Clifford-Algebren

Seminar aus Analysis

WS 2009/10

Monika PICHLER
0726485

17. März 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Definition, Existenz und Eindeutigkeit

Definition 1.1 Ein endlichdimensionaler Vektorraum $W \supseteq \mathbb{R}^{n+1}$ heißt Clifford-Algebra vom Typ (p, q), falls $0 \leq p \leq n$ und $q = n - p$, und W eine Multiplikation

$$\cdot : W \times W \mapsto W$$

d.h. eine bilineare Abbildung, trägt, die folgende Eigenschaften erfüllt: e_0 sei das neutrale Element bezüglich der Multiplikation und es gelte

$$e_1^2 = \ldots = e_p^2 = 1$$

$$e_{p+1}^2 \quad = \quad \ldots = e_n^2 = -1 \tag{1}$$

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

Weiters wird gefordert, dass W in dieser Eigenschaft minimal sei, d.h. falls eine Teilalgebra $W' \leq W$ existiert, die ebenfalls den $\mathbb{R}^{n+1}$ enthält und in der die obigen Multiplikationsregeln erfüllt sind, so muss schon $W' = W$ gelten.

Notation. Anstelle $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ schreibt man abkürzend $e_{i_1 \ldots i_k}$. Eine weitere Schreibweise ist e_B mit $B = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{P}_n$, wobei $\mathcal{P}_n$ die Potenzmenge von $\{1,\ldots,$ n$\}$ bezeichnet und die Elemente in B als aufsteigend geordnet vorausgesetzt werden. $|B|$ bezeichnet die Mächtigkeit der Menge B.

Die Existenz einer derartigen Struktur zeigt das folgende Lemma:

Lemma 1.2 Es sei $A = \mathbb{R}^{2^n}$ mit der Basis $\{e_B : B \in \mathcal{P}_n\}$. Für $p \in \mathbb{N}, p \leq n$ definiere eine bilineare Abbildung $\cdot : A \times A \mapsto A$ durch

$$e_B \cdot e_C = (-1)^k \, e_{B \Delta C}, \qquad B = \{i_1, \ldots, i_{|B|}\}, \; C = \{j_1, \ldots, j_{|C|}\} \in \mathcal{P}_n$$

wobei k die Summe aus $|B \cap C \cap \{p+1, \ldots, n\}|$ sowie der Anzahl der nötigen Vertauschungen von Elementen, um $i_1, \ldots, i_{|B|}, j_1, \ldots, j_{|C|}$ aufsteigend anzuordnen, ist. Dann ist A eine Clifford-Algebra vom Typ (p, q).

Beweis. Der $\mathbb{R}^{n+1}$ ist in A als der Teilraum $span\{e_\emptyset, e_{\{1\}}, \ldots, e_{\{n\}}\}$ enthalten. Es ist die Gültigkeit der Rechenregeln (1) nachzuweisen:

- $e_\emptyset$ ist das multiplikativ neutrale Element, denn es gilt $e_\emptyset \cdot e_B = e_B \cdot e_\emptyset = e_{B \Delta \emptyset} = e_B \quad \forall \, B \in \mathcal{P}_n$.
- $e_{\{i\}} \cdot e_{\{i\}} = \begin{cases} e_\emptyset, & i \in \{1, \ldots, p\} \\ (-1) \, e_\emptyset, & i \in \{p+1, \ldots, n\} \end{cases}$
- $e_{\{i\}} \cdot e_{\{j\}} = (-1) \, e_{\{j\}} \cdot e_{\{i\}} \quad \forall \, 1 \leq j < i \leq n$

Schließlich ist A minimal, da jede Teilalgebra $A' \leq A$ mit $\mathbb{R}^{n+1} \leq A'$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen sein muss und darum notwendigerweise alle Produkte $\prod_{j \in B} e_{\{j\}}, \; B \in \mathcal{P}_n$ enthalten muss. Damit gilt jedoch $A \subseteq A'$ und deshalb $A = A'$.

□

Es folgen einige Eigenschaften der Clifford-Algebra A.

Die Clifford-Multiplikation ist definitionsgemäß für $n > 1$ nicht kommutativ. Für fast alle Elemente von A existieren antikommutierende Elemente:

Lemma 1.3 Für das Zentrum[1] von A gilt

1. $Z(A) = span\{e_\emptyset\}$, falls n gerade
2. $Z(A) = span\{e_\emptyset, e_{\{1,\ldots,n\}}\}$, falls n ungerade

[1]Das *Zentrum* einer Algebra ist die Menge aller Elemente, die mit allen anderen Elementen der Algebra kommutieren.

Beweis. Als multiplikativ neutrales Element kommutiert $e_\emptyset$ klarerweise mit allen Clifford-Zahlen. Betrachten wir also das Element $e_{\{1,\ldots,n\}}$: Es gilt

$$e_{\{1,\ldots,n\}} \cdot e_{\{j\}} = (-1)^{n-1} e_{\{j\}} \cdot e_{\{1,\ldots,n\}},$$

da $e_{\{j\}}$ mit n Faktoren vertauscht werden muss und bei jeder Vertauschung außer der mit $e_{\{j\}}$ gemäß der Definition der Clifford-Multiplikation ein Vorzeichenwechsel stattfinden muss. Somit gilt

$$e_{\{1,\ldots,n\}} e_{\{j\}} = \begin{cases} e_{\{j\}} \cdot e_{\{1,\ldots,n\}}, & n \text{ ungerade} \\ -e_{\{j\}} \cdot e_{\{1,\ldots,n\}}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also kommutiert $e_{\{1,\ldots,n\}}$ mit allen Elementen von A, falls n ungerade ist.
Um zu sehen, dass für jede weitere Clifford-Zahl antikommutierende Elemente existieren, betrachten wir ein Element e_B mit $|B| = k < n$ und unterscheiden, ob k eine gerade oder ungerade Zahl ist:

- k gerade: wähle einen Index $j \in B$, dann gilt $e_B \cdot e_{\{j\}} = (-1)^{k-1} e_{\{j\}} \cdot e_B = -e_{\{j\}} \cdot e_B$, also antikommutieren $e_{\{j\}}$ und e_B.

- k ungerade: für einen Index $j \notin B$ gilt $e_B \cdot e_{\{j\}} = (-1)^k e_{\{j\}} \cdot e_B = -e_{\{j\}} \cdot e_B$, also ist auch in diesem Fall e_B nicht im Zentrum der Clifford-Algebra.

□

Lemma 1.4 Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{\cdot} : \quad & A \mapsto A \\ & \widetilde{e_B} = (-1)^{|B|} e_B \end{aligned}$$

ist ein Automorphismus auf A, die sogenannte *Inversion*.

Beweis. Die Abbildung ist bijektiv, da sie die Basiselemente bis auf das Vorzeichen auf sich selbst abbildet. Sie ist auch verträglich mit der Multiplikation, denn es gilt

$$\widetilde{e_B} \cdot \widetilde{e_C} = (-1)^{|B|+|C|} \underbrace{e_B \cdot e_C}_{=(-1)^k e_{B\Delta C}} = (-1)^{|B|+|C|+k} e_{B\Delta C} = (-1)^{|B\Delta C|+k} e_{B\Delta C} = (-1)^k \widetilde{e_{B\Delta C}} = \widetilde{e_B \cdot e_C},$$

denn wegen $|B\Delta C| = |B| + |C| - 2\,|B \cap C|$ sind $|B\Delta C|$ und $|B| + |C|$ stets entweder beide gerade oder ungerade.

□

Lemma 1.5 Die einzigen Ideale[2] von A sind $\{0\}$ und A.

Beweis. Angenommen, $I \neq \{0\}$ sei ein echter Teilraum von A. Sei $x = \sum x_B e_B \in I$ ein Element minimaler Länge. Falls $x = e_B \in I$, so folgt mit $e_B \cdot e_B = \pm e_\emptyset \in I$ aufgrund der Idealseigenschaft $e_\emptyset \cdot y = y \in I \;\; \forall\, y \in A$ und damit aber $I = A$.
Andernfalls wähle man einen Summanden $x_{B_0} e_{B_0}$ und multipliziere x mit $x_{B_0}^{-1} e_{B_0}^{-1}$. Es ergibt sich

$$x' = 1 + \sum_C x_C e_C \in I$$

Falls nun n eine gerade Zahl ist oder im ungeraden Fall ein Summand mit $C_0 \neq \{1, \ldots, n\}$ auftritt, so gibt es zum Element e_{C_0} gemäß Lemma 1.3 ein antikommutierendes Element $e_{\{j\}}$. Multipliziert man x' von links mit $e_{\{j\}}^{-1}$ und von rechts mit $e_{\{j\}}$, so erhält man

$$x'' = 1 + \sum_C x_C e_{\{j\}}^{-1} e_C e_{\{j\}} \in I$$

Addition von x' und x'' liefert

$$2 + \sum_C x_C \left(e_C + e_{\{j\}}^{-1} e_C e_{\{j\}} \right) \in I$$

[2]Ein Teilraum $I \leq A$ einer Algebra heißt *Ideal*, falls gilt: $i \cdot x \in I \;\; \forall i \in I, x \in A$.

Aufgrund der Wahl von $e_{\{j\}}$ hat dieses Element weniger Summanden als x, was der Minimalität von x widerspricht.
Für ungerades n bleibt noch der Fall $x = 1 + ae_{\{1,\dots,n\}} \in I$ zu untersuchen. Da I bezüglich des in Lemma 1.4 definierten Automorphismus abgeschlossen ist, muss auch $\widetilde{x} = 1 + a(-1)^n e_{\{1,\dots,n\}} = 1 - ae_{\{1,\dots,n\}} \in I$ gelten, und Addition von x und $\widetilde{x}$ liefert dann

$$x + \widetilde{x} = 2 \in I,$$

was aber wiederum $e_\emptyset \in I$ und damit $I = A$ impliziert.

$\square$

Die Zahlen n und p bestimmen die Clifford-Algebra bis auf Isomorphie eindeutig:

Lemma 1.6 Ist $(V, \cdot)$ eine Algebra mit $\mathbb{R}^{n+1} \leq V$, sodass die Multiplikation auf V die Rechenregeln (1) für dasselbe p wie in Lemma 1.2 erfüllt und V minimal mit dieser Eigenschaft ist, so existiert ein Isomorphismus zwischen V und A.

Beweis. Definiere die lineare Abbildung $\Phi : A \mapsto V$ durch ($\hat{e_j}$ bezeichnen die Basiselemente von V)

$$\Phi(e_B) := \prod_{j \in B} \hat{e_j}$$

Φ ist mit der Multiplikation verträglich:

$$\begin{aligned} \Phi(e_B \cdot e_C) &= \Phi\left((-1)^k e_{B\Delta C}\right) = (-1)^k \prod_{j \in B\Delta C} \hat{e_j} \\ \Phi(e_B) \cdot \Phi(e_C) &= \prod_{j \in B} \hat{e_j} \prod_{i \in C} \hat{e_i} = (-1)^{\hat{k}} \prod_{i \in B\Delta C} \hat{e_i} \end{aligned}$$

Dabei gilt $k = \hat{k}$, da die Multiplikationen auf A und V dieselben Rechenregeln erfüllen, und somit $\Phi(e_B \cdot e_C) = \Phi(e_B) \cdot \Phi(e_C)$.
Also ist Φ ein Homomorphismus. Nun ist die Bijektivität der Abbildung nachzuweisen. Aufgrund der Linearität und Verträglichkeit mit der Multiplikation ist $\Phi(A)$ eine Teilalgebra von V. Weiters ist $\mathbb{R}^{n+1} \leq \Phi(A)$, da $\hat{e_0} = \Phi(e_\emptyset) \in \Phi(A)$, $\hat{e_j} = \Phi\left(e_{\{j\}}\right) \in \Phi(A), j = 1, \dots, n$. Also gilt $\mathbb{R}^{n+1} \leq \Phi(A) \leq V$ und damit $\Phi(A) = V$ aufgrund der an V geforderten Minimalität. Die Abbildung ist somit surjektiv.
Aus der Linearität von Φ folgt auch $\ker\Phi \leq A$. Der Kern eines Homomorphismus ist stets ein Ideal, gemäß Lemma 1.5 muss $\ker\Phi = A$ oder $\ker\Phi = \{0\}$ gelten. Im ersten Fall wäre Φ die Nullabbildung, was aber im Widerspruch zur Surjektivität und $V \neq \{0\}$ steht, somit muss $\ker\Phi = \{0\}$, die Abbildung also injektiv sein.

$\square$

Die durch $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq p \leq n,\ q = n - p$ bestimmte Clifford-Algebra wird auch mit $Cl_{p,q}$ oder, im Fall $p = 0$, mit $Cl(n)$ bezeichnet.

Definition 1.7 Die Basiselemente, die aus derselben Anzahl von Faktoren bestehen, bilden lineare Teilräume der Cliffordalgebra, die Räume der sogenannten *k-Vektoren*:

$$span\{e_B : \ |B| = k\} =: Cl^k_{p,q}$$

Die Dimension von $Cl^k_{p,q}$ ist $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, und wegen $\sum_{k=0}^n Cl^k_{p,q} = Cl_{p,q}$ ergibt sich für den Gesamtraum $\dim Cl_{p,q} = 2^n$.

Die Summen aller Teilräume mit geradem bzw. ungeradem k werden mit $Cl^+_{p,q}$ bzw. $Cl^-_{p,q}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} Cl^+_{p,q} &:= \ \textstyle\sum_{0 \leq 2l \leq n} Cl^{2l}_{p,q} \\ Cl^-_{p,q} &:= \ \textstyle\sum_{1 \leq 2l+1 \leq n} Cl^{2l+1}_{p,q} \end{aligned}$$

Bei $Cl_{p,q}^{+}$ handelt es sich zudem um eine Teilalgebra, da der Raum bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist, da sich bei der Anwendung der Rechenregeln (1) immer eine gerade Anzahl an Faktoren aufhebt.
Die lineare Projektion von $x = \sum_{B \in \mathcal{P}_n} x_B e_B$ auf $Cl_{p,q}^{k}$ wird mit $[.]_k$ bezeichnet:

$$\begin{array}{rccl} [.]_k : & Cl_{p,q} & \to & Cl_{p,q}^{k} \\ & x & \mapsto & \sum_{|B|=k} x_B e_B \end{array}$$

Somit lässt sich ein Element der Clifford-Algebra schreiben als $x = \sum_{k=0}^{n} [x]_k$.
$Sc\,(x) := [x]_0$ wird als der *Skalarteil* der Clifford-Zahl bezeichnet.
Die Elemente von $Cl_{p,q}^{1}$, also die 1-Vektoren, werden auch lediglich als Vektoren bezeichnet; sie entsprechen den Elementen des $\mathbb{R}^n$. Die Elemente von $span\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ sind die sogenannten *Paravektoren*.

Einfache Beispiele von Clifford-Algebren

- mit $n = 0$ erhält man die *reellen Zahlen*
- $n = 1,\ p = 0$ liefert die Clifford-Algebra $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* mit der imaginären Einheit $i := e_1$, welche $i^2 = -1$ erfüllt. Die komplexen Zahlen bilden einen Körper, in diesem Fall ist die Multiplikation also kommutativ und jedes $z \neq 0$ besitzt auch ein multiplikativ inverses Element.
- $n = 2,\ p = 0$ liefert die *reellen Quaternionen* $\mathbb{H}$, deren Basiselemente e_1, e_2, e_1e_2 historisch mit i, j, k bezeichnet werden und $k = ij,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1$ erfüllen. $\mathbb{H}$ ist ein *Schiefkörper*, d.h. es gelten alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation. Insbesondere besitzt jede Quaternion ein multiplikativ inverses Element.

2 Automorphismen auf der Clifford-Algebra

Auf $Cl_{p,q}$ gibt es einige wichtige (Anti-)Automorphismen, die im Folgenden näher betrachtet werden.

2.1 Inversion

Die Inversion wurde schon in Lemma 1.4 auf der Clifford-Algebra A definiert. Es folgen noch eine allgemeine Definition und einige Eigenschaften der Abbildung.

Definition 2.1 Die lineare Abbildung $\tilde{\cdot} : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$, die durch die Vorschriften

$$\begin{array}{ll} (i) & \widetilde{xy} = \tilde{x}\tilde{y} \\ (ii) & \tilde{e_i} = -e_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{array}$$

bestimmt ist, heißt *Hauptinvolution* oder *Inversion*.

Lemma 2.2 Für ein beliebiges $x = \sum_{k=0}^{n} [x]_k \in Cl_{p,q}$ gilt

$$\tilde{x} = [x]_0 - [x]_1 + [x]_2 - [x]_3 + \dots$$

Beweis. Für ein Basiselement $e_B = e_{i_1 \dots i_k}$ gilt gemäß der Definition der Inversion

$$\widetilde{e_B} \overset{(i)}{=} \tilde{e_{i_1}} \dots \tilde{e_{i_k}} \overset{(ii)}{=} (-1)^k e_B = \begin{cases} e_B, & k \text{ gerade} \\ -e_B, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

□

Bemerkung 2.3

- Wegen $\widetilde{xy} = \tilde{x}\tilde{y} \ \forall \ x, y \in Cl_{p,q}$ ist die Inversion ein Automorphismus.
- Für k-Vektoren $x \in Cl_{p,q}^k$ gilt $\tilde{x} = (-1)^k x$.
- Die Räume $Cl_{p,q}^+$ und $Cl_{p,q}^-$ sind also Eigenräume von $\tilde{\cdot}$ zu den Eigenwerten +1 und -1.

2.2 Konjugation

Definition 2.4 Die lineare Abbildung $\bar{\cdot} : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$, die durch die Vorschriften

$$\begin{array}{ll} (i) & \overline{xy} = \overline{y}\ \overline{x} \\ (ii) & \overline{e_i} = -e_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{array}$$

bestimmt ist, heißt *Clifford-Konjugation*.

Lemma 2.5 Für $x = \sum_{k=0}^{n} [x]_k \in Cl_{p,q}$ gilt

$$\overline{x} = [x]_0 - [x]_1 - [x]_2 + [x]_3 + [x]_4 - \dots$$

Beweis. Für $e_B = e_{i_1 \dots i_k}$ gilt definitionsgemäß

$$\overline{e_B} \overset{(i)}{=} \overline{e_{i_k}} \dots \overline{e_{i_1}} \overset{(ii)}{=} (-1)^k e_{i_k} \dots e_{i_1}$$

Um auf der rechten Seite wieder e_B zu erhalten, müssen die Elemente wieder in die richtige Reihenfolge zurückgetauscht werden, wobei bei jeder Vertauschung das Vorzeichen geändert werden muss. Dabei muss das erste Element mit $k-1$ Faktoren, das zweite mit $k-2, \dots$ vertauscht werden, insgesamt finden also $\sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{k(k-1)}{2}$ Vertauschungen und damit Vorzeichenwechsel statt, also erhält man

$$\overline{e_B} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} e_B,$$

und $\frac{k(k+1)}{2}$ ist für $k \equiv 0, 3\,(mod\ 4)$ gerade, für $k \equiv 1, 2\,(mod\ 4)$ ungerade.

$\square$

Bemerkung 2.6

- Wegen $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ handelt es sich bei der Konjugation um einen Antiautomorphismus.
- Für k-Vektoren gilt $\overline{x} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} x$, für sie ist also $\overline{x} = \begin{cases} x, & k \equiv 0,3\,(mod\ 4) \\ -x, & k \equiv 1,2\,(mod\ 4) \end{cases}$
- Aufgrund der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$ entspricht die Clifford-Konjugation der komplexen Konjugation. Die Inversion stimmt auf $\mathbb{C}$ mit der Konjugation überein.

2.3 Reversion

Definition 2.7 Die durch die Vorschriften

$$\begin{array}{ll} (i) & \widehat{xy} = \hat{y}\hat{x} \\ (ii) & \hat{e_i} = e_i, \quad i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

bestimmte lineare Abbildung $\hat{.} : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$ heißt *Reversion.*

Lemma 2.8 Für $x = \sum_{k=0}^{n} [x]_k \in Cl_{p,q}$ gilt

$$\hat{x} = [x]_0 + [x]_1 - [x]_2 - [x]_3 + [x]_4 + \ldots$$

Beweis. Für $e_B = e_{i_1 \ldots i_k}$ gilt definitionsgemäß

$$\widehat{e_B} \overset{(i)}{=} \widehat{e_{i_k}} \ldots \widehat{e_{i_1}} \overset{(ii)}{=} e_{i_k} \ldots e_{i_1}$$

Die Elemente müssen wiederum in die ursprüngliche Reihenfolge zurückgetauscht werden, was durch $\sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{k(k-1)}{2}$ Vertauschungen und entsprechend viele Vorzeichenwechsel geschieht. Es gilt also

$$\widehat{e_B} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} e_B,$$

und $\frac{k(k-1)}{2}$ ist für $k \equiv 0,1\,(mod\ 4)$ gerade, für $k \equiv 2,3\,(mod\ 4)$ ungerade.

$\square$

Bemerkung 2.9

- Wegen $\widehat{xy} = \hat{y}\hat{x}$ ist auch die Reversion ein Antiautomorphismus.
- Für k-Vektoren gilt $\hat{x} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} x$, für sie ist also $\hat{x} = \begin{cases} x, & k \equiv 0,1\,(mod\ 4) \\ -x, & k \equiv 2,3\,(mod\ 4) \end{cases}$
- Die Reversion ist gerade die Hintereinanderausführung von Inversion und Konjugation, wobei es nicht auf die Reihenfolge der Abbildungen ankommt; es gilt also $\hat{x} = \overline{\tilde{x}} = \tilde{\overline{x}}$. In der Tat gilt für ein Basiselement e_i

  $$\begin{array}{rcl} \overline{\tilde{e_i}} & = & \overline{(-e_i)} = e_i = \hat{e_i} \\ \overline{\widetilde{xy}} & = & \overline{\tilde{x}\tilde{y}} = \overline{\tilde{y}}\ \overline{\tilde{x}} \end{array}$$

  also erfüllt die Abbildung $\overline{\tilde{.}}$ die definierenden Eigenschaften von $\hat{.}$ und die Abbildungen stimmen somit überein.
- Im Übrigen gilt auch $\tilde{x} = \hat{\overline{x}} = \overline{\hat{x}}$.
- Auf den komplexen Zahlen ist die Reversion die Identität.

3 Skalarprodukt und Absolutbetrag

Definition 3.1 Für $x, y \in Cl^1_{p,q}$, also Vektoren der Form $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ bzw. $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ ist das *Skalarprodukt* definiert durch

$$[x,y]_{p,q} := -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i$$

Im Fall p=0 ergibt sich das bekannte kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Lemma 3.2 Das Skalarprodukt lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$[x,y]_{p,q} = -\frac{xy + yx}{2} \tag{2}$$

Beweis. Das Clifford-Produkt xy errechnet sich zu

$$\begin{aligned}
xy &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j e_i e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e_i^2 + \sum_{i<j} x_i y_j e_i e_j + x_j y_i e_j e_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i + \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)\, e_i e_j
\end{aligned}$$

Für yx erhält man analog

$$\begin{aligned}
yx &= \sum_{i=1}^{p} y_i x_i - \sum_{i=p+1}^{n} y_i x_i + \sum_{i<j} (y_i x_j - y_j x_i)\, e_i e_j \\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i - \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)\, e_i e_j \\
\Rightarrow xy + yx &= \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i + \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)\, e_i e_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i - \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)\, e_i e_j \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i\right) \\
\Rightarrow -\frac{xy + yx}{2} &= [x,y]_{p,q}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 Fasst man Paravektoren in $Cl\,(n)$, also Cliffordzahlen der Gestalt $x = \sum_{i=0}^n x_i e_i$, als Elemente des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, so gilt für ihr $\mathbb{R}^{n+1}$-Skalarprodukt die folgende Formel:

$$x \cdot y = \frac{x\overline{y} + y\overline{x}}{2} \tag{3}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
x\overline{y} &= \left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\left(y_0 - \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\
&= x_0 y_0 + y_0 \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - x_0 \sum_{i=1}^{n} y_i e_i + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)\, e_i e_j \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} (y_0 x_i - x_0 y_i)\, e_i - \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)\, e_i e_j \\
y\overline{x} &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} (x_0 y_i - y_0 x_i)\, e_i - \sum_{i<j} (y_i x_j - y_j x_i)\, e_i e_j \\
\Rightarrow x\overline{y} + y\overline{x} &= 2 \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\
\Rightarrow \frac{x\overline{y} + y\overline{x}}{2} &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i = x \cdot y
\end{aligned}$$

□

Definition 3.4 Der *Absolutbetrag* einer Cliffordzahl $x = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A e_A \in Cl\,(n)$ ist gegeben durch

$$|x| := \left(\sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Bemerkung 3.5 Es gelten die folgenden Relationen:

- $|\overline{x}| = |-x| = |x|$
- $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
- die Dreiecksungleichung nach oben und unten: $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$
- $|.|$ ist gerade die euklidische Norm $\|.\|_2$, wenn man $Cl\,(n)$ als $\mathbb{R}^{2^n}$ betrachtet.

Eingangs wurde bereits bemerkt, dass in $Cl\,(1) = \mathbb{C}$ und $Cl\,(2) = \mathbb{H}$ für jedes Element x ein multiplikativ Inverses existiert. Dieses ist durch $\frac{\overline{x}}{|x|^2}$ gegeben. Diese Beziehung gilt jedoch in höherdimensionalen Clifford-Algebren nicht, da dann im Allgemeinen die Formel $x\overline{x} = |x|^2$ nicht gültig ist.

Lemma 3.6

(i) Für $p > 0$ oder $p = 0,\ q > 3$ enthält $Cl_{p,q}$ Nullteiler[3].

(ii) Falls $p = 0$, besitzen die Paravektoren $\neq 0$ ein multiplikativ Inverses, welches durch

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{x\overline{x}}$$

gegeben ist.

(iii) Für beliebige Clifford-Zahlen $x, y \in Cl\,(n)$ gilt:

$$Sc\,(\overline{x}y) = Sc\,(x\overline{y}) = x \cdot y$$

wobei $x \cdot y$ hier das Skalarprodukt von x und y als Vektoren im $\mathbb{R}^{2^n}$ aufgefasst ist.

[3] Elemente $x, y \neq 0$, deren Produkt 0 ergibt.

Bemerkung 3.7 Insbesondere gilt für alle $x \in Cl\,(n)$, $\quad Sc\,(x\overline{x}) = |x|^2$; der *Skalarteil* des Produkts $x\overline{x}$ ist also das Betragsquadrat von x. Im Allgemeinen folgen in $x\overline{x}$ dann jedoch noch weitere Terme mit Elementen $e_A \neq e_0$, das Produkt ist also keine rein skalare Größe.

Beweis (von Lemma 3.6).

ad (i) Falls $p > 0$, ist $(1+e_1)(1-e_1) = 1 + e_1 - e_1 - e_1^2 = 0$, da dann $e_1^2 = 1$ gilt.
Falls $p = 0$, $q > 3$, gilt $e_{123}^2 = e_{123}e_{312} = -e_{12}e_{12} = e_{12}e_{21} = -e_1e_1 = 1$, also ergibt sich wie oben $(1+e_{123})(1-e_{123}) = 0$.

ad (ii) Für Paravektoren erhält man aus (3), da x mit seiner Konjugierten kommutiert, $x\overline{x} = x \cdot x = |x|^2$. Somit ist $\frac{\overline{x}}{|x|^2}$ das multiplikativ inverse Element von x.

ad (iii) Für beliebige Cliffordzahlen x und y gilt

$$\begin{aligned}
\overline{x}y &= \sum_{A,B} x_A y_B \overline{e_A} e_B \\
&= \sum_{\overline{e_A}e_B = \pm e_0} \pm x_A y_B + \sum_{C \neq \{0\}} \left(\sum_{\overline{e_A}e_B = \pm e_C} \pm x_A y_B \right) e_C
\end{aligned}$$

Nun ist aber $\overline{e_A}e_B = \pm e_0$ nur für $A = B$ erfüllt, wobei sich stets $+e_0$ ergibt, da $\overline{e_A}$ in $Cl\,(n)$ gerade die Inverse von e_A ist: $\overline{e_{1\ldots k}}e_{1\ldots k} = (-1)^k e_{1\ldots k}e_{k\ldots 1} = (-1)^{2k} = 1$. Somit ist

$$Sc\,(\overline{x}y) = \sum_A x_A y_A = x \cdot y$$

Die Aussage für $x\overline{y}$ erhält man analog.

□

Das nun folgende Lemma liefert eine Abschätzung für den Betrag des Produkts zweier Cliffordzahlen.

Lemma 3.8 Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante K_n, so dass für alle $x, y \in Cl\,(n)$ gilt:

$$|xy| \leq K_n\,|x|\,|y|$$

Diese Konstante erfüllt jedenfalls $K_n \leq 2^{\frac{n}{2}}$.
Gilt außerdem $y\overline{y} = |y|^2$, falls also y ein Inverses besitzt, dann folgt

$$|xy| = |yx| = |x|\,|y|$$

Beweis. Die Dreiecksungleichung liefert

$$|xy| = \left| \sum_{A \in \mathcal{P}_n} x y_A e_A \right| \leq \sum_A |x y_A e_A| = \sum_A |y_A|\,|x e_A|$$

Nun gilt $xe_A = \sum_{B\in\mathcal{P}_n} x_B e_B e_A$. $e_B e_A$ ist wiederum ein Basiselement, und mit $B \in \mathcal{P}_n$ durchläuft auch $e_B e_A$ die gesamte Basis; man erhält $|xe_A|^2 = |x|^2$, und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich die Abschätzung

$$|xy|^2 \leq \left(\sum_A |y_A|\,|xe_A| \right)^2 = \left(\sum_A |y_A|\,|x| \right)^2 = |x|^2 \left(\sum_A |y_A| \right)^2 \leq |x|^2 \left(\sum_A 1 \right) \left(\sum_A |y_A|^2 \right) \leq 2^n\,|x|^2\,|y|$$

Falls nun $y\overline{y} = |y|^2$ gilt, so folgt

$$|xy|^2 = Sc\,(xy\overline{xy}) = Sc\,(xy\overline{y}\overline{x}) = Sc\left(|y|^2\,x\overline{x}\right) = |y|^2\,Sc\,(x\overline{x}) = |y|^2\,|x|^2\,.$$

Analog errechnet man $|yx|^2 = |x|^2\,|y|^2$.

□

Bemerkung 3.9 Die Abschätzung für K_n ist nicht bestmöglich: in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ gilt $|xy| = |x|\,|y|$, also $K_1 = K_2 = 1$, das Lemma liefert lediglich $K_1 \leq \sqrt{2}$, $K_2 \leq 2$.

4 Beschreibung von Isometrien mittels Clifford-Multiplikation

Die zugrundeliegende Clifford-Algebra sei in diesem Abschnitt stets $Cl\,(n)$.

4.1 Isometrien im $\mathbb{R}^n$

Ziel ist es nun, Isometrien[4] im $\mathbb{R}^n \cong Cl^1\,(n)$ mithilfe Clifford-algebraischer Überlegungen zu beschreiben. Dazu folgt zunächst eine Darstellung von Spiegelungen mittels Cliffordmultiplikation. Danach soll gezeigt werden, wie beliebige Isometrien durch Spiegelungen beschrieben werden können.

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor. Die durch die Gleichung $x \cdot u = 0$ beschriebene Menge aller Vektoren, die auf u orthogonal stehen, ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$. Ein beliebiger Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich nun darstellen als $x = x_1 + x_2$, wobei x_1 in der Ebene liegt und x_2 normal auf dieselbe steht, also parallel zu u ist. Der Proportionalitätsfaktor ist dabei das Skalarprodukt von x und u, also $x_2 = (x \cdot u)\,u$.
Die Spiegelung R_u an der zu u orthogonalen Hyperebene lässt den Anteil x_1 in der Ebene unverändert und ändert das Vorzeichen des Normalanteils, also

$$R_u\,(x) = x_1 - x_2 = x_1 - (x \cdot u)\,u = x - 2\,(x \cdot u)\,u \quad \forall R_u : det\ R_u = -1$$

Für das Skalarprodukt der Cliffordzahlen $x, u \in Cl^1\,(n)$ gilt nun gemäß Lemma 3.2 $x \cdot u = -\frac{1}{2}\,(xu + ux)$, und somit erhält man

$$R_u\,(x) = x - 2\,(x \cdot u)\,u = x + (xu + ux)\,u = x + x \underbrace{uu}_{=-u\cdot u=-1} + uxu = uxu \tag{4}$$

Die Spiegelung eines Vektors x an der zu u orthogonalen Hyperebene wird also durch Cliffordmultiplikation von u von links und rechts an x realisiert. Die Isometrie dieser Abbildung lässt sich leicht verifizieren:

$$\begin{aligned} R_u\,(x) \cdot R_u\,(y) &= -2\,(uxuuyu + uyuuxu) = 2\,(uxyu + uyxu) \\ &= 2u\,(xy + yx)\,u = -u\,(x \cdot y)\,u = -\,(x \cdot y)\,uu = x \cdot y \end{aligned}$$

Die Komposition zweier Spiegelungen ergibt eine Drehung:

$$T\,(x) = u_2 u_1 x u_1 u_2$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass in der Tat jede Drehung Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Definition 4.1 Die *Spin-Gruppe* $\mathrm{Spin}(n) \subseteq Cl\,(n)$ ist die Menge aller Produkte einer geraden Anzahl von Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$.

- Das leere Produkt ist dabei zugelassen, es ist das Einselement e_0.
- Die Elemente von $\mathrm{Spin}(n)$ sind Einheitsvektoren, denn Vektoren erfüllen $|u_1 u_2| = |u_1|\,|u_2|$. Somit gilt für $s = u_1 \ldots u_k \in Spin\,(n) : |s| = |u_1| \ldots |u_k| = 1$.
- Das multiplikativ inverse Element zu $s = u_1 \ldots u_k \in Spin\,(n)$ ist durch

  $$\overline{s} = \overline{u_1 \ldots u_k} = \overline{u_k} \ldots \overline{u_1} = (-1)^k\,u_k \ldots u_1 = u_k \ldots u_1$$

  gegeben.

[4] Eine Isometrie im $\mathbb{R}^n$ ist eine orthogonale Matrix T, d.h. $\det T = \pm 1$. Isometrien sind längen- und winkelerhaltend, führen also Orthonormalbasen in Orthonormalbasen über. Eine Isometrie mit $\det T = +1$ heißt Drehung, Isometrien mit $\det T = -1$ sind Spiegelungen.

Nun definiert man eine Abbildung $h : Spin\,(n) \rightarrow SO\,(n)^5$: $s \mapsto h\,(s)$, sodass gilt: $h\,(s)\,(x) = \bar{s}xs$
Diese Abbildung ist nicht injektiv, denn für $h\,(s) = id$, also $h\,(s)\,(x) = \bar{s}xs = x \quad \forall x \in Cl^1\,(n)$ folgt, dass s mit allen Elementen der Clifford-Algebra kommutiert, also muss gemäß Lemma 1.3 s ein Skalar sein, und aufgrund der Normierung erhält man $s = \pm 1$.
Es bleibt die Surjektivität von h zu zeigen (diese bedeutet gerade, dass jede Drehung die Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist). Dazu wird die Darstellung einer beliebigen Isometrie T als Komposition von Spiegelungen hergeleitet, indem die Orthonormalbasen $\{e_j : j = 1, \ldots, n\}$ und $\{g_j : j = 1, \ldots, n\}$, für die $T\,(e_j) = g_j, \; j = 1, \ldots, n$ gilt, schrittweise durch Spiegelungen ineinander übergeführt werden.
Um den Vektor e_1 in g_1 überzuführen, spiegelt man an der zum Einheitsvektor

$$u_1 := \frac{e_1 - g_1}{|e_1 - g_1|} \tag{5}$$

normalen Hyperebene:

$$\begin{aligned}
R_{u_1}\,(e_1) &= u_1 e_1 u_1 = \frac{1}{|e_1 - g_1|^2}\,(e_1 - g_1)\,e_1\,(e_1 - g_1) \\
|e_1 - g_1|^2 &= \sum_i (e_{1,i} - g_{1,i})^2 = \sum_i e_{1,i}^2 - 2e_{1,i}g_{1,i} + g_{1,i}^2 = \underbrace{\sum_i e_{1,i}^2}_{|e_1|^2=1} + \underbrace{\sum_i g_{1,i}^2}_{|g_1|^2=1} - 2\underbrace{\sum_i e_{1,i}g_{1,i}}_{2(e_1 \cdot g_1)} \\
&= 2 - 2\,(e_1 \cdot g_1) \\
(e_1 - g_1)\,e_1\,(e_1 - g_1) &= \left(e_1^2 - g_1 e_1\right)(e_1 - g_1) = -e_1 + 2g_1 + g_1 e_1 g_1 = 2g_1 \left(-\frac{1}{2} g_1^{-1} e_1 + 1 + \frac{1}{2} e_1 g_1\right) \\
&= 2g_1\,(1 - e_1 \cdot g_1) \quad \Rightarrow \\
R_{u_1}\,(e_1) &= \frac{2g_1\,(1 - e_1 \cdot g_1)}{2\,(1 - e_1 \cdot g_1)} = g_1
\end{aligned}$$

Durch R_{u_1} wird also e_1 auf g_1 abgebildet, dabei werden aber auch die restlichen Basisvektoren $e_j, 1 < j \leq n$ verändert: $e_j^1 := R_{u_1}\,(e_j)$. Aufgrund der Isometrie gilt weiterhin $e_j^1 \cdot e_k^1 = \delta_{jk}$.
Im nächsten Schritt muss nun e_2^1 in g_2 übergeführt werden, sollte nicht schon $e_2^1 = g_2$ gelten. Wie im ersten Schritt wird für die Spiegelung der Vektor $u_2 := \frac{e_2^1 - g_2}{|e_2^1 - g_2|}$ verwendet, dann gilt $R_{u_2}\left(e_2^1\right) = g_2$. Nun ist aber zu überprüfen, ob diese Spiegelung g_1 unverändert lässt:

$$R_{u_2}\,(g_1) = u_2 g_1 u_2 \overset{\pm u_2^2 g_1}{=} u_2\,(g_1 u_2 + u_2 g_1) - u_2^2 g_1 = -2u_2\,(g_1 \cdot u_2) + g_1$$

Für das Skalarprodukt $g_1 \cdot u_2$ gilt nun aber

$$g_1 \cdot u_2 = \frac{1}{|e_2^1 - g_2|} g_1 \cdot \left(e_2^1 - g_2\right) = \frac{1}{|e_2^1 - g_2|}\left(g_1 \cdot e_2^1 - g_1 \cdot g_2\right),$$

dabei ist $g_1 \cdot g_2 = 0$, da die g_j eine Orthonormalbasis bilden, und $g_1 \cdot e_2^1 = R_{u_1}\,(e_1) \cdot R_{u_1}\,(e_2) = 0$ aufgrund der Isometrie von R_{u_1}. Somit gilt tatsächlich $R_{u_2}\,(g_1) = g_1$.
Für die weiteren Basiselemente erhält man $e_j^2 := R_{u_2}\left(e_j^1\right), 3 \leq j \leq n$. Dasselbe Spiegelungsverfahren wird auf jedes Element $e_j^k \neq g_j$ angewandt, sodass die Basis $\{e_j\}$ sukzessive in die Basis $\{g_j\}$ übergeführt wird, wobei bei der k. Spiegelung die $g_j, j = 1, \ldots, k-1$ invariant sind.

Jede Isometrie T lässt sich also als Hintereinanderausführung von höchstens n Spiegelungen darstellen: $T = R_{u_n} \circ \ldots \circ R_{u_1}$. Da für Drehungen nun det $T = +1$ gelten muss, müssen diese aus einer geraden Anzahl von Spiegelungen zusammengesetzt sein. Somit ist die Surjektivität der Abbildung h gezeigt.

[5] $SO\,(n)$, die *Spezielle Orthogonale Gruppe*, ist die Menge aller Drehungen im $\mathbb{R}^n$

4.2 Drehungen im $\mathbb{R}^{n+1}$

Nun sollen Drehungen im $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet werden, wobei die $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit Paravektoren aus $Cl(n)$ identifiziert werden, also $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i \in Cl(n)$.[6]

Zunächst folgt wie in Abschnitt 4.1 die Herleitung einer Formel für die Spiegelung an einer Hyperebene mit Normalvektor $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ unter Anwendung der Clifford-Multiplikation: In $R_u(x) = x - 2(x \cdot u)u$ kann nun für das Skalarprodukt die Formel für Paravektoren aus Lemma 3.3 eingesetzt werden und man erhält

$$x' = x - 2(x \cdot u)u = x - (u\overline{x} + x\overline{u})u = -u\overline{x}u \tag{6}$$

$x' = -u\overline{x}u$ ist also der an der Hyperebene mit Normalvektor u gespiegelte Vektor.

Definition 4.2 Die *Clifford-Gruppe* Γ_{n+1} ist die Menge aller endlichen Produkte von Paravektoren $\neq 0$.

Satz 4.3 Jede Drehung im $\mathbb{R}^{n+1}$ hat die Form

$$T(x) = ux\widehat{u} = ux\tilde{u}^{-1}, \quad u \in \Gamma_{n+1}. \tag{7}$$

Beweis. Die Spiegelung von x an der Ebene mit Normalvektor $\overline{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ liefert gemäß (6) $x' = -\overline{u}\,\overline{x}\,\overline{u}$. Spiegelt man den Ergebnisvektor x' nun wiederum am Vektor $u_1 = 1$, so folgt

$$x'' = -\overline{x'} = uxu$$

Die Abbildung $T_u : x \mapsto uxu$ beschreibt nun als Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen eine Drehung im $\mathbb{R}^{n+1}$. Eine Komposition mehrerer Drehungen liefert eine Abbildung der Form

$$x' = u_k \dots u_1 x u_1 \dots u_k.$$

Bezeichnet man nun $u_k \dots u_1 =: u$, so gilt $\widehat{u} = u_1 \dots u_k$, da die u_j als Paravektoren $\widehat{u_j} = u_j$ erfüllen, und man kann die Drehung schreiben als

$$x' = ux\widehat{u}.$$

Außerdem gilt

$$\tilde{u}\widehat{u} = \tilde{u}\overline{\tilde{u}} = |\tilde{u}|^2 = |u|^2 = |u_k|^2 \dots |u_1|^2 = 1,$$

also $\widehat{u} = \tilde{u}^{-1}$, und man kann auch

$$x' = ux\tilde{u}^{-1}$$

schreiben.

Wir haben also gesehen, dass durch (7) eine Drehung beschrieben wird. Es bleibt zu zeigen, dass sich jede Drehung so darstellen lässt. Wie im vorigen Abschnitt bereits bemerkt, ist eine Drehung eine Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen, $T = R_{u_{2k}} \circ \dots \circ R_{u_1}$. Wendet man hierauf nun $2k$ Spiegelungen an der Hyperebene mit Normalvektor $u = 1$ an, also $R_j(x) = -\overline{x},\ j = 1, \dots, 2k$, so gilt $T' := R_{2k} \circ \dots \circ R_1 \circ T = T$, da die gerade Anzahl an Spiegelungen die Identität ergibt. Zudem können die Spiegelungen R_i beliebig mit den anderen Spiegelungen vertauscht werden, da $u = 1$ mit allen Elementen der Clifford-Algebra kommutiert. T lässt sich somit schreiben als

$$T = R_{2k} \circ R_{u_{2k}} \circ \dots \circ R_1 \circ R_{u_1}.$$

Dabei beschreiben die Teile $T_j := R_j \circ R_{u_j}$ jeweils Drehungen, die gemäß des ersten Beweisteils die Form $T_j(x) = u_j x \widehat{u_j}$ haben, also gilt mit $u := u_{2k} \dots u_1$

$$T(x) = u_{2k} \dots u_1 x \widehat{u_1} \dots \widehat{u_{2k}} = u_{2k} \dots u_1 x \widehat{u_{2k} \dots u_1} = ux\widehat{u}.$$

□

[6] In diesem Abschnitt bezeichnet der Begriff *Vektor* nicht wie bisher die 1-Vektoren der Clifford-Algebra, sondern Vektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$, also Paravektoren in $\mathrm{Cl}(n)$.

5 Literatur

- Gürlebeck, Klaus: Funktionentheorie in der Ebene und im Raum. - Basel [u.a.] : Birkhäuser, 2006
- Riesz, Marcel: Clifford numbers and spinors. - Dordrecht [u.a.]: Kluwer, 1993