seien $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen, sodass M die Menge der Häufungspunkte beider Folgen zusammenfallen. So existiert eine Permutation $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen mit:

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda_k - \gamma_{p_k}) = 0 \tag{8}$$

Beweis. Seien x eine reelle Zahl und M Teilmenge von $\mathbb{R}$, so definieren wir:

$$dist(x, M) := \inf_{y\in M} |x - y|$$

Weiters seien:

$$\epsilon_k := dist(\lambda_k, M) + 1/k$$
$$\nu_k := dist(\gamma_k, M) + 1/k$$

Da M die Menge der Häufungspunkte beider Folgen ist, existiert ein k, sodass der Abstand von den restlichen Folgengliedern zu M beliebig klein wird. Damit folgt auch:

$$\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = \lim_{k\to\infty} \nu_k = 0$$

Weiters folgt aus der Definition der Zahlen ϵ_k und ν_k für eine beliebige natürliche Zahl k, dass im Intervall $(\lambda_k - \epsilon_k, \lambda_k + \epsilon_k)$ ein Element der Menge M enthält und damit auch unendliche viele Folgenglieder der Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen mit r_k den kleinsten Index r für den γ_r im Intervall $(\lambda_k - \epsilon_k, \lambda_k + \epsilon_k)$ liegt und das folgendes gilt:

$$r > r_j \text{ für } j = 1, \ldots, k-1; \quad r > 2k$$

Analog wird s_k in Bezug auf das Intervall $(\gamma_k - \nu_k, \gamma_k + \nu_k)$ definiert. Somit erhalten wir 2 Folgen paarweise-verschiedener Indizes und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda_k - \gamma_{r_k}) = \lim_{k\to\infty} (\gamma_k - \lambda_{s_k}) = 0.$$

Da keine der beiden Folgen gezwungener Maßen alle natürlichen Zahlen enthalten muss, setzen wir die Konstruktion fort, indem wir uns zwei neue Folgen definieren

$$u_1 := 1, \ v_1 := r_1 \tag{9}$$

$$v_{2k} := min\ (\mathbb{N}\backslash\{v_j : j = 1, \ldots, 2k-1\}) \tag{10}$$

$$u_{2k} := s_{v_{2k}} \tag{11}$$

$$u_{2k+1} := min\ (\mathbb{N}\backslash\{u_j : j = 1, \ldots, 2k\} \tag{12}$$

$$v_{2k+1} := r_{u_{2k+1}} \tag{13}$$

Zuerst überzeugen wir uns induktiv davon, dass jede der Folgen alle natürlichen Zahlen enthält. Seien in $(u_k)_1^{2(k-1)}$ die natürlichen Zahlen von 1 bis $k-1$ enthalten, so ist entweder k auch enthalten, oder es gilt wegen (12), dass $u_{2k-1} = k$. In beiden Fällen sind die natürlichen Zahlen von 1 bis k in $(u_k)_1^{2k}$ enthalten. Gleiches gilt auch für die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ analog. Damit die so definierten Folgen Permutationen der natürlichen Zahlen darstellen, darf jede natürliche Zahl höchstens einmal vorkommen:
Gemäß der Konstruktion von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $u_{2k-1} \neq u_1, \ldots, u_{2k}$. Definitionsgemäß gilt $u_{2k} = s_{v_{2k}}$, wobei $s_{v_{2k}} \neq s_1, \ldots, s_{v_{2k}-1}$ gilt. Damit folgt:

$$v_2 < v_4 < \cdots < v_{2(k-1)}.$$

Wegen der Monotonie der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt damit auch:

$$s_{v_{2k}} \neq s_{v_2}, s_{v_4}, \ldots, s_{v_{2(k-1)}}.$$

Daraus folgt:

$$u_{2k} \neq u_2, u_4, \ldots, u_{2(k-1)}.$$

Weil $v_{2k} \geq k$ ist und $s_k \geq 2k$ ist, gilt daher:

$$u_{2k} = s_{v_{2k}} \geq s_k \geq 2k$$

$$u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1} \leq 2k-1$$

Es folgt $u_{2k} > u_{2k-1}$ und damit $u_{2k} \neq u_1, u_3, \ldots, u_{2k-1}$.

Für die Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt wegen (13) und dem vorangehenden Beweisteil:

$$v_{2k-1} = r_{u_{2k-1}} \neq r_1, r_2, \ldots, r_{u_{2k-3}}$$

$$v_{2k-1} \neq v_1, v_3, \ldots, v_{2k-3}$$

Weiters:

$$v_{2k-1} = r_{u_{2k-1}} \geq r_k > 2k$$

$$v_2, v_4, \ldots, v_{2k} \leq 2k$$

Es folgt:

$$v_{2k} \neq v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$$

Somit erhalten wir durch diese Konstruktion zwei Permutationen der natürlichen Zahlen.

Zuletzt bleibt zu zeigen, dass $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda_{u_k} - \gamma_{v_k}) = 0$.
Hierfür betrachten wir gerade, sowie ungerade Folgenglieder separat und erhalten die Behauptung.

$$|\lambda_{u_{2k}} - \gamma_{v_{2k}}| = |\lambda_{s_{v_{2k}}} - \gamma_{v_{2k}}| \to 0$$
$$|\lambda_{u_{2k+1}} - \gamma_{v_{2k+1}}| = |\lambda_{u_{2k+1}} - \gamma_{r_{u_{2k+1}}}| \to 0$$

□

4 Literaturverzeichnis

[1] M. Langer, *Spektraltheorie für Differentialoperatoren*, Vorlesung SS2014, Technische Universität Wien

[2] Woracek, Kaltenbäck, Blümlinger (2015), *Funktionalanalysis 1*, Vorlesungsskript, Technische Universität Wien

[3] K. Schmüdgen (2012), *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, Springer

[4] N. I. Achiezer, I. M. Glazman (2011), *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akad.-Verl.

[5] T. Kato (1995), *Perturbation theory for linear operators*, Springer