Induktive Limiten

Arpad Pinter, Tobias Wöhrer

30. Jänner 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Induktiver Limes von Mengen

Definition 1.1. Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Indexmenge, $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen und für $i \leq j$ seien Abbildungen $f_{ji}\colon X_i \to X_j$ gegeben, die folgende Eigenschaften haben:

(i) $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$

(ii) $f_{ji} = f_{jk} \circ f_{ki}$ für $i \leq k \leq j$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_{ki}"'] & & X_j \\ & X_k \arrow[ur, "f_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

Dann heißt $\langle (X_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$, oder kurz $\langle (X_i), (f_{ji})\rangle$, ein **direktes System**.

Definition 1.2. Sei $\langle (X_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ ein direktes System. Sei X eine Menge und $f_i\colon X_i \to X, i \in I$, Abbildungen, sodass Folgendes gilt:

(i) Die $f_i, i \in I$, sind kompatibel mit den $f_{ji}, i \leq j$, d.h. $f_i = f_j \circ f_{ji}$ für $i \leq j$.

(ii) Die Menge X besitzt folgende universelle Eigenschaft:
Für jede weitere Menge Y mit Abbildungen $g_i : X_i \to Y, i \in I$, die mit den $f_{ji}, i \leq j$, kompatibel sind, d.h. $g_i = g_j \circ f_{ji}$ für $i \leq j$, existiert eine eindeutige Abbildung $g\colon X \to Y$, sodass für alle $i \in I$ gilt $g_i = g \circ f_i$.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & X_j \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[ddl, bend left, "g_j"] \\ & X \arrow[d, "g"] & \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Dann wird $\langle X, (f_i)_{i\in I}\rangle$ als ein **induktiver Limes** oder **direkter Limes** des direkten Systems $\langle (X_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ bezeichnet und als $\lim_{i\in I}\langle X_i, f_{ji}\rangle$ oder kurz $\lim_{i\in I} X_i$ geschrieben.

Satz 1.3. *Sei $\langle (X_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ ein direktes System. Dann existiert ein induktiver Limes.*

Beweis. Konstruktion von X:
Sei $\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}\{(i,x)\colon x \in X_i\}$ die disjunkte Vereinigung der $X_i, i \in I$.
Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden für $x \in X_i$ statt $(i,x) \in \coprod_{i\in I} X_i$ auch $x \in \coprod_{i\in I} X_i$ geschrieben.
Nun definieren wir auf der disjunkten Vereinigung eine Relation $\sim$ als $x \sim y :\Leftrightarrow \exists m \geq i,j\colon f_{mi}(x) = f_{mj}(y)$ für $x \in X_i, y \in X_j$.
Diese Relation ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Die Reflexivität und Symmetrie sind aus

der Definition klar. Die Transitivität rechnen wir nun nach:
Sei $x \in X_i, y \in X_j, z \in X_k$ und gelte $x \sim y, y \sim z$.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \ell \geq i, j : f_{\ell i}(x) = f_{\ell j}(x)$$
$$y \sim z \Leftrightarrow \exists m \geq j, k : f_{mj}(y) = f_{mk}(z)$$

Weil I gerichtet ist, existiert $n \in I, n \geq m, \ell$:

$$f_{ni}(x) = f_{n\ell}(f_{\ell i}(x)) = f_{n\ell}(f_{\ell j}(y)) = f_{nj}(y) = f_{nm}(f_{mj}(y)) = f_{nm}(f_{mk}(z)) = f_{nk}(z)$$

Daher gilt auch $x \sim y$.
Definiere nun $X := \coprod_{i \in I} X_i/_\sim$.

Definition von f_i:
Für $i \in I$ definiere $f_i \colon X_i \to X, x \mapsto [x]_\sim$.
Nun zeigen wir, dass die f_i mit den f_{ji} kompatibel sind:
Sei $i \in I, j \geq i$ und $x \in X_i$. Definiere $y := f_{ji}(x)$, dann ist $x \sim y$.

$$f_i(x) = [x]_\sim = [y]_\sim = f_j(y) = f_j \circ f_{ji}(x)$$

Also $f_i = f_j \circ f_{ji}$.

Universelle Eigenschaft von X:
Sei Y eine Menge und $g_i, i \in I$, Abbildungen, die mit den f_{ji} kompatibel sind.
Dann definiere $g \colon X \to Y, [x]_\sim \mapsto g_i(x)$, falls $x \in X_i$.
Diese Abbildung ist wohldefiniert, da für zwei Repräsentanten $x \in X_i, y \in X_j$ von $[x]_\sim$ wegen $x \sim y$ ein $k \geq i, j$ existiert, sodass $f_{ki}(x) = f_{kj}(y)$. Also $g_i(x) = g_j(g_{ji}(x)) = g_j(g_{jk}(y)) = g_k(y)$.
Klarerweise macht g das Diagramm 1.1 kommutativ.
Es bleibt noch zu zeigen, dass g eindeutig ist. Dazu bemerken wir, dass $X = \bigcup_{i \in I} f_i(X_i)$. Sei also $k \colon X \to Y$ eine weitere Funktion mit $k \circ f_i = g_i, i \in I$. Dann folgt $k \circ f_i = h \circ f_i$ für alle $i \in I$, d.h. k und h stimmen für alle $i \in I$ auf $f(X_i)$ überein, also auf $\bigcup_{i \in I} f(X_i) = X$. Somit ist $k = h$. □

Satz 1.4. *Ein induktiver Limes eines direkten Systems ist mit seiner universellen Eigenschaft (bis auf Bijektionen) eindeutig.*
Genauer: Wenn $\langle X, (f_i)_{i \in I} \rangle$ und $\langle Y, (g_i)_{i \in I} \rangle$ beide die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 1.2 haben, dann existiert eine Bijektion $\varphi \colon X \to Y$ mit $g_i \circ \varphi = f_i, i \in I$.

Beweis. Wegen der universellen Eigenschaft von X existiert $f \colon X \to Y$ mit $f \circ f_i = g_i, i \in I$.
Wegen der universellen Eigenschaft von Y existiert $g \colon Y \to X$ mit $g \circ g_i = f_i, i \in I$.

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ X \arrow[rr, "\mathrm{id}_X,\ g \circ f"'] & & X \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Wegen $\mathrm{id}_X \circ f_i = f_i$ und $(g \circ f) \circ f_i = g \circ (f \circ f_i) = g \circ g_i = f_i$ kommutiert das Diagramm 1.2 mit id_X und auch mit $g \circ f$. Aus der universellen Eigenschaft von X folgt aber das diese Abbildung eindeutig ist, d.h. $\mathrm{id}_X = g \circ f$.
Analog zeigt man mit der universellen Eigenschaft von Y, dass $\mathrm{id}_Y = f \circ g$ und damit ist f bijektiv. □

Bemerkung 1.5.

- Wenn alle $f_{ji}, i \leq j$ injektiv sind, so sind es auch die $f_i, i \in I$.
  Für $x, y \in X_i$ mit $f_i(x) = f_i(y)$ gilt $x \sim y$. Daher existiert $m \geq i$ mit $f_{mi}(x) = f_{mi}(y)$ und aus der Injektivität von f_{mi} folgt $x = y$.
- Falls die $f_{ji}, i \leq j$ nicht injektiv sind, können zwei Elemente aus dem selben Raum X_i äquivalent sein.

Beispiel 1.6. Sei X eine Menge und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X, sodass $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ ist. Zusätzlich soll für je zwei Indizes $i, j \in I$ ein Index $k \in I$ mit X_i, X_j ein $X_k \supseteq X_i, X_j$ existieren. Die Relation $\leq$, die durch $i \leq j :\Leftrightarrow X_i \subseteq X_j, i, j \in I$ definiert ist, macht I zu einer gerichteten Menge. Die $f_{ji}\colon X_i \to X_j, i \leq j$ seien die kanonischen Einbettungen. Dann ist $\langle X_i, f_{ji}\rangle$ ein direktes System.
Seien $f_i\colon X_i \to X$ die kanonischen Einbettungen dann ist $\langle X, (f_i)_{i\in I}\rangle$ ein induktiver Limes des direkten Systems. Die f_i sind mit den f_{ji} kompatibel. Außerdem hat X die universelle Eigenschaft:
Für eine Menge Y und $g_i\colon X_i \to Y$ mit $g_i = g_j \circ f_{ji}$, d.h. $g_i = g_j|_{X_i}$, ist die eindeutige Abbildung $g\colon X \to Y$ gegeben durch $g(x) = g_i(x)$ für $x \in X_i$. Wegen $X_i \subseteq X_j$ und $g_i = g_j|_{X_i}$ ist diese Abbildung unabhängig von der Menge X_i, in der x liegt. Also ist g tatsächlich wohldefiniert.

2 Induktiver Limes von Vektorräumen

Definition 2.1. Sei $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ ein direktes System einer Familie von Vektorräumen $(E_i)_{i\in I}$ und linearen Abbildungen $f_{ji}, i \leq j$. Sei E ein Vektorraum und $f_i\colon E_i \to E, i \in I$, lineare Abbildungen, sodass Folgendes gilt:

(i) Die $f_i, i \in I$, sind kompatibel mit den $f_{ji}, i \leq j$, d.h. $f_i = f_j \circ f_{ji}$ für $i \leq j$.

(ii) Der Vektorraum E besitzt folgende universelle Eigenschaft:
Für jeden weiteren Vektorraum G mit linearen Abbildungen $g_i\colon E_i \to G, i \in I$, die mit den $f_{ji}, i \leq j$, kompatibel sind, d.h. $g_i = g_j \circ f_{ji}$ für $i \leq j$, existiert eine eindeutige lineare Abbildung $g\colon E \to G$, sodass für alle $i \in I$ gilt $g_i = g \circ f_i$.

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & E_j \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[ddl, bend left, "g_j"] \\
& E \arrow[d, "g"] & \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Dann wird $\langle E, (f_i)_{i\in I}\rangle$ als **induktiver Limes** oder **direkter Limes** des direkten Systems $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ bezeichnet und als $\lim_{i\in I}\langle E_i, f_{ji}\rangle$ oder kurz $\lim_{i\in I} E_i$ geschrieben.

Definition 2.2. Seien $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektorräumen, dann bezeichnet

$$\bigoplus_{i\in I} E_i := \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \colon x_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I\}$$

die **direkte Summe** der Vektorräume E_i.

Bemerkung 2.3.

- Für $j \in I$ bezeichne mit $g_j \colon E_j \to \bigoplus_{i\in I} E_i, x \mapsto (x\delta_{ij})_{i\in I}$ die kanonische Einbettung von E_j in $\bigoplus_{i\in I} E_i$.
- Für jedes $i \in I$ wähle eine Basis $\mathcal{B}_i$ von E_i, dann ist $\bigcup_{i\in I}\{g_i(b_i) \colon b_i \in \mathcal{B}_i\}$ eine Basis von $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Satz 2.4. *Sei $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ ein direktes System mit einer Familie von Vektorräumen $(E_i)_{i\in I}$ und linearen Abbildungen $f_{ji}, i \leq j$. Dann existiert ein induktiver Limes.*

Beweis. Bezeichne $\bigoplus_{i\in I} E_i$ die direkte Summe der Vektorräume $E_i, i \in I$, und sei g_j die Einbettung von E_j nach $\bigoplus_{i\in I} E_i$ für $i \in I$. Wir definieren den Unterraum $M := \operatorname{span}\left\{\bigcup_{i\leq j} \operatorname{ran}(g_i - g_j \circ f_{ji})\right\}$. Wenn wir nun die geforderten Eigenschaften für den Faktorraum $E := [\bigoplus_{i\in I} E_i]/_M$ mit $f_i := \pi \circ g_i$ überprüfen, ist die Existenz gesichert. Dabei sei π die Projektion von $\bigoplus_{i\in I} E_i$ auf $[\bigoplus_{i\in I} E_i]/_M$.

Kompatibilität von f_i mit f_{ji}:
Sei $x \in E_i$ und $i \leq j$. Dann gilt wegen $\operatorname{ran}(g_i - g_j \circ f_{ji}) \subseteq M$:

$$(f_i - f_j \circ f_{ji})(x) = \pi(\underbrace{(g_i - g_j \circ f_{ji})(x)}_{\in M}) = 0$$

Also insgesamt $f_i = f_j \circ f_{ji}$.

Universelle Eigenschaft von E:
Sei V ein Vektorraum mit linearen Abbildungen $h_i \colon E_i \to V, i \in I$, die mit den $f_{ji}, i \leq j$, verträglich sind. Da g_i injektiv für alle $i \in I$ ist, kann man eine eindeutige lineare Abbildung $g \colon \bigoplus_{i\in I} E_i \to V$ definieren, sodass $g \circ g_i = h_i$ für alle $i \in I$. Dazu wählt man sich eine Basis B_i in E_i für jedes $i \in I$, dann ist $\bigcup_{i\in I} g_i(B_i)$ eine Basis von $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Definiert man g auf dieser Basis durch $g(g_i(b_i)) := h_i(b_i)$ für $b_i \in B_i, i \in I$, dann ist damit die lineare Abbildung g eindeutig bestimmt und erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[dr, "g_i"] \arrow[dd, bend right, "h_i"'] & & E_j \arrow[dl, "g_j"'] \\
& \bigoplus\limits_{i\in I} E_i \arrow[dl, "g"] & \\
V & &
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen nun, dass eine lineare Abbildung $h \colon [\bigoplus_{i\in I} E_i]/_M \to V$ existiert, für die gilt $g = h \circ \pi$.

$$
\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rr, dashed, "f_{ji}"] \arrow[dr, "g_i"'] \arrow[dd, bend right, "h_i"'] & & E_j \arrow[dl, "g_j"] \arrow[dd, dashed, bend left, "f_j"] \\
& \bigoplus\limits_{i\in I} E_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, dashed, "\pi"] & \\
V & & {[\bigoplus\limits_{i\in I} E_i]/_M} \arrow[ll, dashed, "\boldsymbol{h}"']
\end{tikzcd}
\tag{2.3}
$$

Da π die Projektion auf den Faktorraum $[\bigoplus_{i\in I} E_i]/_M$ ist, gilt $\ker\pi = M$. Die $h_i, i \in I$ sind kompatibel mit den $f_{ji}, i \le j$, daraus folgt für $i \le j$:

$$g(g_i - g_j \circ f_{ji})(x) = (h_i - h_j \circ f_{ji})(x) = 0$$

Damit liegt $\operatorname{ran}(g_i - g_j \circ f_{ji})$ für alle $i \in I$ und somit jede Linearkombination solcher Elemente im $\ker g$, d.h. $\ker\pi = M \subseteq \ker g$. Da π surjektiv ist, existiert aus der Linearen Algebra bekanntlicherweise eine eindeutige lineare Abbildung h.
Für $i \in I$ gilt nun $h \circ f_i = h_i$:

$$h \circ f_i = h \circ \pi \circ g_i = g \circ g_i = h_i$$

□

Bemerkung 2.5. Die $f_{ji}, i \le j$, sind nicht kompatibel mit den $g_i, i \in I$, auf E, weshalb man die Faktorisierung nach M vornehmen muss. Wenn π die Projektion auf den Faktorraum mit Kern M bezeichnet, kann aber die gewünschte Kompatibilität für $f_i = \pi \circ g_i, i \in I$, erreicht werden.

$$
\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "g_i"'] \arrow[ddr, bend right, "f_i"'] & & E_j \arrow[dl, "g_j"] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\
& \bigoplus\limits_{i\in I} E_i \arrow[d, "\pi"'] & \\
& \bigoplus\limits_{i\in I} E_i/_M &
\end{tikzcd}
$$

Satz 2.6. *Der Vektorraum E ist mit seiner universellen Eigenschaft (bis auf Isomorphie) eindeutig.*
Genauer: Wenn $\langle E, (f_i)_{i\in I}\rangle$ und $\langle F, (g_i)_{i\in I}\rangle$ beide die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 2.1 haben, dann existiert eine lineare Bijektion $\varphi\colon E \to F$ mit $g_i \circ \varphi = f_i, i \in I$.

Beweis. Analog zu Satz 1.4 (Eindeutigkeit des direkten Limes von Mengen). □

3 Lokalkonvexe topologische Vektorräumen

Definition 3.1. Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf E.
Dann bezeichnen wir $(E, \mathcal{T})$ als **topologischen Vektorraum**, wenn die Abbildungen

(i)
$$+\colon \begin{cases} E \times E & \to E \\ (x,y) & \mapsto x+y \end{cases}$$

(ii)
$$\cdot\colon \begin{cases} \mathbb{C} \times E & \to E \\ (\lambda,x) & \mapsto \lambda x \end{cases}$$

stetig sind.
Dabei ist $E \times E$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ und $\mathbb{C} \times E$ mit der Produkttopologie $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$ versehen, wobei $\mathcal{E}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{C}$ ist.

Bemerkung 3.2. In unserer Definition des topologischen Vektorraums fordern wir für die Topologie nicht das Hausdorffsche Trennungsaxiom (T_2), das in vielen Funktionalanalysisbüchern noch zusätzlich gefordert wird.

Proposition 3.3. *Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. K, C seien disjunkte Teilmengen von E, wobei K kompakt und C abgeschlossen.
Dann existiert eine Nullumgebung V, sodass $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$.*

Beweis. Den Beweis findet man im Skriptum [F]. □

Bemerkung 3.4. Einpunktige Mengen sind kompakt. Wenn man von der Topologie (T_1) fordert, d.h. einpunktige Mengen sind abgeschlossen, dann folgt aus der Proposition, dass sich $x, y \in E, x \neq y$ trennen lassen, also ist die Topologie Hausdorff (T_2).
Da (T_2)-Räume immer auch (T_1) erfüllen, gilt in topologischen Vektorräumen die Äquivalenz von (T_2) und (T_1).

Definition 3.5. Ein topologischer Vektorraum $(E, \mathcal{T})$ heißt **lokalkonvex**, wenn eine 0-Umgebungsbasis aus konvexen Mengen existiert. Dabei heißt $\mathcal{T}$ **lokalkonvexe Topologie**.

Bemerkung 3.6. Für einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum kann man sogar eine 0-Umgebungsbasis aus absorbierenden, konvexen und kreisförmigen Mengen wählen, siehe [F].

Definition 3.7. Sei E ein Vektorraum und $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Vektorräume. Für jedes $i \in I$ sei $f_i\colon E_i \to E$ eine lineare Abbildung.
Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf E heißt **lokalkonvexe finale Topologie** bzgl. der Abbildungen $f_i, i \in I$, wenn sie lokalkonvex ist, f_i für alle $i \in I$ stetig macht und jede weitere Topologie mit diesen Eigenschaften gröber ist.

Bemerkung 3.8. Offensichtlich gibt es höchstens eine lokalkonvexe finale Topologie bzgl. einer Familie von Abbildungen $f_i, i \in I$.

Satz 3.9. *Sei E ein Vektorraum, $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von lokalkonvexen topologischen Vektorräumen und $f_i\colon E_i \to E, i \in I$ linear. Dann gilt:*

(i) Die Menge $\mathcal{B} = \{V \subseteq E\colon V$ konvex, kreisförmig, $f_i^{-1}(V) \in \mathcal{U}_{E_i}(0)\}$ ist eine 0-Umgebungsbasis in E einer Topologie $\mathcal{T}$, die $(E, \mathcal{T})$ zu einem topologischen Vektorraum macht.

(ii) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist lokalkonvexe finale Topologie auf E.

(iii) Sei $(G, \mathcal{V})$ ein beliebiger lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann ist eine Abbildung $f\colon E \to G$ genau dann $\mathcal{T}$-$\mathcal{V}$-stetig, wenn für alle $i \in I$ die Abbildungen $f \circ f_i$ stetig sind.

(iv) Hat eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}'$ auf E die in (iii) formulierte Eigenschaft, dann ist $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Beweis.

(i) Die Menge $\mathcal{B}$ hat die Basiseigenschaft, d.h. für je zwei $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existiert ein $B_3 \in \mathcal{B}$, sodass $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ gilt. Damit erzeugt $\mathcal{B}$ eine Topologie $\mathcal{T}$. Offensichtlich ist die erzeugte Topologie gerade $\mathcal{T} = \{U \subseteq E\colon \forall x \in U\ \exists V \in \mathcal{B}\colon x + V \subseteq U\}$ und man erkennt sofort, dass $\mathcal{B}$ eine 0-Umgebungsbasis von $\mathcal{T}$ ist.
Um zu zeigen, dass $(E, \mathcal{T})$ die Addition stetig macht, wählt man sich für $x, y \in E$ eine Umgebung von $x + y$, diese sei $(x + y) + V$ mit $V \in \mathcal{B}$. Da V konvex, gilt $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subseteq V$ und damit $(x + \frac{1}{2}V) + (y + \frac{1}{2}V) \subseteq (x + y) + V$.
Um die Stetigkeit der Skalarmultiplikation zu zeigen, wählt man $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ und $x_0 \in E$. Sei $W \in \mathcal{B}$ eine 0-Umgebung, dann existiert ein $\delta > 0$, sodass $\delta x \in \frac{1}{2}W$. Nun wähle $c > 0$ so, dass $(|\alpha_0| + \delta)c = \frac{1}{2}$. Für $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ und $x - x_0 \in cW =: V$ gilt

$$\alpha x - \alpha_0 x_0 = \alpha(x - x_0) + \underbrace{(\alpha - \alpha_0)}_{|.|<\delta} x_0 \in (|\alpha_0| + \delta)cW + \frac{1}{2}W = \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W \subseteq W.$$

Damit ist $\alpha V \subseteq \alpha_0 x_0 + W$ für alle $|\alpha - \alpha_0| < \delta$.

(ii) Sei $\mathcal{T}'$ eine lokalkonvexe Topologie auf E, sodass alle f_i stetig sind. Nun sei $\mathcal{W}$ eine 0-Umgebungsbasis von $\mathcal{T}'$ aus konvexen, kreisförmigen Mengen. Für $O \in \mathcal{W}$ gilt wegen der Stetigkeit der f_i, dass $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{U}_{E_i}(0)$ für alle $i \in I$. Daher gilt $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}$. Da E ein topologischer Vektorraum ist, folgt schon $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

(iii) Sei $f\colon E \to G$ stetig, dann sind $f \circ f_i$ für alle $i \in I$ stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen.
Seien nun alle $f \circ f_i$ stetig. Wähle eine 0-Umgebungsbasis $\mathcal{W}$ von G aus konvexen, kreisförmigen Mengen. Dann gilt

$$f_i^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ f_i)^{-1}(V) \in \mathcal{U}_{E_i}(0) \quad \forall V \in \mathcal{W}$$

Somit ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ für alle $V \in \mathcal{W}$. Daher ist f stetig bei 0 und damit überall stetig.

(iv) Sei nun $\mathcal{T}'$ eine lokalkonvexe Topologie auf E mit Eigenschaft (iii).
Die Abbildung $\mathrm{id}_X\colon (E, \mathcal{T}') \to (E, \mathcal{T}')$ ist stetig und daher auch $f_i = \mathrm{id}_X \circ f_i$ stetig von $(E_i, \mathcal{T}_i) \to (E, \mathcal{T}')$. Da $\mathcal{T}$ die feinste lokalkonvexe Topologie ist, die f_i stetig macht, folgt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.
Andererseits ist $f_i = \mathrm{id}_X \circ f_i\colon (E_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{f_i} (E, \mathcal{T}') \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (E, \mathcal{T})$ stetig, daher auch $\mathrm{id}_X\colon (E, \mathcal{T}') \to (E, \mathcal{T})$. Das bedeutet aber $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.
Insgesamt also $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

□

Beispiel 3.10. Sei E ein lokalkonvexer topologischer Raum, M ein linearer Unterraum von E und $\pi\colon E \to E/_M$ die kanonische Projektion auf den Faktorraum. Dann macht die finale Topologie $\mathcal{T}$ bzgl. π, im Sinne der allgemeinen Topologie, den Faktorraum $E/_M$ zu einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum, siehe [F].
Die Topologie $\mathcal{T}$ ist die feinste Topologie, die alle $f_i, i \in I$, stetig macht und sie ist zusätzlich lokalkonvex. Daher ist sie auch die lokalkonvexe finale Topologie nach Definition 3.7.

Bemerkung 3.11. Ist E ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum, dann ist $E/_M$ genau dann Hausdorff, wenn M abgeschlossen in E ist.

$$\begin{aligned} M \text{ abgeschlossen} \quad &\Leftrightarrow \quad \pi^{-1}(\pi(M)) = M \text{ abgeschlossen} \\ &\Leftrightarrow \quad \pi(M) = \{0 + M\} \text{ abgeschlossen} \\ &\Leftrightarrow \quad \tau_x(\pi(M)) = \{x + M\} \text{ abgeschlossen} \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

Dabei ist τ_x die Translation eines Vektors um x, die bekanntlich in einem topologischen Vektorraum ein Homöomorphismus ist.
M ist also genau dann abgeschlossen, wenn einpunktige Mengen in $E/_M$ abgeschlossen sind, d.h. (T_1). Wegen Bemerkung 3.4 ist (T_1) in topologischen Vektorräumen äquivalent zu (T_2).

Definition 3.12. Seien $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von lokalkonvexen topologischen Vektorräumen. Die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} E_i$ versehen mit der lokalkonvexen finalen Topologie bezeichnet man auch als **lokalkonvexe direkte Summe**.

Satz 3.13. *Ist $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorräume, so ist die lokalkonvexe direkte Summe $(\bigoplus_{i\in I} E_i, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum.*

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[dr, "g_i"] & & & E_i \\
& \bigoplus_{i\in I} E_i \arrow[r, "\iota"] & \prod_{i\in I} E_i \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"] & \\
E_j \arrow[ur, "g_j"] & & & E_j
\end{tikzcd}$$

Da alle E_i lokalkonvexe Hausdorffsche topologische Vektorräume sind, ist die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} E_i$ auch lokalkonvex und Hausdorff. Bezeichne nun mit $\mathcal{T}'$ die Spurtopologie der Produktopologie auf $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Damit ist auch $\mathcal{T}'$ lokalkonvex und Hausdorff.
Wir zeigen nun, dass die lokalkonvexe finale Topologie $\mathcal{T}$ feiner ist als $\mathcal{T}'$ und daher auch Hausdorff sein muss.
Die Topologie $\mathcal{T}'$ auf $\bigoplus_{i\in I} E_i$ kann auch als initiale Topologie bzgl. der Abbildungen $p_i \circ \iota, i \in I$ aufgefasst werden. ES gilt

$$(p_i \circ \iota) \circ g_j = \begin{cases} \mathrm{id}_{E_i} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Die Abbildungen 0 und id_{E_i} sind beide stetig und wegen der Eigenschaft der initialen Topologie sind damit die $g_j, j \in I$ stetig bzgl. $\mathcal{T}'$. Da $\mathcal{T}$ die feinste lokalkonvexe Topologie ist, die alle $g_j, j \in I$ stetig macht, folgt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. □

4 Induktiver Limes von lokalkonvexen topologischen Vektorräumen

Definition 4.1. Sei $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ ein direktes System einer Familie von lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen $(E_i)_{i\in I}$ und stetigen linearen Abbildungen $f_{ji}, i \leq j$. Sei E ein lokalkonvexer, Hausdorffscher topologischer Vektorraum und $f_i\colon E_i \to E, i \in I$, stetige lineare Abbildungen, sodass Folgendes gilt:

(i) Die $f_i, i \in I$, sind kompatibel mit den $f_{ji}, i \leq j$, d.h. $f_i = f_j \circ f_{ji}$ für $i \leq j$.

(ii) E besitzt folgende universelle Eigenschaft:
Für jeden weiteren lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorraum G mit stetigen linearen Abbildungen $g_i\colon E_i \to G, i \in I$, die mit den $f_{ji}, i \leq j$, kompatibel sind, d.h. $g_i = g_j \circ f_{ji}$ für $i \leq j$, existiert eine eindeutige stetige lineare Abbildung $g\colon E \to G$, sodass für alle $i \in I$ gilt $g_i = g \circ f_i$.

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_i"'] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & E_j \arrow[dl, "f_j"] \arrow[ddl, bend left, "g_j"] \\ & E \arrow[d, "g"] & \\ & G & \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Dann wird $\langle E, (f_i)_{i\in I}\rangle$ als **induktiver Limes** oder **direkter Limes** des direkten Systems $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ bezeichnet und als $\lim_{i\in I}\langle E_i, f_{ji}\rangle$ oder kurz $\lim_{i\in I} E_i$ geschrieben.

LEMMA 4.2. *Sei $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ ein direktes System einer Familie von lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen $(E_i)_{i\in I}$ und stetigen linearen Abbildungen $f_{ji}, i \leq j$. Außerdem sei $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ die lokalkonvexe direkte Summe, $g_i\colon E \to E_i, i \in I$ die entsprechenden Einbettungen, $M := \operatorname{span}\left\{\bigcup_{i\leq j} \operatorname{ran}(g_i - g_j \circ f_{ji})\right\}$ und $\pi\colon E \to E/_M$ die kanonische Projektion.*
Ist M in E abgeschlossen, dann ist $\langle E/_M, (\pi\circ g_i)_{i\in I}\rangle$ ein induktiver Limes des direkten Systems $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$.

Beweis. Die lokalkonvexe direkte Summe E der lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen $E_i, i \in I$, ist wegen Satz 3.13 ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Der Faktorraum $E/_M$ trägt die finale Topologie bzgl. π. Aus Beispiel 3.10 und Bemerkung 3.11 folgt, dass $E/_M$ auch ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum ist.
Die linearen Abbildungen $f_i := \pi \circ g_i, i \in I$, sind als Zusammensetzungen stetiger Abbildungen wieder stetig.
Da die $E_i, i \in I$, Vektorräume und die $f_{ji}, i \leq j$, lineare Abbildungen sind, sind die Voraussetzungen von Satz 2.4 erfüllt. Der Beweis dieses Satzes liefert, dass die $f_i, i \in I$ mit den $f_{ji}, i \leq j$, kompatibel sind und dass die lokalkonvexe direkte Summe E die universelle Eigenschaft (ii) aus Definition 2.1 hat. Wählt man speziell einen lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorraum G mit stetigen linearen Abbildungen $g_i, i \in I$, die mit den $f_{ji}, i \leq j$, kompatibel sind, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $g\colon E \to G$, sodass für alle $i \in I$ gilt $g_i = g \circ f_i$, vgl. Diagramm 1.2. Da alle Abbildungen $g_i, i \in I$, stetig sind, folgt aus Satz 3.9 (iii), dass auch

g stetig ist.
Damit erfüllt $E/_M$ auch die universelle Eigenschaft aus Definition 4.1.

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & E_j \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[ddl, bend left, "g_j"] \\
& E/_M \arrow[d, "g"] & \\
& G &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Satz 4.3. *Sei $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen und seien $f_{ji}, i \leq j$, stetige lineare Abbildungen.*
Falls der induktive Limes eines direkten Systems $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i\leq j}\rangle$ existiert, dann ist er eindeutig.
Genauer: Wenn $\langle E, (f_i)_{i\in I}\rangle$ und $\langle F, (g_i)_{i\in I}\rangle$ beide die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 4.1 haben, dann existiert ein linearer Homöomorphismus $\varphi\colon E \to F$ mit $g_i \circ \varphi = f_i, i \in I$.

Beweis. Analog zu Satz 1.4 (Eindeutigkeit des direkten Limes von Mengen). $\square$

Beispiel 4.4. Sei E ein Vektorraum und $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von linearen Unterräumen von E, sodass $E = \bigcup_{i\in I} E_i$. Zusätzlich soll für je zwei Indizes $i, j \in I$ ein Index $k \in I$ mit E_i, E_j ein $E_k \supseteq E_i, E_j$ existieren. Dann ist I gerichtet durch $i \leq j :\Leftrightarrow E_i \subseteq E_j$.
Die $f_{ji}\colon E_i \to E_j, i \leq j$, und $f_i\colon E_i \to E, i \in I$, seien die mengentheoretischen Inklusionsabbildungen. Dann enthält der Unterraum M von E, nach dem im Lemma 4.2 faktorisiert wird, nur den Nullvektor, da $\operatorname{ran}(f_i - f_j \circ f_{ji}) = \{0\}$ für alle $i \leq j$.
Auf $E_i, i \in I$, seien lokalkonvexe Hausdorffsche Topologien gegeben, mit der Eigenschaft $\mathcal{T}_j|_{E_i} \subseteq \mathcal{T}_i$ für $i \leq j$, d.h. die Abbildungen $f_{ji}, i \leq j$, seien stetig.

Wenn die lokalkonvexe finale Topologie $\mathcal{T}$ auf E bzgl. der $f_i, i \in I$, Hausdorff ist, dann ist $\langle E, (f_i)_{i\in I}\rangle$ induktiver Limes des direkten Systems $\langle (E_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j}\rangle$. Denn die Eigenschaften aus Definition 4.1 sind erfüllt:

(i) Die $f_i, i \in I$, sind mit $f_{ji}, i \leq j$, kompatibel.
(ii) E hat die universelle Eigenschaft:
Sei G ist ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum mit stetigen linearen Abbildungen $g_i\colon E_i \to G, i \in I$, die mit den $f_{ji}, i \leq j$, kompatibel sind, also $g_i = g_j \circ f_{ji} = g_j|_{E_i}$ für $i \leq j$.
Die gewünschte eindeutige Abbildung $g\colon E \to G$ ist dann definiert als $g(x) = g_i(x)$ für $x \in E_i$. Wegen dem oben Gezeigten ist g wohldefiniert.

Bemerkung 4.5. Als weitere Spezialisierung des Beispiels 4.4 sei nun die gerichtete Menge $I = \mathbb{N}$. Dann ist $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Zusätzlich seien die Unterräume von E geschachtelt, d.h. es gilt $E_n \subseteq E_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Auf den $E_n, n \in \mathbb{N}$, seien lokalkonvexe Hausdorffsche Topologien gegeben, mit der Eigenschaft $\mathcal{T}_{n+1}|_{E_n} \subseteq \mathcal{T}_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Inklusionsabbildungen $f_n\colon E_n \to E_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ stetig und $\langle (E_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ ist ein direktes System. Wir bezeichnen einen induktiven Limes dieses direkten Systems als induktiven Limes der $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Man beachte jedoch, dass es im allgemeinen keinen induktiven Limes geben muss: Sei $\mathcal{T}$ die

lokalkonvexe finale Topologie auf E bzgl. der Inklusionsabbildungen $\iota_n\colon E_n \to E, n \in \mathbb{N}$. Es kann vorkommen, dass alle $\mathcal{T}_n$ Hausdorff sind, aber $\mathcal{T}$ nicht. Genauso kann es vorkommen, dass E_n abgeschlossen ist in E_m für $m \leq n$, aber E_n nicht abgeschlossen in E ist.
Wir wollen nun zeigen, dass dies nicht auftreten kann, wenn man von den Topologien $\mathcal{T}_n, n \in \mathbb{N}$, fordert, dass sogar $\mathcal{T}_{n+1}|_{E_n} = \mathcal{T}_n$ gilt.

Satz 4.6. *Sei $(E_n, \mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von lokalkonvexen topologischen Vektorräumen, sodass $E_n \subseteq E_{n+1}$ und $\mathcal{T}_{n+1}|_{E_n} = \mathcal{T}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ und $\mathcal{T}$ die lokalkonvexe finale Topologie auf E bzgl. der Inklusionsabbildungen $\iota_n, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) Die Spurtopologie von $\mathcal{T}$ auf E_n ist genau $\mathcal{T}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mathcal{T}|_{E_n} = \mathcal{T}_n$.

(ii) $\mathcal{T}$ ist Hausdorff genau dann, wenn alle $\mathcal{T}_n, n \in \mathbb{N}$, Hausdorff sind.

(iii) Ist E_n abgeschlossen in E_{n+1} bzgl. $\mathcal{T}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sind alle E_n abgeschlossen in E bzgl. $\mathcal{T}$.

Wir verwenden für den Beweis folgendes Lemma:

Lemma 4.7. *Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, M ein linearer Unterraum und V eine konvexe Nullumgebung von M bzgl. der Spurtopologie von E. Dann existiert eine konvexe Nullumgebung W in E, so dass $W \cap M = V$.*

Beweis. Da V eine konvexe Nullumgebung von M bzgl. der Spurtopologie ist und E lokalkonvex ist, existiert eine konvexe Nullumgebung U von E, sodass $U \cap M \subseteq V$. Es sei $W := \Gamma(U \cup V)$, wobei Γ die konvexe Hülle in E bezeichne, d.h. die kleinste konvexe Menge, die $U \cup V$ enthält. Somit ist W eine konvexe Nullumgebung in E. Jedes $z \in W$ ist darstellbar als $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $x \in V$, $y \in U, \lambda \in [0, 1]$.
Trivialerweise gilt $V \subseteq W \cap M$. Es muss also nur mehr $W \cap M \subseteq V$ gezeigt werden.
Sei $z \in W \cap M$, also $z \in M, z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ für $x \in V \subseteq M$, $y \in U$ und $\lambda \in [0, 1]$. Für $\lambda = 1$ gilt $z = x \in V$. Für $\lambda \neq 1$ ist $y = \frac{1}{1-\lambda}(\lambda x - z) \in M$, also ist $y \in U \cap M \subseteq V$. Somit sind $x, y \in V$ und da V konvex ist, folgt $z \in V$.
Daher folgt die Behauptung für W. □

Beweis (von Satz 4.6)**.**

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ festgehalten und sei $\mathcal{T}_n'$ die Spurtopologie von $\mathcal{T}$ auf E_n.
Da die Inklusionsabbildungen $\iota_n\colon E_n \to E$ stetig sind gilt $\mathcal{T}_n' = \iota_n^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}_n$.
Es ist noch $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_n'$ zu zeigen. Sei $V_n \in \mathcal{T}_n$ eine konvexe Nullumgebung in E_n. Wir konstruieren nun konvexe Nullumgebungen in E_{n+k} für $k \geq 1$, die wir mit V_{n+k} bezeichnen, sodass $V_{n+k+1} \cap E_{n+k} = V_{n+k}$. Die Vereinigung $V = \bigcup_{k\geq 0} V_{n+k}$ ist wieder konvex.
Für $k \geq n$ ist $\iota_k^{-1}(V) = V \cap E_k = V_k$ eine konvexe Nullumgebung in E_k. Für $k < n$ gilt $\iota_k^{-1}(V) = V \cap E_k = V_n \cap E_k$, und da die Topologie auf E_k genau die Spurtopologie von $\mathcal{T}_n$ ist, ist $V_n \cap E_k$ eine konvexe Nullumgebung von E_k. Somit ist V eine konvexe Nullumgebung in E bzgl. $\mathcal{T}$ mit $V \cap E_n = V_n$. Also ist $V_n \in \mathcal{T}_n'$ und somit die Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_n'$ feiner als die von $\mathcal{T}_n$, daher $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_n'$.
Insgesamt folgt $\mathcal{T}_n' = \mathcal{T}_n$.

(ii) Sei $\mathcal{T}_n$ Hausdorff für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $0 \neq x \in E$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, mit $x \in E_n$. Da $\mathcal{T}_n$ Hausdorff ist, existiert eine konvexe Nullumgebung V_n bzgl. $\mathcal{T}_n$, sodass $x \notin V_n$. Aus (i) und Lemma 4.7 folgt die Existenz einer Nullumgebung $V \in \mathcal{T}$ mit $V \cap E_n = V_n$. Da $x \notin V_n, x \in E_n$ muss $x \notin V$ gelten. Damit ist $\mathcal{T}$ Hausdorff.
Ist nun $\mathcal{T}$ Hausdorff, so existiert für $0 \neq x \in E_n \subseteq E, n \in \mathbb{N}$ eine Nullumgebung $V \in \mathcal{T}$ mit $x \notin V$. Wegen (i) ist $V \cap E_n \in \mathcal{T}_n$ mit $x \notin V \cap E_n$, also ist $\mathcal{T}_n$ Hausdorff.

(iii) Wir zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt, $E \setminus E_n$ offen in E bzgl. $\mathcal{T}$ ist.
Sei $x \in E \setminus E_n$. Es existiert ein $m > n$ mit $x \in E_m$. Da E_n abgeschlossen in E_m ist, d.h. $E_m \setminus E_n$ ist offen in E_m, existiert eine konvexe Nullumgebung V_m bzgl. $\mathcal{T}_m$, sodass $(x + V_m) \cap E_n = \emptyset$. Nach (i) und Lemma 4.7 lässt sich eine konvexe Nullumgebung $V \in \mathcal{T}$ konstruieren mit $V \cap E_m = V_m$. Daher gilt $(x + V) \cap E_n = (x + V) \cap E_m \cap E_n = (x + V_m) \cap E_n = \emptyset$.

□

KOROLLAR 4.8. *Sei $(E_n, \mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen mit $\mathcal{T}_{n+1}|_{E_n} = \mathcal{T}_n$. Dann existiert ein induktiver Limes der $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
Insbesondere ist $\langle E, (\iota_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ ein induktiver Limes der $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\iota_n \colon E_n \to E, n \in \mathbb{N}$, die Inklusionsabbildungen sind.

Bemerkung 4.9. In diesem Fall, dass $\iota_n, n \in \mathbb{N}$, die Inklusionsabbildungen sind, sagen wir einfach $(E, \mathcal{T})$ ist der induktive Limes der $(E_n, \mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. E ist der induktive Limes der $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und schreiben $E = lim_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Beweis. $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ versehen mit der lokalkonvexen finalen Topologie $\mathcal{T}$ bzgl. der Inklusionsabbildungen $\iota_n, n \in \mathbb{N}$, ist ein lokalkonvexer topologischer Vekktorraum. Wegen Beispiel 4.4 ist $\langle E, (\iota_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ ein induktiver Limes, falls $\mathcal{T}$ Hausdorff ist. Da alle $\mathcal{T}_n, n \in \mathbb{N}$, Hausdorff sind, liefert Satz 4.6 (ii), dass $\mathcal{T}$ ebenfalls Hausdorff ist. □

Definition 4.10. Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen, sodass $E_n \subseteq E_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Wenn die Spurtopologie von $\mathcal{T}_{n+1}$ auf E_n genau $\mathcal{T}_n$ ist, d.h. $\mathcal{T}_{n+1}|_{E_n} = \mathcal{T}_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann bezeichnet man den induktiven Limes der $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch als **strikten induktiven Limes** der $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 4.11. Sei X ein topologischer Vektorraum.

(i) Eine Menge $B \subseteq X$ heißt **beschränkt**, wenn für jede Nullumgebung U von X, ein $k > 0$ gibt, sodass $B \subseteq kU$ gilt.

(ii) X heißt **vollständig**, wenn es mindestens eine vollständige Metrik auf X gibt, die die Topologie erzeugt.

Bemerkung 4.12. Für den strikten induktiven Limes einer Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen gilt:

- Eine Menge $A \subseteq E$ ist beschränkt in E $\Leftrightarrow$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $A \subseteq E_n$ und A ist beschränkt in E_n

- Eine Menge $K \subseteq E$ ist kompakt in E bzgl. $\mathcal{T} \Leftrightarrow$ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $K \subseteq E_n$ und K ist kompakt in E_n bzgl. $\mathcal{T}_n$
- Ist E_n vollständig für alle $n \in N$, dann ist auch E vollständig.

Die Beweise dazu findet man in [B].

5 Anwendungsbeispiele für induktive Limiten

5.1 Der Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$

Definition 5.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, nichtleere Menge.
Der Raum $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \colon \exists K \subseteq \Omega \text{ kompakt} \colon \operatorname{supp} f \subseteq K\}$ wird als **Raum der Testfunktionen** bezeichnet.
Für eine kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ definieren wir $\mathcal{D}(K) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \colon \operatorname{supp} f \subseteq K\}$.

Bemerkung 5.2. Offensichtlich ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein Vektorraum und $\mathcal{D}(K)$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{D}(\Omega)$. Außerdem bemerkt man sofort, dass $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{D}(K)$, wobei $\mathcal{K}$ die Menge der kompakten Mengen von $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.3. Sei X ein Vektorraum und $p \colon X \to [0, \infty)$, dann heißt p eine **Seminorm**, wenn gilt:

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X$

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$

Dabei definieren wir $N(p) := \{x \in X \colon p(x) = 0\}$.
Sei M eine Familie von Seminormen auf X, dann heißt M **separierend**, wenn $\bigcap_{p \in M} N(p) = \{0\}$.

Im Folgenden werden wir die Aussage aus Satz 5.5 verwenden. Die Beweise zum folgenden Lemma und zum folgenden Satz findet man in [F].

Lemma 5.4. *Sei X ein Vektorraum und p eine Seminorm auf X.*
Dann ist die Funktion $\tilde{p} \colon X/_{N(p)} \to [0, \infty)$, die der Restklasse $x + N(p)$ die Zahl $p(x)$ zuweist, wohldefiniert und eine Norm.

Satz 5.5. *Sei X ein Vektorraum und M eine Familie von Seminormen auf X.*
Für $p \in M$ seien $N(p)$ und $\tilde{p} \colon X/_{N(p)} \to [0, \infty)$ definiert wie im vorigen Lemma, d.h. $(X/_{N(p)}, \tilde{p})$ ist ein normierter Raum. Weiters bezeichne mit $\pi_p \colon X \to X/_{N(p)}$ die kanonische Projektion und mit $\mathcal{T}_M$ die initiale Topologie auf X bzgl. der Abbildungen $\pi, p \in M$.
Dann ist $(X, \mathcal{T}_M)$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und alle Seminormen $p \in M$ sind stetig bzgl. $\mathcal{T}_M$.
Eine Nullumgebungsbasis von $(X, \mathcal{T}_M)$ bestehend aus konvexen Mengen ist zum Beispiel gegeben durch

$$\mathcal{W}(0) := \left\{ \bigcap_{i=1}^m V(p_i, \epsilon_i) \colon m \in \mathbb{N}, p_i \in M, \epsilon_i > 0 \right\}, \tag{5.5}$$

wobei $V(p, \epsilon) := \{x \in X \colon p(x) < \epsilon\}$.

Bemerkung 5.6. Wir wollen nun mit Hilfe der induktiven Limiten eine Topologie auf dem Raum der Testfunktionen konstruieren.
Für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ (α heißt auch Multiindex) bezeichnen wir mit D^α die partielle Ableitung $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, wobei $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Außerdem definieren wir $D^{(0,...,0)} := \mathrm{id}$.
Dann definieren wir für $i \in \mathbb{N}_0$ die (Semi-)Norm p_i^K auf $\mathcal{D}(K)$ durch:

$$p_i^K(f) := \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq i} |D^\alpha f(x)|, \quad f \in \mathcal{D}(K) \tag{5.6}$$

Die Familie der Seminormen $M_K := (p_i^K)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist separierend, denn $p_0^K = \|.\|$ ist genau die Supremumsnorm auf $\mathcal{D}(K)$, d.h. $N(p_0^K) = \{0\}$.
Nach Satz 5.5 wird dann $\mathcal{D}(K)$ versehen mit der von der Familie von Seminormen M_K induzierten Topologie $\mathcal{T}_K := \mathcal{T}_{M_K}$ zu einem lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorraum.

Lemma 5.7. *Sei $K \subseteq K' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit kompakten Mengen K und K' und seien $(\mathcal{D}(K), \mathcal{T}_K)$ und $(\mathcal{D}(K'), \mathcal{T}_{K'})$ die lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräume, wie in der vorigen Bemerkung konstruiert. Weiters seien $M_K = (p_i^K)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $M_{K'} = (p_i^{K'})_{i \in \mathbb{N}_0}$ die Mengen der Seminormen, die zur Konstruktion der lokalkonvexen Topologien $\mathcal{T}_K$ und $\mathcal{T}_{K'}$ verwendet wurden. Dann gilt*

(i) $\mathcal{T}_{K'}|_{\mathcal{D}(K)} = \mathcal{T}_K$ und

(ii) $\mathcal{D}(K)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{D}(K')$ bzgl. $\mathcal{T}_{K'}$.

Beweis.

(i) Sei $\mathcal{W}$ die 0-Umgebungsbasis von $\mathcal{T}_K$ und $\mathcal{W}'$ jene von $\mathcal{T}_{K'}$, so wie sie in (5.5) definiert wurde. Bezeichne nun mit $\mathcal{W}'|_{\mathcal{D}(K)}$ die 0-Umgebungsbasis der Spurtopologie von $\mathcal{T}_{K'}$ auf $\mathcal{D}(K)$.
Eine Menge $W \in \mathcal{W}$ ist genau der Durchschnitt von endlich vielen Mengen der Form $V^K(p^K, \epsilon) := \{f \in \mathcal{D}(K) \colon p^K(x) < \epsilon\}$, wobei $p^K \in M_K$ eine Seminorm und $\epsilon > 0$. Wie man sofort aus der Definition erkennen kann, stimmen p_i^K und $p_i^{K'}$ auf $\mathcal{D}(K)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ überein. Daher gilt für $i \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} V^{K'}(p_i^{K'}, \epsilon) \cap \mathcal{D}(K) &= \{f \in \mathcal{D}(K) \colon p_i^{K'}(f) < \epsilon\} \\ &= \{f \in \mathcal{D}(K) \colon p_i^K(f) < \epsilon\} = V^K(p_i^K, \epsilon) \end{aligned}$$

Somit stimmen auch die endlichen Durchschnitte solcher Mengen überein, folglich auch die 0-Umgebungsbasen $\mathcal{W}'|_{\mathcal{D}(K)}$ und $\mathcal{W}$. Da $\mathcal{D}(K)$ ein topologischer Raum ist, gilt dann bereits $\mathcal{T}_{K'}|_{\mathcal{D}(K)} = \mathcal{T}_K$.

(ii) Sei $f \in K' \setminus K$, dann existiert ein $x_0 \in K'$, sodass $f(x) \neq 0$. Da $[0, \frac{|f(x_0)|}{2})$ eine offene Menge in $[0, \infty)$ ist, folgt aus der Stetigkeit der Seminorm $p := p_0^{K'}$, dass $V := p^{-1}([0, \frac{|f(x_0)|}{2}))$ eine offene Nullumgebung in $\mathcal{T}_{K'}$ ist. Daher ist $f + V$ eine offene Umgebung von f, die ganz in $\mathcal{D}(K') \setminus \mathcal{D}(K)$ liegt, denn für alle $g \in f + V$ gilt bei x_0, dass $|g(x_0)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$.

□

Bemerkung 5.8. Wir wählen nun eine aufsteigende Folge von kompakten Mengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$. Da es eine aufsteigende Folge von Mengen ist, existiert somit für jedes kompakte $K \subseteq \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$, für das $K \subseteq K_n$ gilt.
Damit gilt

- $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(K_n)$ und
- $D(K_n) \subseteq \mathcal{D}(K_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei auf $\mathcal{D}(K_n)$ die lokalkonvexe Hausdorffsche Topologie $\mathcal{T}_n := \mathcal{T}_{K_n}$ aus Bemerkung 5.6 gegeben. Dann folgt aus Lemma 5.7, dass $\mathcal{T}_{n+1}|_{\mathcal{D}(K_n)} = \mathcal{T}_n$.

Wegen Satz 4.6 und Korollar 4.8 existiert der strikte induktive Limes $\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(K_n)$ und ist ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Weiters kann dieser, als Vektorraum, mit $\mathcal{D}(\Omega)$ identifieziert werden. Wir haben also $\mathcal{D}(\Omega)$ mit der Topologie $\mathcal{T}$ des induktiven Limes zu einen lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorraum gemacht, der die konstruierten Topologien $\mathcal{T}_n$ auf $\mathcal{D}(K_n)$ induziert. Außerdem sind alle $\mathcal{D}(K_n), n \in \mathbb{N}$, abgeschlossen in $\mathcal{D}(\Omega)$ bzgl. $\mathcal{T}$.

Bemerkung 5.9. Der Unterraum $\mathcal{D}(K_n)$ ist vollständig für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. es existiert eine vollständige Metrik auf $\mathcal{D}(K_n)$, die $\mathcal{T}_n$ erzeugt, siehe [C]. Eine solche Metrik auf $\mathcal{D}(K_n)$ wäre beispielsweise

$$d(f,g) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)}, \quad f,g \in \mathcal{D}(K), \tag{5.7}$$

wobei $p_i := p_i^{K_n}, i \in \mathbb{N}$, die Seminormen aus (5.6) sind. Aus Bemerkung 4.12 folgt daher die Vollständigkeit von $\mathcal{D}(\Omega)$.

Bemerkung 5.10. Aus Satz 3.9 (i) erhalten wir, dass

$$\mathcal{B} := \{V \subseteq \mathcal{D}(K) \colon V \text{ konvex, kreisförmig, } \mathcal{D}(K_n) \cap V \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}(K_n)}(0)\}$$

eine 0-Umgebungsbasis von $\mathcal{T}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. In vielen Funktionalanalysisbüchern wird durch Angabe dieser 0-Umgebungsbasis die lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ eingeführt, ohne dabei genauer auf induktive Limiten einzugehen, zum Beispiel [R].
In Partiellen Differentialgleichungen wird hingegen meistens statt einer expliziten Definition der Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ einfach nur der Konvergenzbegriff für eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ eingeführt.

Satz 5.11. *Sei $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T})$ der induktive Limes der $(\mathcal{D}(K_n), \mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
Dann konvergiert eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}$ genau dann gegen 0, in Zeichen $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$, wenn es eine kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ mit $\operatorname{supp}\phi_n \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert und für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} p_i^K(\phi_n) = 0$.

Beweis. Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge gegen 0. Die Menge $B := \{\phi_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt im Sinne von Definition 4.11, da für jede Nullumgebung U in $D(\Omega)$ nur endlich viele Folgenglieder nicht in U liegen. Jede Nullumgebung ist absorbierend, daher kann die Menge U durch Skalierung mit $k \geq 1$ so vergrößert werden, dass $B \subseteq kU$.
Wegen Bemerkung 4.12 (ii) existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $B \subseteq \mathcal{D}(K_n)$ und B ist beschränkt in $\mathcal{D}(K_n)$, d.h. alle $\phi_n, n \in \mathbb{N}$, liegen in $\mathcal{D}(K_n)$. Daher gilt $\operatorname{supp}\phi_n \subseteq K_n$. Da die Topologie $\mathcal{T}_n$ auf $\mathcal{D}(K_n)$ gerade die Spurtopologie von $\mathcal{T}$ ist, konvergiert die Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in $\mathcal{D}(K_n)$ gegen 0.
Die Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert somit in $\mathcal{D}(\Omega)$ genau dann gegen 0, wenn es ein K_n gibt, sodass $\operatorname{supp}\phi_n \subseteq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(K_n)$ konvergiert.
Wegen Bemerkung 5.9 ist $\mathcal{D}(K_n)$ vollständig und wird von der Metrik (5.7) erzeugt. Konvergenz einer Folge bzgl. der Topologie ist bekanntlich äquivalent zur Konvergenz der Folge bzgl.

der Metrik. Daher konvergiert $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Metrik gegen 0. Offensichtlich bedeutet das aber genau, dass $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jede Norm $p_i^{K_n}$ gegen 0 konvergiert. $\square$

5.2 Keime holomorpher Funktionen

Weiters betrachten wir noch ein Beispiel für einen induktiven Limes, der kein strikter induktiver Limes ist.

Definition 5.12. Seien X, Y topologische Räume, $f, g\colon X \to Y$ Abbildungen und $x \in X$. Dann sagen wir, dass f und g dem selben **Keim von Funktionen** bezüglich x entstammen, wenn eine Umgebung U von x existiert, für die gilt, dass $f|_U = g|_U$.
Dies definiert die Äquivalenzrelation: $f \sim_x g :\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x)\colon f|_U = g|_U$.
Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere, kompakte Menge. Bezeichne mit $\sim_K$ die Äquivalenzrelation, die durch $f \sim_K g :\Leftrightarrow \exists U \supseteq K$ offen: $f|_U = g|_U$ definiert ist.

Definition 5.13. Sei nun $X = \mathbb{C}$ und $K \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere, kompakte Menge. Dann bezeichnen wir mit

$$H(K) := \{f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon \exists U \supseteq K \text{ offen}, f|_U \text{ ist holomorph}\}/_{\sim_K}$$

den Raum aller Keime holomorpher Funktionen um K.

Bemerkung 5.14. Definieren wir auf $H(K)$ die Addition durch

$$[f]_{\sim_K} + [g]_{\sim_K} := [f+g]_{\sim_K}, \quad [f]_{\sim_K}, [g]_{\sim_K} \in H(K)$$

und die Skalarmultiplikation durch

$$\lambda[f]_{\sim_K} := [\lambda f]_{\sim_K}, \quad [f]_{\sim_K} \in H(K), \lambda \in \mathbb{C},$$

dann sind sie wohldefiniert. Denn für zwei Funktionen f, g, die auf offenen Mengen $U_1 \supseteq K$ bzw. $U_2 \supseteq K$ holomorph sind, ist $f+g$ auf dem der offenen Menge $U_1 \cap U_2 \supseteq K$ holomorph. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und eine Funktion f, die auf der offenen Menge $U \supseteq K$ holomorph ist, ist λf wieder holomorph auf $U \supseteq K$. Damit wird $H(K)$ zu einem Vektorraum.

Bemerkung 5.15. Wir konstruieren nun ein direktes System von lokalkonvexen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen.
Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere, kompakte Menge. Nun wählen wir eine fallende Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit $U_n \supseteq \overline{U_{n+1}}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = K$. Zusätzlich wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die offene Menge U_n so, dass sie keine Gebiete[1] enthält, die mit K nichtleeren Schnitt haben. Diese Wahl ist möglich, siehe [R2].
Definieren wir nun $A_n := \{f \in \mathcal{C}(\overline{U_n})\colon f \text{ holomorph auf } U_n\}$, dann ist dieser Raum versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{A_n} = \sup_{x\in\overline{U_n}} |f(x)|, \quad f \in A_n$$

ein Banachraum, insbesondere ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Die Einschränkungsabbildung $g_n\colon A_n \to A_{n+1}$ ist linear und stetig für $n \in \mathbb{N}$, da für $f, h \in A_n$ gilt, dass

$$\|g_n(f) - g_n(h)\|_{A_{n+1}} = \|f|_{\overline{U_{n+1}}} - h|_{\overline{U_{n+1}}}\|_{A_{n+1}} \leq \|f-h\|_{A_n}.$$

[1] Ein Gebiet ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Menge.

Außerdem lässt sich durch die Abbildung

$$\iota_n \colon A_n \to H(K),\ f \mapsto [\tilde{f}]_{\sim_K} \qquad \text{wobei } \tilde{f} = \begin{cases} f & \text{auf } \overline{U_n} \\ 0 & \text{auf } \mathbb{C} \setminus \overline{U_n} \end{cases} \tag{5.8}$$

A_n offensichtlich in $H(K)$ einbetten.

Lemma 5.16. *Seien A_n und ι_n für alle $n \in \mathbb{N}$ wie in Bemerkung 5.15 definiert. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

(i) *ι_n ist injektiv*

(ii) *$\iota_n(A_n) \subseteq \iota_n(A_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

(iii) *$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \iota_n(A_n) = H(K)$.*

Beweis.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f, g \in A_n$ mit $\iota_n(f) = \iota_n(g)$. Bezeichne mit $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ die auf $\mathbb{C}$ mit 0 fortgesetzten Abbildungen von f bzw. g. Dann stimmen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auf einer offenen Menge $U \supseteq K$ überein, insbesondere auf der offenen Menge $U_n \cap U$. Jede offene Menge lässt sich als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen disjunkten Gebieten darstellen. Da wir U_n so konstruiert haben, dass sie keine Gebiete enthält, die mit K nichtleeren Schnitt haben, stimmen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auf jedem Gebiet von U_n auf einer offenen Teilmenge überein. Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen, siehe [R2], liefert nun, dass $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auf jedem dieser Gebiete übereinstimmen, daher auf ganz U_n. Wegen der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung auf $\overline{U_n}$ gilt daher $\tilde{f}|_{\overline{U_n}} = \tilde{g}|_{\overline{U_n}}$, d.h. $f = g$.

(ii) Sei $f \in A_n$ und $\tilde{f}$ die auf $\mathbb{C}$ durch 0 fortgesetzte Abbildung von f. Dann ist nach Definition $[\tilde{f}]_{\sim_K} \in \iota_n(A_n)$. Wegen $U_{n+1} \subseteq U_n$ bzw. $\overline{U_{n+1}} \subseteq \overline{U_n}$ ist $\tilde{f}|_{U_{n+1}} = f|_{U_{n+1}}$ holomorph und $\tilde{f}|_{\overline{U_{n+1}}} = f|_{\overline{U_{n+1}}}$ stetig. Damit ist $[\tilde{f}]_{\sim_K} \in \iota_n(A_n)$.

(iii) Sei nun $F \in H(K)$ und g ein Repräsentant aus der Restklasse F. Dann existiert ein $U \supseteq K$ offen, sodass $f|_U$ holomorph ist. Da $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Mengenfolge offener Mengen mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = K$ ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subseteq U$. Wegen $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n \subseteq U$ ist $f|_{\overline{U_{n+1}}}$ stetig und auf U_{n+1} holomorph, also $f|_{\overline{U_{n+1}}} \in A_{n+1}$.
Wegen $\iota_{n+1}(f|_{\overline{U_{n+1}}}) = F$ erhalten wir $H(K) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \iota_n(A_n)$, insgesamt also $H(K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \iota_n(A_n)$.

□

Bemerkung 5.17. Da für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\iota_n \colon A_n \to H_n := \iota_n(A_n)$ bijektiv ist, kann A_n mit H_n identifiziert werden. Durch die Bijektion ι_n kann auf $H(K)$ eine Norm bzw. Topologie definiert werden. Wenn T'_n die von der Supremumsnorm induzierte Topologie auf A_n ist, dann ist $\mathcal{T}_n := \iota_n(\mathcal{T}'_n)$ eine lokalkonvexe Hausdorffsche Topologie auf H_n. Damit ist ι_n ein linearer Homöomorphismus von A_n nach H_n. Definiere nun $\tilde{g}_n := \iota_{n+1} \circ g_n \circ \iota_n^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\tilde{g}_n$ stetig und linear.
Nun ist $\langle (H_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ ein direktes System. Betrachtet man dieses direkte System nun als

direktes System von Vektorräumen, so kann der induktive Limes mit $H(K)$ identifiziert werden. Im Allgemeinen erfüllt dieses direkte System jedoch die Eigenschaft $\mathcal{T}_{n+1}|_{H_n} = \mathcal{T}_n$ nicht. Die Existenz eines induktiven Limes muss also eigens nachgerechnet werden, zu zeigen ist, dass die lokalkonvexe finale Topologie auf $H(K)$ Hausdorff ist.
Da der Beweis der Hausdorffeigenschaft von $H(K)$ einige Vorkenntnisse über holomorphe Funktionen benötigt, wird an dieser Stelle auf das Skriptum [BS] verwiesen, wo der genau Beweis zu finden ist.

Literatur

[F] H.Woracek, M.Kaltenbäck, M.Blümlinger: *Funtionalanalysis*, Skriptum, 5.Auflage, 2009

[S] H.H.Schäfer: *Topological Vector Spaces*, Springer Verlag, New York 1971

[B] N.Bourbaki: *Topological Vector Spaces*, Elements of Mathematics, Springer Verlag, Berlin 1987

[C] J.B.Conway: *A Course in Functional Analysis*, Springer Verlag, New York 1985

[R] W.Rudin: *Functional Analysis*, Second Edition, 1991

[R2] W.Rudin: *Real and Complex Analysis*, Second Edition, 1987

[BS] K.Bierstedt: *Zusammenhänge zwischen Funktionalanalysis und Funktionentheorie* (handschriftlich), Vorlesungsmanuskript, Universität Paderborn