Tonnelierte Räume und der Satz von Banach-Steinhaus

David Pavlicek

6.11.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Topologische Vektorräume

Definition 1.1 (Topologischer Vektorraum)**.** Sei L ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$, der mit einer Topologie $\mathcal{T}$ versehen ist. Dann wird das Tupel $(L, \mathcal{T})$ als topologischer Vektorraum bezeichnet, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

$(LT)_1$ $(x, y) \mapsto x + y$ ist stetig auf $L \times L \to L$.

$(LT)_2$ $(\lambda, y) \mapsto \lambda y$ ist stetig auf $\mathbb{C} \times L \to L$.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind hierbei mit der euklidischen Topologie $\mathcal{E}$ versehen. Die Produkträume $L \times L$ beziehungsweise $\mathbb{C} \times L$ sind mit den Produkttopologien $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ beziehungsweise $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$ versehen.

Lemma 1.2. *Sei $(L, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Sei $x_0 \in L$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$. Dann ist die Abbildung*

$$x \mapsto \lambda x + x_0$$

ein Homöomorphismus von $L \to L$.

Beweis. Da die Einbettungen $x \mapsto (\lambda, x)$, $L \to \mathbb{C} \times L$ und $x \mapsto (x, x_0)$, $L \to L \times L$ stetig sind, folgt mit $(LT)_1$ und $(LT)_2$, dass die Abbildung $x \mapsto \lambda x + x_0 \ = \ x \mapsto (\lambda, x) \mapsto \lambda x \mapsto (\lambda x, x_0) \mapsto \lambda x + x_0$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig ist. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung $x \mapsto \lambda^{-1}(x - x_0)$ folgt mit den gleichen Argumenten. Damit ist Lemma 1.2 gezeigt. □

Definition 1.3. Sei L ein topologischer Vektorraum und seien $A, B \subseteq L$ Teilmengen von L. Dann nennen wir

- A absorbierend $:\Leftrightarrow \quad \forall x \in L \ \exists \lambda_0 > 0$ sodass $x \in \lambda A$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \geq \lambda_0$,
- A kreisförmig $:\Leftrightarrow \quad \lambda A \subseteq A \quad$ für alle λ mit $|\lambda| \leq 1$,
- A konvex $:\Leftrightarrow \quad tx + (1-t)x \in A, \quad x, y \in A,\ t \in [0, 1]$,
- A beschränkt $:\Leftrightarrow \quad$ für alle Nullumgebungen V $\exists \lambda \geq 0$ sodass $A \subseteq \lambda V$.

Definition 1.4 (lokalkonvex)**.** Ein topologischer Vektorraum wird lokalkonvex genannt, wenn eine Umgebungsbasis der Null aus konvexen Mengen existiert.

Definition 1.5 (Baire-Raum)**.** Ein vollständiger topologischer Vektorraum, dessen Topologie durch eine Metrik induziert wird, wird Baire-Raum genannt.

Bemerkung 1.6. In einem Baire-Raum gilt der Satz von Baire: Die Vereinigung einer Familie abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren hat leeres Inneres.

1.2 Tonnelierte Räume

Definition 1.7 (Tonne)**.** Sei L ein topologischer Vektorraum und sei $T \subseteq L$. Die Menge T wird Tonne genannt, wenn T abgeschlossen, absorbierend, kreisförmig und konvex ist.

Lemma 1.8. *Sei L ein topologischer Vektorraum und sei $U \subseteq L$ eine beliebige Umgebung der Null. Dann ist $T(U) := \overline{\mathrm{conv}}(\bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda U)$ eine Tonne.*

Beweis. $T(U)$ ist als abgeschlossene, konvexe Hülle, also als Abschluss einer konvexen Menge, abgeschlossen und konvex. Da U als Nullumgebung absorbierend ist, und weil $U \subseteq T(U)$ gilt, ist $T(U)$ auch absorbierend. Die Kreisförmigkeit bleibt noch zu zeigen.
Sei dazu $S := \mathrm{conv}(\bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda U)$. Da die abgeschlossene, konvexe Hülle gleich dem Abschluss der konvexen Hülle ist, gilt $\overline{S} = T(U)$. Weil der Abschluss einer kreisförmigen Menge wieder kreisförmig ist, bleibt also nur mehr zu zeigen, dass S kreisförmig ist. Sei dazu $z \in S$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| \leq 1$. Wir wollen zeigen, dass $\zeta z \in S$.

Laut Definition von S kann z geschrieben werden als

$$z = tx + (1-t)y, \quad x \in \lambda U,\ y \in \mu U,\ t \in [0,1],\ |\lambda|, |\mu| \leq 1.$$

Daraus folgt

$$\zeta z = t(\zeta x) + (1-t)(\zeta y), \quad \zeta x \in \zeta\lambda U,\ \zeta y \in \zeta\mu U.$$

Da $|\zeta\lambda|, |\zeta\mu| \leq 1$ sind, ist $\zeta z \in S$.

Wir haben also gezeigt, dass S kreisförmig ist. Damit ist auch $T(U)$ kreisförmig und somit eine Tonne. □

Korollar 1.9. *Sei L ein topologischer Vektorraum. Dann gibt es zu jeder Nullumgebung $U \subseteq L$ eine Tonne $T \subseteq L$, sodass $U \subseteq T$ ist.*

Beweis. Wähle $T := T(U)$ wie in Lemma 1.8. □

Satz 1.10. *Sei L ein topologischer Vektorraum. Dann ist L genau dann lokalkonvex, wenn eine Nullumgebungsbasis aus Tonnen existiert.*

Beweis. Sei L ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Wir zeigen zuerst, dass eine Umgebungsbasis der Null aus Tonnen existiert.
Sei $\mathcal{U}(0)$ der Umgebungsfilter der Null und sei $U \in \mathcal{U}(0)$. Es ist zu zeigen, dass eine absorbierende, abgeschlossene, kreisförmige und konvexe Menge T existiert, mit $T \subseteq U$.
Zuerst wählen wir $V \in \mathcal{U}(0)$ mit $V - V \subseteq U$. Wir zeigen nun, dass $\overline{V} \subseteq U$ ist. Sei dazu $x \in \overline{V}$. Das bedeutet

$$(x + \widetilde{V}) \cap V \neq \emptyset, \quad \widetilde{V} \in \mathcal{U}(0).$$

Da $V \in \mathcal{U}(0)$ ist, gilt deshalb

$$(x + V) \cap V \neq \emptyset.$$

Das bedeutet, es gibt $y, z \in V$ mit

$$x + y = z.$$

Für jedes $x \in \overline{V}$ gilt also

$$x = z - y \quad \in V - V \subseteq U.$$

Es existiert also ein $V \in \mathcal{U}(0)$ mit $\overline{V} \subseteq U$. Da L ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist, existiert zu jedem $V \in \mathcal{U}(0)$ ein konvexes $V' \in \mathcal{U}(0)$ mit $V' \subseteq V$. Zu jeder konvexen Nullumgebung V' existiert auch eine kreisförmige und konvexe Menge $V'' \in \mathcal{U}(0)$ mit $V'' \subseteq V'$. Es gibt also zu einem $U \in \mathcal{U}(0)$ eine kreisförmige und konvexe Nullumgebung V'' mit $T := \overline{V''} \subseteq U$. Da der Abschluss einer kreisförmigen und konvexen Menge wieder kreisförmig und konvex ist, und da T als Nullumgebung absorbierend ist, ist T eine Tonne.
Aus der Tatsache, dass eine Tonne eine konvexe Menge ist, folgt, dass aus der Existenz einer Nullumgebungsbasis aus Tonnen auch die Existenz einer Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen folgt. Damit ist L lokalkonvex, wenn eine Nullumgebungsbasis aus Tonnen existiert. □

Definition 1.11 (tonneliert)**.** Ein topologischer Vektorraum E wird tonneliert genannt, wenn jede Tonne $T \subseteq E$ eine Nullumgebung ist.

Satz 1.12. *Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, der zugleich ein Baire-Raum ist. Dann ist E tonneliert.*

Beweis. Sei $T \subseteq E$ eine Tonne. Da T absorbierend ist, gilt für $\lambda_k \in \mathbb{C}$, sodass $|\lambda_k| = k$, dass

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_k}{k} kT.$$

Da $|\frac{\lambda_k}{k}| = 1$ folgt mit der Kreisförmigkeit von kT

$$E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kT.$$

Es gilt auch die umgekehrte Inklusion. Somit gilt sogar die Gleichheit $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kT$. Da das Innere von E sicher nicht leer ist, und da die Mengen kT abgeschlossen sind, folgt laut dem Satz von Baire, dass es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ geben muss, sodass $k_0 T$ nichtleeres Inneres hat. Es folgt also die Existenz eines $\widetilde{x_0} \in (k_0 T)^\circ$. Da laut Lemma 1.2 die Abbildung $x \mapsto k_0^{-1} x$ ein Homöomorphismus ist, existiert ein $x_0 \in T^\circ$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $x_0 = 0$. In diesem Fall ist T eine Nullumgebung.
- $x_0 \neq 0$. Da das Innere T° der kreisförmigen Menge T wieder kreisförmig ist, ist mit x_0 auch $-x_0 \in T^\circ$. Da das Innere T° der konvexen Menge T wieder konvex ist, ist mit $x_0, -x_0$ auch $\frac{1}{2}(-x_0) + \frac{1}{2}x_0 = 0 \in T^\circ \subseteq T$. Damit ist auch in diesem Fall T eine Nullumgebung.

In beiden Fällen ist also T eine Nullumgebung und damit ist der Raum E tonneliert. □

2 Topologien auf $L(E,H)$

Definition 2.1. Seien E, F zwei topologische Vektorräume. Dann bezeichnen wir mit $L(E,F)$ die Menge aller stetigen, linearen Abbildungen von $E \to F$.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{B}$ ein Mengensystem beschränkter Teilmengen von E, das folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

$(\mathcal{B})_1$ Zu $A, B \in \mathcal{B}$ gibt es ein $C \in \mathcal{B}$, sodass $A \cup B \subseteq C$.

$(\mathcal{B})_2$ Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathcal{B}$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$, sodass $\lambda A \subseteq B$.

Wir betrachten nun eine beschränkte Menge $B \subseteq E$ sowie eine Nullumgebung $V \subseteq F$ und definieren zu diesem Paar folgende Teilmenge von $L(E,F)$

$$\mathcal{V}(B;V) := \big\{u \in L(E,F) \mid u(B) \subseteq V\big\} \subseteq L(E,F).$$

Lemma 2.2. *Sei $B \subseteq E$ eine beschränkte Menge und sei $V \subseteq F$ eine Nullumgebung. Dann ist die Teilmenge $\mathcal{V}(B;V) \subseteq L(E,F)$ absorbierend. Außerdem ist sie konvex, falls V konvex ist, und kreisförmig, falls V kreisförmig ist.*

Beweis. Sei $u \in L(E,F)$. Da u eine stetige und lineare Abbildung ist, ist u beschränkt. Damit ist das Bild $u(B)$ der beschränkten Menge B beschränkt in F, was bedeutet, dass ein $\lambda \neq 0$ gibt, sodass $u(B) \subseteq \lambda V$ gilt. Das bedeutet aber, dass

$$\lambda^{-1}u \in \mathcal{V}(B;V) \quad \text{oder} \quad u \in \lambda\mathcal{V}(B;V).$$

Damit ist $\mathcal{V}(B;V)$ absorbierend. Sei nun V konvex, $u_1, u_2 \in \mathcal{V}(B;V)$, $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$(tu_1 + (1-t)u_2)(B) \subseteq tu_1(B) + (1-t)u_2(B) \subseteq tV + (1-t)V = V,$$

wobei für die letzte Gleichung die Konvexität von V notwendig ist. Sei nun V kreisförmig, $u \in \mathcal{V}(B;V)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$. Dann gilt

$$\lambda u(B) \subseteq \lambda V \subseteq V,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen der Kreisförmigkeit von V gilt. Damit ist Lemma 2.2 gezeigt.´ □

Lemma 2.3. *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem Vektorraum E ist genau dann ein Umgebungsfilter der Null, sodass die durch diesen Umgebungsfilter induzierte Topologie kompatibel mit der linearen Struktur des Vektorraums ist, wenn $\mathcal{F}$ folgende fünf Eigenschaften erfüllt:*

$(\mathcal{F})_1$ *Es gilt $0 \in U$ für alle $U \in \mathcal{F}$.*

$(\mathcal{F})_2$ *Für alle $U \in \mathcal{F}$ existiert ein $V \in \mathcal{F}$, sodass $V + V \subseteq U$.*

$(\mathcal{F})_3$ *Für alle $U \in \mathcal{F}$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ gilt $\lambda U \in \mathcal{F}$.*

$(\mathcal{F})_4$ *Alle $U \in \mathcal{F}$ sind absorbierend.*

$(\mathcal{F})_5$ *Für alle $U \in \mathcal{F}$ existiert ein kreisförmiges $V \in \mathcal{F}$, mit $V \subseteq U$.*

Beweis. Wir überprüfen zunächst die Notwendigkeit der fünf Bedingungen.
Notwendigkeit von $(\mathcal{F})_1$*:* Wenn es ein $U \in \mathcal{F}$ gäbe, das nicht die Null enthalten würde, dann wäre $\mathcal{F}$ kein Nullumgebungsfilter.
Notwendigkeit von $(\mathcal{F})_2$*:* Sei U eine beliebige Nullumgebung. Das Urbild von U unter der Abbildung $a : (x, y) \mapsto x + y$ muss auch eine Nullumgebung sein, und deshalb das Produkt $W \times W'$ enthalten, wobei W und W' Nullumgebungen in E sind. Daraus folgt mit $V := W \cap W'$

$$V \times V = (W \cap W') \times (W \cap W') \subseteq W \times W' = a^{-1}(U).$$

Damit gilt $V + V = a(V, V) \subseteq U$.
Notwendigkeit von $(\mathcal{F})_3$*:* Aus Lemma 1.2 folgt, dass für ein festes $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ die Abbildung $x \mapsto \lambda x$ ein Homöomorphismus ist. Damit muss für eine Nullumgebung $U \subseteq E$ auch das Bild λU unter dieser Abbildung eine Nullumgebung sein.
Notwendigkeit von $(\mathcal{F})_4$*:* Wir verwenden nun die Stetigkeit der Abbildung $m : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ im Punkt $(0, x) \in \mathbb{C} \times E$. Sei $U \subseteq E$ eine Nullumgebung. Dann ist das Urbild von U eine Umgebung von $(0, x)$. Es enthält also eine Menge $N \times W$, wobei $N \supseteq D_\rho := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \rho\}$, $\rho > 0$ ist und $W = x + W'$ für eine Nullumgebung W' in E. Es gilt also

$$D_\rho \times (x + W') \subseteq N \times W \subseteq m^{-1}(U).$$

Daher ist $\lambda x = m(\lambda, x) \in m(D_\rho \times x + W') \subseteq U$. Das bedeutet, dass U absorbierend ist.
Notwendigkeit von $(\mathcal{F})_5$*:* Wir verwenden wieder die Stetigkeit der Abbildung $m : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$, diesmal aber für $x = 0$. Mit den gleichen Argumenten wie im vorigen Schritt gilt dann $W = W'$ und

$$D_\rho \times W \subseteq N \times W \subseteq m^{-1}(U).$$

Daher ist $V := \bigcup_{|\lambda| \leq \rho} (\lambda W) \subseteq U$. Die Menge V ist außerdem eine kreisförmige Nullumgebung.
Nun wollen wir zeigen, dass die Bedingungen $(\mathcal{F})_1$ bis $(\mathcal{F})_5$ hinreichend sind. Zuerst werden wir zeigen, dass, wenn wir einen für einen beliebigen Punkt $x \in E$ den Filter $\mathcal{F}_x$ als das Bild des gegebenen Filters $\mathcal{F}$ unter der Translation $y \mapsto x + y$ definieren, eine Topologie entsteht. Dazu ist zu zeigen, dass für jeden Punkt $x \in E$ ein Filter $\mathcal{F}_x$ existiert, sodass folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

$(\mathcal{T})_1$ Für alle $x \in E$ und $U \in \mathcal{F}_x$ gilt $x \in U$.

$(\mathcal{T})_2$ Zu jeder Menge $U \in \mathcal{F}_x$ existiert eine Menge $V \in \mathcal{F}_x$, sodass für alle $y \in V$ gilt $U \in \mathcal{F}_y$.

(Die Mengen, die Umgebungen aller ihrer Punkte sind, werden dann „offene Mengen“ genannt.) Danach zeigen wir, dass die so entstehende Topologie kompatibel mit der linearen Struktur ist. Das bedeutet, dass $(LT)_1$ und $(LT)_1$ gelten.
Sei $x \in E$. Wir definieren den Filter $\mathcal{F}_x$ als das Bild des Filters $\mathcal{F}$ unter der Translation $y \mapsto x + y$. Dann besteht $\mathcal{F}_x$ aus den Mengen $U + x$, $U \in \mathcal{F}$. Wegen $(\mathcal{F})_1$ ist dann $0 \in U$, und es gilt $x = 0 + x \in U + x =: U'$ für alle $U' \in \mathcal{F}_x$. Also gilt $(\mathcal{T})_1$.
Aus $(\mathcal{F})_2$ folgt für jedes $U \in \mathcal{F}$ die Existenz eines $V \in \mathcal{F}$ mit $V + V \subseteq U$. Sei $U' := U + x$ und sei $y \in V' := V + x \in \mathcal{F}_x$. Dann gilt $U' = U + x \supseteq V + (V + x) \supseteq V + y$. Da

$V + y \in \mathcal{F}_y$, ist U' ebenfalls aus $\mathcal{F}_y$. Damit gilt $(\mathcal{T})_2$.
Wir zeigen nun $(LT)_1$, also die Stetigkeit von $a : (x, y) \mapsto x + y$. Sei dazu $(x, y) \in E \times E$. Sei W eine Umgebung von $x + y$, also $W = U + (x + y) \in \mathcal{F}_{x+y}$. Wir wählen wieder $V \in \mathcal{F}$ mit $V + V \subseteq U$. Dann ist $(V + x) + (V + y) \subseteq U + x + y = W$. Außerdem ist $V + x \in \mathcal{F}_x$ und $V + y \in \mathcal{F}_y$. Für das Urbild $a^{-1}(W)$ der beliebigen Umgebung W von $x + y$ gilt daher $a^{-1}(W) \supseteq a^{-1}((V + x) + (V + y)) = (V + x) \times (V + y)$. Das bedeutet, dass es eine Umgebung von (x, y) ist. Damit ist die Addition stetig und $(LT)_1$ gilt.
Wir wollen nun $(LT)_2$, also die Stetigkeit von $m : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ zeigen. Sei dazu $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E$. Sei U' eine Umgebung von λx, also $U' := U + \lambda x$, wobei U eine Nullumgebung ist. Wähle nun eine kreisförmige Nullumgebung W mit $W + W + W \subseteq U$. Die Existenz einer solchen Menge folgt aus $(\mathcal{F})_2$ und $(\mathcal{F})_5$. Außerdem ist W laut $(\mathcal{F})_4$ absorbierend. Das bedeutet, dass ein $\lambda_0 > 0$ existiert, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq \lambda_0$ gilt $\lambda x \in W$. Sei o.B.d.A $\lambda_0 \leq 1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.
1. Fall. Sei $\lambda = 0$. Dann ist λx ebenfalls 0 und $U' = U$. Wir betrachten nun das Bild der Menge $D_{\lambda_0} \times (W + x)$ unter m. Es gilt

$$m(D_{\lambda_0} \times (W + x)) = \big\{\mu y + \mu x \mid |\mu| \leq \lambda_0, y \in W\big\}.$$

Da $|\mu| \leq \lambda_0 \leq 1$ gilt und da W kreisförmig ist, folgt aus $y \in W$, dass $\mu y \in W$ ist. Wegen $|\mu| \leq \lambda_0$ und weil W absorbierend ist, folgt auch $\mu x \in W$. Es gilt also, dass

$$m(D_{\lambda_0} \times (W + x)) \subseteq W + W \subseteq U.$$

Damit enthält das Urbild der Nullumgebung U unter m die Menge $D_{\lambda_0} \times (W + x)$, die eine Umgebung von $(0, x)$ ist. Somit ist es ebenfalls eine Umgebung von $(0, x)$, und die Stetigkeit von m ist in diesem Fall gezeigt.
2. Fall. Sei $\lambda \neq 0$. Wir betrachten nun das Bild der Menge

$$(D_\sigma + \lambda) \times (\lambda^{-1}W + x),$$

wobei $\sigma := \inf(\lambda_0, |\lambda|)$. Es gilt

$$m((D_\sigma + \lambda) \times (|\lambda|^{-1}W + x)) = \big\{\mu|\lambda|^{-1}y + \mu x + \lambda|\lambda|^{-1}y + \lambda x \mid |\mu| \leq \sigma, y \in W\big\}.$$

Da der Betrag der komplexen Zahlen $\mu|\lambda|^{-1}$ und $\lambda|\lambda|^{-1}$ sicher ≤ 1 ist, und da W kreisförmig ist, folgt, dass $\mu|\lambda|^{-1}y + \lambda|\lambda|^{-1}y$ aus $W + W$ ist. Wegen $|\mu| \leq \sigma \leq \lambda_0$ und weil W absorbierend ist, folgt auch $\mu x \in W$. Es gilt also, dass

$$m((D_\sigma + \lambda) \times (|\lambda|^{-1}W + x)) \subseteq W + W + W + \lambda x \subseteq U + \lambda x.$$

Damit enthält das Urbild der Umgebung $U' = U + \lambda x$ die Menge $(D_\sigma + \lambda) \times (|\lambda|^{-1}W + x)$, die wegen $(\mathcal{F})_3$ eine Umgebung von (λ, x) ist. Somit ist es ebenfalls eine Umgebung von (λ, x), und die Stetigkeit von m ist auch in diesem Fall gezeigt.

$\square$

Satz 2.4. *Sei $\mathcal{B}$ eine Familie von beschränkten Teilmengen, die die Eigenschaften $(\mathcal{B})_1$ und $(\mathcal{B})_2$ erfüllen, und sei $\mathcal{U}_0$ eine Nullumgebungsbasis in F. Dann ist das Mengensystem $\mathcal{M} := \big\{\mathcal{V}(B; V) \mid B \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{U}_0\big\}$ Nullumgebungsbasis einer Topologie auf $L(E, F)$, die mit der linearen Struktur des Vektorraums kompatibel ist.*

Beweis. Dass das Mengensystem $\mathcal{M}$ eine Filterbasis ist, folgt aus der Beobachtung, dass $\mathcal{V}(B;V) \subseteq \mathcal{V}(B;W)$ für $V \subseteq W \subseteq F$ gilt, und aus der Tatsache, dass $\mathcal{U}_0$ eine Nullumgebungsbasis in F ist. Um Satz 2.4 vollständig zu beweisen, müssen noch die Eigenschaften $(\mathcal{F})_1$ bis $(\mathcal{F})_5$ aus Lemma 2.3 nachgewiesen werden.
Sei $\mathcal{V}(B;V) \in \mathcal{M}$. Da die Nullabbildung $u = 0$ die Menge B auf die Menge $\{0\}$ abbildet, und V als Nullumgebung, die Null enthält, gilt $u(B) \subseteq V$, und deshalb $u \in \mathcal{V}(B;V)$. Daher gilt $(\mathcal{F})_1$.
Sei $\mathcal{V}(B;V) \in \mathcal{M}$. Da V eine Nullumgebung ist, existiert eine Nullumgebung V' mit $V' + V' \subseteq V$. Für $u_1, u_2 \in \mathcal{V}(B;V')$ gilt dann $(u_1 + u_2)(B) \subseteq V' + V' \subseteq V$ und daher ist $\mathcal{V}(B;V') + \mathcal{V}(B;V') \subseteq \mathcal{V}(B;V)$. Damit ist $(\mathcal{F})_2$ gezeigt.
Sei $\mathcal{V}(B;V) \in \mathcal{M}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$. Da V eine Nullumgebung ist, ist auch λV eine Nullumgebung. Für $u \in \mathcal{V}(B;V)$ gilt dann $\lambda u(B) \subseteq \lambda V$ und daher ist $\lambda u \in \mathcal{V}(B;\lambda V) \in \mathcal{M}$. Damit ist $(\mathcal{F})_3$ gezeigt.
Die Eigenschaft $(\mathcal{F})_4$ folgt aus Lemma 2.2.
Sei $\mathcal{V}(B;V) \in \mathcal{M}$. Da V eine Nullumgebung ist, existiert eine kreisförmige Nullumgebung V' mit $V' \subseteq V$. Für $u \in \mathcal{V}(B;V')$ gilt dann $u(B) \subseteq V' \subseteq V$, und daher $u \in \mathcal{V}(B;V)$. Insgesamt gilt $\mathcal{V}(B;V') \subseteq \mathcal{V}(B;V)$, womit auch die Eigenschaft $(\mathcal{F})_5$ gezeigt ist. □

Definition 2.5. Sei $\mathcal{B}$ eine Familie von beschränkten Teilmengen, die die Eigenschaften $(\mathcal{B})_1$ und $(\mathcal{B})_2$ erfüllen, und sei $\mathcal{U}_0$ eine Nullumgebungsbasis in F. Dann nennen wir die Topologie, die durch die Nullumgebungsbasis $\mathcal{M} := \big\{\mathcal{V}(B;V) \mid B \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{U}_0\big\}$ auf dem Raum $L(E,F)$ induziert wird, $\mathcal{B}$-Topologie und bezeichnen den so erhaltenen Raum mit $L_{\mathcal{B}}(E,F)$.

Korollar 2.6. *Ist F ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, so ist es $L_{\mathcal{B}}(E,F)$ ebenfalls. Ist F Hausdorff und ist die Vereinigung der Mengen aus $\mathcal{B}$ dicht in E, dann ist $L_{\mathcal{B}}(E,F)$ ebenfalls Hausdorff.*

Beweis. Der erste Teil dieser Aussage folgt aus Lemma 2.2. Um die Hausdorff-Eigenschaft zu zeigen, sei $u \in L(E,F), u \neq 0$. Das bedeutet, es gibt ein $x \in E$ mit $u(x) \neq 0$. Wegen der Dichtheit der Vereinigung der Mengen aus $\mathcal{B}$ und wegen der Stetigkeit von u, muss es auch ein x geben, sowie eine Menge $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ und $u(x) \neq 0$. Da F Hausdorff ist, existiert eine Nullumgebung V in F mit $u(x) \notin V$. Damit ist $u(B) \not\subseteq V$ und deshalb $u \notin \mathcal{V}(B;V)$. Das bedeutet, dass $L_{\mathcal{B}}(E,F)$ die Hausdorff-Eigenschaft erfüllt. □

Definition 2.7. Sei σ die Familie aller endlichen Teilmengen von E. Das Mengensystem σ erfüllt klarerweise $(\mathcal{B})_1$ und $(\mathcal{B})_2$. Die σ-Topologie auf $L(E,F)$ wird auch Topologie der punktweisen Konvergenz genannt und der Raum wird mit $L_\sigma(E,F)$ bezeichnet.
Sei b die Familie aller beschränkten Teilmengen von E. Das Mengensystem b erfüllt klarerweise $(\mathcal{B})_1$ und $(\mathcal{B})_2$. Die b-Topologie auf $L(E,F)$ wird auch Topologie der beschränkten Konvergenz genannt und der Raum wird mit $L_b(E,F)$ bezeichnet.

Lemma 2.8. *Eine Teilmenge von $L(E,F)$, die beschränkt ist in der Topologie der beschränkten Konvergenz ist auch beschränkt in der Topologie der punktweisen Konvergenz.*

Beweis. Da endliche Mengen beschränkt sind, gilt $\sigma \subseteq b$. Daher ist auf $L(E,F)$ die b-Topologie feiner ist als die σ-Topologie und beschränkte Mengen in $L_b(E,F)$ sind beschränkt in $L_\sigma(E,F)$. □

3 Der Satz von Banach-Steinhaus

Definition 3.1. Seien E, F zwei topologische Vektorräume. Eine Menge H linearer Abbildungen von E nach F wird gleichgradig stetig genannt, falls für jede Nullumgebung V in F eine Nullumgebung U in E existiert, sodass gilt

$$H(U) := \bigcup_{u \in H} u(U) \subseteq V.$$

Oder gleichbedeutend, falls für jede Nullumgebung V in F

$$H^{-1}(V) := \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$$

eine Nullumgebung in E ist.

Lemma 3.2. *Eine gleichgradig stetige Menge H linearer Abbildungen von E nach F ist beschränkt in der Topologie der beschränkten Konvergenz.*

Beweis. Es muss gezeigt werden, dass für jede Nullumgebung U aus $L_b(E, F)$ ein $\lambda \geq 0$ existiert, sodass $H \subseteq \lambda U$.
Sei also $B \subseteq E$ eine beschränkte Menge, V eine Nullumgebung von F und $\mathcal{V}(B; V)$ eine Nullumgebung des Raums $L_b(E, F)$. Da H gleichgradig stetig ist, existiert zu der Nullumgebung $V \in F$ eine Nullumgebung $U \in E$, sodass $H(U) \subseteq V$. Da B beschränkt ist, existiert für diese Nullumgebung U ein $\lambda \geq 0$ sodass $B \subseteq \lambda U$. Insgesamt folgt mit der Linearität der Abbildung aus H

$$\lambda^{-1} H(B) = H(\lambda^{-1} B) \subseteq H(U) \subseteq V.$$

Damit ist $\lambda^{-1} H \subseteq \mathcal{V}(B; V)$, oder gleichbedeutend $H \subseteq \lambda^{-1} \mathcal{V}(B; V)$. Lemma 3.2 ist damit gezeigt. $\square$

Satz 3.3 (Satz von Banach-Steinhaus)**.** *Sei E ein tonnelierter topologischer Vektorraum und sei F ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann sind die folgenden Eigenschaften einer Teilmenge $H \subseteq L(E, F)$ äquivalent:*

(i) *H ist beschränkt in der Topologie der punktweisen Konvergenz;*

(ii) *H ist beschränkt in der Topologie der beschränkten Konvergenz;*

(iii) *H ist gleichgradig stetig.*

Beweis. Die Implikationen $(iii) \Rightarrow (ii)$ sowie $(ii) \Rightarrow (i)$ wurden in Lemma 3.2 bzw Lemma 2.8 gezeigt. Man bemerke, dass sie auch gelten, wenn E nicht tonneliert und F nicht lokalkonvex ist.
Es bleibt $(i) \Rightarrow (iii)$ zu zeigen. Sei dazu H eine beschränkte Teilmenge von $L_\sigma(E, F)$. Wir müssen zeigen, dass zu einer beliebigen Nullumgebung $V \subseteq F$, die Menge $H^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in E ist.

Da F lokalkonvex ist, können wir laut Satz 1.10 die Nullumgebung V als Tonne wählen. Sei V also absorbierend, abgeschlosssen, kreisförmig und konvex. Da u eine stetige, lineare Abbildung von E nach F ist, ist $u^{-1}(V)$ wieder absorbierend, abgeschlossen, kreisförmig und konvex. Wir zeigen nun, dass

$$\bigcap_{u\in H} u^{-1}(V) = H^{-1}(V)$$

eine Tonne ist. Wenn das gilt, ist $H^{-1}(V) \subseteq E$ auch eine Nullumgebung, da E tonneliert ist. Dann ist H gleichgradig stetig und der Satz ist bewiesen.
Da der Durchschnitt abgeschlossener, kreisförmiger und konvexer Mengen wieder abgeschlossen, kreisförmig und konvex ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass $H^{-1}(V) \subseteq E$ absorbierend ist. Sei dazu $x \in E$ beliebig. Nun nützen wir aus, dass H in $L_\sigma(E,F)$ beschränkt ist. Das bedeutet, dass für eine beliebige Nullumgebung $\mathcal{V}(B;U)$ aus $L_\sigma(E,F)$ ein $\lambda \geq 0$ existiert, sodass $H \subseteq \lambda\mathcal{V}(B;U)$. Die Menge B ist hierbei eine beliebige endliche Teilmenge von E, und die Menge U ist eine beliebige Nullumgebung von F. Wähle für B die einpunktige Menge $\{x\}$ und für U die schon gewählte Tonne V. Es existiert also ein $\lambda \geq 0$, sodass

$$H \subseteq \lambda\mathcal{V}(\{x\},V) = \lambda\big\{u \in L(E,F) \mid u(x) \in V\big\}.$$

Wegen der Linearität von u ist das ist gleichbedeutend mit

$$H(x) \subseteq \lambda V,$$

oder

$$x \in H^{-1}(\lambda V) = \lambda H^{-1}(V).$$

Damit ist $H^{-1}(V)$ absorbierend. Satz 3.3 ist somit gezeigt. $\square$

Literatur

[TRE] F. Treves: *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* New York, 1967.

[SCH] H.H. Schaefer, M.P. Wolff: *Topological Vector Spaces.* Berlin Heidelberg New York, 1999.