Darstellungssatz von Riesz in vollständig regulären Räumen

Carina Pöll
0726726

Wintersemester 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel ist es den Darstellungssatz von Riesz für vollständig reguläre Räume zu formulieren und zu beweisen. Die aus der Analysis 3 Vorlesung bekannte Version des Darstellungssatzes von Riesz gilt für lokal-kompakte Hausdorff-Räume. Es seien X ein topologischer Raum, $\mathfrak{K}$ das System der kompakten Mengen und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von X.

Darstellungssatz von Riesz. *Es seien X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum und $I\colon C_c(X) \to \mathbb{K}$ eine positive Linearform. Dann esistiert genau ein Radon-Maß $\mu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty]$, so dass*

$$I(f) = \int_X f \, d\mu,$$

und das Maß μ erfüllt

$$\mu(K) = \inf\{I(f)\colon f \in C_c(X), f \geq \chi_K\} \textit{ für alle } K \in \mathfrak{K},$$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset A, K \in \mathfrak{K}\} \textit{ für alle } A \in \mathfrak{B}.$$

2 Definitionen und Resultate aus der Topologie

Zunächst werden wichtige Begriffe definiert, die für den Darstellungssatz von Riesz später verwendet werden. Zur Erinnerung einige Definitionen aus der Analysis 2.

Definition 2.1. Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. Erfüllt $\mathcal{T}$ die folgenden Eigenschaften

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

2. Für O_1, $O_2 \in \mathcal{T}$ gilt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

3. Ist I eine Indexmenge und $O_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, so folgt $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$

so heißt $\mathcal{T}$ eine *Topologie* auf X. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen und $(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum.*

Definition 2.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von x, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in O \subseteq U$. Der *Umgebungsfilter* von x wird mit $\mathfrak{U}(x)$ bezeichnet und ist die Menge aller Umgebungen von x.

Definition 2.3. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *T2-Raum* oder *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$, disjunkte offene Mengen O_x und O_y gibt, sodass $x \in O_x, y \in O_y$.

Definition 2.4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn A^c offen ist.

Definition 2.5. Ein System $\{U_i \colon i \in I\}$ offener Teilmengen von X heißt eine *offene Überdeckung* von $A \subset X$, falls $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Eine Teilmenge J der Indexmenge I heißt eine *Teilüberdeckung*, falls $\bigcup_{i \in J} U_i$ eine Überdeckung von A ist.

Definition 2.6. Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Satz 2.7. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raums ist abgeschlossen.*

Satz 2.8. *In einem Hausdorff-Raum lassen sich zwei disjunkte kompakte Mengen A, B trennen. Das heißt es gibt disjunkte offene Mengen O_A und O_B, sodass $A \subset O_A, B \subset O_B$.*

Definition 2.9. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *regulär*, wenn sich abgeschlossene Mengen A und einpunktige Mengen $\{x\}$ mit $x \notin A$ trennen lassen, das heißt es existiert O_x, $O_A \in \mathcal{T} \colon A \subset O_A, x \in O_x, O_x \cap O_A = \emptyset$.

Definition 2.10. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. X heißt *vollständig regulär*, wenn es zu jedem $a \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $F \subset X$ mit $a \notin F$ eine stetige Funktion $f \colon X \to [0, 1]$ gibt mit $f(a) = 0$ und $f|_F \equiv 1$.

Satz 2.11. *Jeder vollständig reguläre Raum ist regulär.*

Definition 2.12. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *normal*, wenn sich abgeschlossene Mengen A, B trennen lassen, das heißt es existiert O_A, $O_B \in \mathcal{T} \colon A \subset O_A, B \subset O_B, O_B \cap O_A = \emptyset$.

Definition 2.13. X heißt *lokal-kompakt*, wenn jedes $a \in X$ eine kompakte Umgebung hat.

Satz 2.14. *Jeder normale Hausdorff-Raum ist vollständig regulär.*

Satz 2.15. *Jeder lokal-kompakte Hausdorff-Raum ist vollständig regulär.*

3 Der Darstellungssatz von Riesz in vollständig regulären Räumen

Für den ganzen Abschnitt gelten folgende **Bezeichnungen:**
Es seien X ein topologischer Raum, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{O}$ das System der kompakten bzw. offenen Mengen und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von X, also die kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{O}$ enthält. Ferner seien $C(X)$ der Raum der stetigen Funktionen $f \colon X \to \mathbb{K}$, $C_b(X)$ der Raum der beschränkten Funktionen aus $C(X)$ und $C^+(X)$ bzw. $C_b^+(X)$ die Menge

der nicht-negativen Elemente von $C(X)$ bzw. $C_b(X)$. Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ den Skalarkörper und χ_A ist die Indikatorfunktion auf A.

Zunächst werden einige Eigenschaften von Maßen definiert.

Definition 3.1. Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ eine σ-Algebra und $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ein Maß.

(a) μ heißt *lokal endlich*, wenn zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x existiert mit $\mu(U) < \infty$. Ein lokal endliches Maß $\mu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ heißt ein *Borel-Maß*.

(b) Eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ heißt *von innen regulär*, falls

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset A, K \in \mathfrak{K}\},$$

und μ heißt *von innen regulär*, wenn alle $A \in \mathfrak{A}$ von innen regulär sind.

(c) Eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ heißt *von außen regulär*, falls

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U)\colon U \supset A, U \in \mathfrak{O}\},$$

und μ heißt *von außen regulär*, wenn alle $A \in \mathfrak{A}$ von außen regulär sind.

(d) Eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ heißt *regulär*, wenn sie von innen und außen regulär ist. Sind alle $A \in \mathfrak{A}$ regulär, so nennt man μ *regulär*.

(e) Ein von innen reguläres Borel-Maß heißt ein *Radon-Maß*.

Es gilt als Folgerung der Definition 3.1:

Lemma 3.2. *Es seien $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ eine σ-Algebra und $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ein Maß.*

(a) Ist μ lokal-endlich, so hat jedes $K \in \mathfrak{K}$ eine offene Umgebung U mit $\mu(U) < \infty$. Insbesondere ist $\mu(K) < \infty$ für alle $K \in \mathfrak{K}$.

(b) Jedes endliche Radon-Maß ist regulär.

(c) Ist μ ein Radon-Maß, so ist jedes $K \in \mathfrak{K}$ von außen regulär.

Beweis. *(a)* Ist $K \in \mathfrak{K}$, so hat jedes $x \in K$ eine offene Umgebung U_x mit $\mu(U_x) < \infty$, da μ lokal-endlich ist. Da K kompakt ist, wird K von endlich vielen U_x überdeckt, also

$$\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{i \in I} U_{x_i}\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(U_{x_i}) < \infty,$$

mit $x_i \in K$ für alle $i \in I$ und $|I|$ ist endlich.
(b) Sei $A \in \mathfrak{B}$. Da μ ein Radon-Maß ist, ist A^c von innen regulär, das heißt, für alle

$\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \subset A^c$ mit $\mu(A^c) - \mu(K) \leq \varepsilon$. Nun ist $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$, also gilt $\mu(X \backslash K) - \mu(A) \leq \varepsilon$ und $X \backslash K$ ist eine offene Umgebung von A. Also ist A von außen regulär. Damit ist jedes $A \in \mathfrak{B}$ regulär.
(c) Wegen *(a)* gilt, dass K eine offene Umgebung U mit $\mu(U) < \infty$ besitzt. Da μ von innen regulär ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $L \subset U \backslash K$ mit $\mu(L) \geq \mu(U \backslash K) - \varepsilon$. Nun ist $V := U \backslash L$ eine offene Umgebung von K mit

$$\mu(V) = \mu(U) - \mu(L) \leq \mu(U) - \mu(U \backslash K) + \varepsilon = \mu(K) + \varepsilon.$$

Somit gilt $\mu(K) = \inf\{\mu(V) \colon V \supset K, V \in \mathfrak{O}\}$, was zu zeigen war. □

Folgendes Lemma wird später in Beweisen nützlich sein.

Lemma 3.3. *Es seien X ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum, $K \subset X$ kompakt und U eine offene Umgebung von K. Dann existiert eine stetige Funtkion $\varphi \colon X \to [0, 1]$ mit $\varphi|_K = 1, \varphi|_{U^c} = 0$.*

Beweis. Da X vollständig regulär ist, existiert zu jedem $x \in K$ ein stetiges $\varphi_x \colon X \to [0, 1]$ mit $\varphi_x(x) = 1$, $\varphi_x|_{U^c} = 0$ (da U eine offene Umgebung von K ist, kann dasselbe U für alle $x \in K$ verwendet werden). Die Mengen $V_x := \{x \in X \colon \varphi_x > \frac{1}{2}\}$ bilden eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$ so dass $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ bereits ganz K überdecken. Die Funtkion $\psi := \max(2\varphi_{x_1}, \ldots, 2\varphi_{x_n})$ ist stetig auf X mit $\psi|_K > 1$, $\psi|_{U^c} = 0$. Daher leistet $\varphi := \min(\psi, 1)$ das Verlangte. □

Bemerkung: φ ist beschränkt.

Definition 3.4. Eine Linearform $I \colon C_b(X) \to \mathbb{K}$ ist *positiv*, wenn $I(f) \geq 0$ für alle $f \in C_b^+(X)$.

Fragestellung: Ist eine positive Linearformen $I \colon C_b(X) \to \mathbb{K}$ durch ein Radon-Maß darstellbar?
Gesucht wird also ein Radon-Maß μ, das I darstellt gemäß

$$I(f) = \int_X f \, d\mu, \; f \in C_b(X). \tag{1}$$

Lemma 3.5. *Angenommen es existiert ein Radon-Maß μ, das (1) erfüllt, so ist dieses eindeutig.*

Beweis. Zu zeigen: Unter der Voraussetzung der Darstellbarkeit von I existiert nur ein darstellendes Radon-Maß μ. Es sei μ ein Radon-Maß auf $\mathfrak{B}$ mit (1). Es wird $\mu(K) = \inf\{I(f) \colon f \in C_b(X), f \geq \chi_K\}$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ bewiesen um die Eindeutigkeit zu zeigen. Da für jedes $K \in \mathfrak{K}$ und $f \in C_b(X)$ mit $f \geq \chi_K$ offenbar $I(f) \geq \mu(K)$ ist, gilt $\mu(K) \leq \inf\{I(f) \colon f \in C_c(X), f \geq \chi_K\}$. Es bleibt „$\geq$“ zu zeigen. Dazu seien $K \in \mathfrak{K}$,

$\varepsilon > 0$. Nach Lemma 3.2 *(c)* gibt es eine offene Umgebung U von K mit $\mu(U) \leq \mu(K)+\varepsilon$, und nach Lemma 3.3 existiert ein $f \in C_b(X)$ mit $\chi_K \leq f \leq \chi_U$. Nun folgt:

$$I(f) = \int_X f \, d\mu \leq \int_X \chi_U \, d\mu = \mu(U) \leq \mu(K) + \varepsilon,$$

und da $\varepsilon > 0$ und $f \in C_b(X)$ beliebig war, folgt $\mu(K) \geq \inf\{I(f) \colon f \in C_c(X), f \geq \chi_K\}$. Also ist $\mu(K) = \inf\{I(f) \colon f \in C_b(X), f \geq \chi_K\}$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ bewiesen.
Somit ist μ auf $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt und, da alle $A \in \mathfrak{B}$ von innen regulär sind, ist μ eindeutig. $\square$

Es bleibt die Frage der Existenz eines Radon-Maßes μ für die gegebene Linearform I zu diskutieren. Dazu wird der Ansatz

$$\mu_0(K) := \inf\{I(f) \colon f \in C_b(X), f \geq \chi_K\} \textit{ für alle } K \in \mathfrak{K} \tag{2}$$

verwendet.

Es folgen einige grundlegende Eigenschaften von μ_0:

Lemma 3.6. *Es seien X ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum, $I \colon C_b(X) \to \mathbb{K}$ eine positive Linearform, und μ_0 sei gemäß (2) definiert. Dann gilt:*

(K.1) $0 \leq \mu_0(K) \leq \mu_0(L) < \infty$ *für alle $K, L \in \mathfrak{K}$ mit $K \subset L$.*

(K.2) $\mu_0(K \cup L) \leq \mu_0(K) + \mu_0(L)$ *für alle $K, L \in \mathfrak{K}$.*

(K.3) $\mu_0(K \cup L) = \mu_0(K) + \mu_0(L)$ *für alle $K, L \in \mathfrak{K}$ mit $K \cap L = \emptyset$.*

(KO) Zu jedem $K \in \mathfrak{K}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung U von K so dass für alle kompakten $L \subset U$ gilt:

$$\mu_0(L) \leq \mu_0(K) + \varepsilon.$$

Beweis. (K.1) Zunächst gilt, dass aufgrund der Positivität von I auch $\mu_0 \geq 0$ ist. Die Endlichkeit folgt, da I nach $\mathbb{K}$ abbildet. Nach Lemma 3.3 existiert ein $f \in C_b(X)$ mit $f \geq \chi_L$. Genauso gilt es existiert ein $g \in C_b(X)$ mit $g \geq \chi_K$. Da für alle $h \in C_b(X)$, die $h \geq \chi_L$ erfüllen, auch $h \geq \chi_K$ gilt, ist $\inf\{I(h) \colon h \in C_b(X), h \geq \chi_K\} \leq \inf\{I(h) \colon h \in C_b(X), h \geq \chi_L\}$ und die Behauptung folgt.
(K.2) Sind f, $g \in C_b(X)$, $f \geq \chi_L$, $g \geq \chi_K$, so ist $f + g \in C_b(X)$ und $f + g \geq \chi_L + \chi_K \geq \chi_{K \cup L}$, also

$$\mu_0(K \cup L) \leq I(f + g) = I(f) + I(g),$$

wobei das Ungleichheitszeichen wegen der Definition von μ_0 gilt und die Gleichheit, da I linear ist. Da die Ungleichung für alle f, g gilt, ist sie auch für das Infimum gültig,

woraus die Behauptung folgt.
(K.3) Wegen *(K.2)* ist nur noch „$\geq$" zu zeigen. Dazu sei $h \in C_b(X)$ mit $h \geq \chi_{K \cup L}$. Offenbar ist $U := L^c$ eine offene Umgebung von K, und nach Lemma 3.3 existiert ein stetiges $\varphi\colon X \to [0,1]$ mit $\varphi|_K = 1$, $\varphi|_{U^c} = \varphi|_L = 0$. Nun liegen $f := h\varphi$ (also $f(x) := h(x) \cdot \varphi(x)$, wobei $\cdot$ die Multiplikation in $\mathbb{K}$ ist), $g := h(1-\varphi)$ (also $g(x) = h(x) \cdot (1 - \varphi(x))$ in $C_b(X)$, $f \geq \chi_K$, $g \geq \chi_L$, $f + g = h$, und es folgt:

$$I(h) = I(f) + I(g) \geq \mu_0(K) + \mu_0(L).$$

Da die Ungleichung für beliebige $h \in C_b(X)$ mit $h \geq \chi_{K \cup L}$ gilt, ist sie auch für das Infimum gültig und es folgt $\mu_0(K \cup L) \geq \mu_0(K) + \mu_0(L)$.
(KO) Laut Definition von μ_0 existiert zu jedem $K \in \mathfrak{K}$ und zu jedem $\delta > 0$ ein $f \in C_b(X)$ mit $f \geq \chi_K$ und $I(f) \leq \mu_0(K) + \delta$. Offenbar ist $U := \{x \in X\colon f(x) > \frac{1}{1+\delta}\}$ eine offene Umgebung von K. Für jedes kompakte $L \subset U$ ist $(1+\delta)f \geq \chi_L$ und daher

$$\mu_0(L) \leq I((1+\delta)f) = (1+\delta)I(f) \leq (1+\delta)(\mu_0(K)+\delta) = \mu_0(K) + \delta(\mu_0(K)+\delta+1).$$

Durch Wahl von δ so klein, dass $\delta(\mu_0(K)+\delta+1) < \varepsilon$ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Folgendes Lemma besagt, dass μ_0 eine Straffheitsbedingung erfüllt:

Lemma 3.7. *Es seien X ein Hausdorff-Raum und $\mu_0\colon \mathfrak{K} \to [0,\infty)$ eine Mengenfunktion mit den Eigenschaften (K.1)-(K.3), (KO) aus Lemma 3.6. Dann genügt μ_0 folgender Straffheitsbedingung:*
(S) Für alle $K, L \in \mathfrak{K}$ mit $K \subset L$ ist

$$\mu_0(L) - \mu_0(K) = \sup\{\mu_0(C)\colon C \subset L \backslash K, C \in \mathfrak{K}\}.$$

Beweis. Für alle kompakten Mengen $C \subset L\backslash K$ ist $K \cup C \subset L$, $K \cap C = \emptyset$, also $\mu_0(K) + \mu_0(C) = \mu_0(K \cup C) \leq \mu_0(L)$, nach *(K.3)* und *(K.1)*. Somit ist $\mu_0(L) - \mu_0(K) \geq \mu_0(C)$ für alle kompakten C, also gilt die Ungleichung auch für das Supremum. Daher braucht für *(S)* nur noch „$\leq$" bewiesen zu werden.
Dazu sei $\varepsilon > 0$. Wegen *(KO)* existiert eine offene Umgebung U von K, so dass

$$\mu_0(H) \leq \mu_0(K) + \varepsilon \text{ für alle } H \subset U, H \in \mathfrak{K}. \tag{3}$$

Nun ist $L \subset K^c \cup U$, wobei K^c, U offen sind.
Zunächst wird gezeigt, dass kompakte Mengen $C \subset K^c$, $D \subset U$ existieren, so dass $C \cup D = L$.
Die Mengen $L\backslash K^c = K$ und $L\backslash U$ sind disjunkte kompakte Mengen im Hausdorff-Raum, haben also disjunkte offene Umgebungen V, W:

$$K \subset V, L\backslash U \subset W, V \cap W = \emptyset.$$

Nun sind $C := L\backslash V$, $D := L\backslash W$ kompakt, $C \subset L\backslash K \subset K^c$, $D \subset U$,

$$C \cup D = (L\backslash V) \cup (L\backslash W) = L\backslash(V \cap W) = L,$$

also leisten C, D das Verlangte.
Mit den Mengen C, D von vorher ist nun $\mu_0(L) = \mu_0(C \cup D) \leq \mu_0(C) + \mu_0(D)$ aufgrund von *(K.2)*. Also folgt

$$\sup\{\mu_0(\hat{C})\colon \hat{C} \subset L\backslash K,\, \hat{C} \in \mathfrak{K}\} \geq \mu_0(C) \geq \mu_0(L) - \mu_0(D) \geq \mu_0(L) - \mu_0(K) - \varepsilon,$$

da D Ungleichung (3) erfüllt. Da ε beliebig war, gilt die Ungleichung „$\leq$“ in *(S)*. $\square$

Satz 3.8. ***Fortsetzungssatz***. *Es seien X ein Hausdorff-Raum und $\mu_0\colon \mathfrak{K} \to [0, \infty)$ eine Mengenfunktion mit der Eigenschaft (S). Dann gestattet μ_0 genau eine Fortsetzung zu einem von innen regulären Maß $\mu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty]$, und zwar gilt für alle $A \in \mathfrak{B}$*

$$\mu(A) = \sup\{\mu_0(K)\colon K \subset A, K \in \mathfrak{K}\} \tag{4}$$

Beweis. In 1., Seite 332. $\square$

Mit diesem Satz folgt: μ_0 lässt sich zu einem von innen regulären Maß $\mu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ fortsetzen und

$$\mu(A) = \sup\{\mu_0(K)\colon K \subset A, K \in \mathfrak{K}\} \text{ für alle } A \in \mathfrak{B}. \tag{5}$$

Dieses Maß μ ist endlich, denn für jedes $K \in \mathfrak{K}$ ist $\mu_0(K) \leq I(\chi_X)$. Also ist nach (5) $\mu(X) \leq I(\chi_X) < \infty$, da I nach $\mathbb{K}$ abbildet.

Zusammenfassung der bisherigen Resultate: Zu jeder positiven Linearform $I\colon C_b(X) \to \mathbb{K}$ existiert gemäß (2), (5) ein endliches Radon-Maß $\mu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty)$.
In Satz 3.10 wird gezeigt, dass unter geeigneten Zusatzbedingungen dieses Maß μ die Linearform I im Sinn von (1) darstellt.

Lemma 3.9. *Es seien X ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum, $I : C_b(X) \to \mathbb{K}$ eine positive Linearform und μ das durch (2), (5) definierte endliche Radon-Maß auf $\mathfrak{B}$. Dann ist $C_b(X) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt:*

$$\int_X f\,d\mu \leq I(f) \text{ für alle } f \in C_b^+(X) \tag{6}$$

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für alle $f \in C_b^+(X)$ $\int_X f\,d\mu \leq I(f)$ gilt. Sei $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{B}$ disjunkt, eine nicht-negative Treppenfuntktion mit $u \leq f$. Alle A_j, $j = 1, \ldots, m$, haben wegen der Endlichkeit von μ endliches Maß. Zu vorgegebenem $0 < \varepsilon < \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ existieren daher kompakte $K_j \subset A_j$ mit $\mu(A_j) - \varepsilon \leq \mu(K_j)$, aufgrund der Definition von μ. Die disjunkten kompakten K_j haben disjunkte offene Umgebungen U_j, $j = 1, \ldots, m$, da X ein Hausdorff-Raum ist. U_j kann als Teilmenge der offenen Umgebung $\{x \in X \colon f(x) > \alpha_j - \varepsilon\}$ von K_j gewählt werden. Zu jedem $j = 1, \ldots, m$ existiert wegen Lemma 3.3 ein $\varphi_j \in C_b(X)$ mit $\chi_{K_j} \le \varphi_j \le \chi_{U_j}$. Dann ist

$$g := \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \varepsilon)\varphi_j \in C_b^+(X), \text{ und } g \le f \text{ (aufgrund der Konstruktion).}$$

Da I monoton ist, gilt

$$I(f) \ge I(g) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \varepsilon) I(\varphi_j) \ge \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \varepsilon)\mu(K_j) \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \varepsilon)(\mu(A_j) - \varepsilon) = \int_X u \, d\mu - \varepsilon \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \mu(A_j) - \varepsilon).$$

Da die Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gültig ist, folgt $\int_X u \, d\mu \le I(f)$ für alle Treppenfunktionen $u \le f$. Also gilt es auch für eine Folge von Treppenfunkionen $u_n \to f$, $n \to \infty$, womit $\int_X f \, d\mu \le I(f)$. Somit ist die Behauptung gezeigt.
Es gilt also für alle $f \in C_b^+(X)$, dass $\int_X f \, d\mu < \infty$, das heißt $C_b^+(X) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Da f in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegt genau dann, wenn $\int_X |f| \, d\mu < \infty$ ist, gilt $C_b(X) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. □

Satz 3.10. ***Darstellungssatz von Riesz für*** $C_b(X)$. *Es seien X ein vollständig regulärerer Hausdorff-Raum, $I : C_b(X) \to \mathbb{K}$ eine positive Linearform und μ das durch (2), (5) definierte endliche Radon-Maß. Dann ist $C_b(X) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, und folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) I wird durch μ dargestellt gemäß

$$I(f) = \int_X f \, d\mu \text{ für alle } f \in C_b(X). \tag{7}$$

(b) $\mu(X) = I(\chi_X)$.

(c) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathfrak{K}$, so dass $I(f) < \varepsilon$ für alle $f \in C_b(X)$ mit $0 \le f \le 1$, $f|_K = 0$.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist μ das eindeutige Radon-Maß auf $\mathfrak{B}$ mit (7).

Beweis. *(a) ⇒ (b)*: Setze $f = \chi_X$ in (7).
(b) ⇒ (a): Es genügt (7) für $0 \le f \le 1$ zu zeigen, da wenn $f(X) \subseteq [a, b]$ durch $\tilde{f}(x) = \frac{f(x) - a}{b - a}$ der Bildbereich von $\tilde{f}$ im Intervall $[0, 1]$ enthalten ist. Nach Lemma 3.9 ist $C_b(X) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt (6). Für die andere Richtung wendet man (6) auf $\chi_X - f \in C_b^+(X)$ an und erhält

$$\mu(X) - \int_X f \, d\mu = \int_X (\chi_X - f) \, d\mu \le I(\chi_X - f) = I(\chi_X) - I(f).$$

Aufgrund von *(b)* folgt $I(f) \leq \int_X f\,d\mu$, und somit folgt *(a)*.
(b) $\Rightarrow$ *(c)*: Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Definition von μ gibt es ein $K \in \mathfrak{K}$ mit $\mu(K) > \mu(X)-\varepsilon$. Für $f \in C_b(X)$, $0 \leq f \leq 1$, $f|_K = 0$, gilt gemäß *(b)* $\mu(X)-I(f) = I(\chi_X - f) \geq \mu(K) > \mu(X) - \varepsilon$, wobei das erste Ungleichheitszeichen aufgrund der Definition von μ gilt, also $I(f) < \varepsilon$.
(c) $\Rightarrow$ *(b)*: Nach (6) ist $\mu(X) \leq I(\chi_X)$, so dass nur noch „$\geq$“ zu zeigen ist. Dazu seien $\varepsilon > 0$ und $K \in \mathfrak{K}$ zu ε gemäß *(c)* bestimmt. Sei nun $g \in C_b^+(X)$, $0 \leq g \leq 1$, $g|_K = 1$, so dass $I(g) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Dann ist nach *(c)*

$$I(\chi_X) = I(g) + I(\chi_X - g) \leq \mu(K) + 2\varepsilon \leq \mu(X) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.
Eindeutigkeit: siehe Lemma 3.5. □

Satz 3.10 gilt sinngemäß auch für Linearformen I auf ganz $C(X)$. Diese Aussage ist Thema von Satz 3.12

Lemma 3.11. *Sind X ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum, $I\colon C(X) \to \mathbb{K}$ eine positive Linearform, $f \in C^+(X)$ und $f_n := \min(n, f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $I(f) = I(f_n)$ für alle $n \geq n_0$. Sind insesondere $I, J\colon C(X) \to \mathbb{K}$ zwei positive Linearformen, die auf $C_b(X)$ übereinstimmen, so ist $I = J$.*

Beweis. Für jede Wahl reeller $\lambda_n > 0$ gilt $g := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f - f_n) \in C^+(X)$. g existiert da die Reihe lokal endlich ist (da für alle $x \in X$ ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f(x) \leq M$ in einer Umgebung von $x \Rightarrow f - f_n = 0$ in der Umgebung von x für alle $n \geq M$). Aus $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n(f - f_n) \leq g$ folgt $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n(I(f) - I(f_n)) \leq I(g)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ (und es gilt $I(f) - I(f_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$), deshalb konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(I(f) - I(f_n))$. Insbesondere gilt $\lambda_n(I(f) - I(f_n)) \to 0$ für $n \to \infty$. Da λ_n beliebig war, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I(f) = I(f_n)$ für alle $n \geq n_0$.
Die zweite Behauptung folgt, da $I(h) = I(h_n) = J(h_n) = J(h)$, $h \in C(X)$, $h_n \in C_b(X)$. □

Bemerkung: f_n ist beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.12. *Darstellungssatz von Riesz für* $C(X)$. *Ist X ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum, so gilt der Darstellungssatz 3.10 entsprechend für positive Linearformen $I\colon C(X) \to \mathbb{K}$, wenn man überall $C_b(X)$ durch $C(X)$ ersetzt.*

Beweis. Zur Einschränkung $I|_{C_b(X)}$ gehört ein endliches Radon-Maß μ gemäß (2), (5) und nach Lemma 3.9 gilt (6). Es gilt sogar

$$\int_X f\,d\mu \leq I(f) \text{ für alle } f \in C^+(X).$$

Dazu seien $f \in C^+(X)$, $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in Lemma 3.11 und $f_n := \min(n, f)$. Es gilt

$$\int_X f_n \, d\mu \leq I(f_n) = I(f) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Da f_n eine monoton steigende Folge von Funktionen ist, die gegen f konvergiert, gilt mit dem Satz der monotonen Konvergenz

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq I(f).$$

Insbesondere folgt $C(X) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Zum Beweis ist noch zu zeigen, dass aus (7)

$$I(f) = \int_X f \, d\mu, \; f \in C(X)$$

folgt. Dazu wird f zuerst in den Positvteil $f^+ := \max\{f, 0\}$ und den Negativteil $f^- := \max\{-f, 0\}$ zerlegt. Es gilt $f = f^+ - f^-$ und insbesondere $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$. Da f^+ und f^- in $C^+(X)$ liegen kann Lemma 3.11 angewendet werden und es gilt

$$I(f^+) = I(f_n^+) = \int_X f_n^+ \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu \text{ für alle } n \geq \max\{n_0^+, m^+\}$$

wobei n_0^+ wie in Lemma 3.11 für f^+ gewählt wird und aufgrund der monotonen Konvergenz für jedes $\varepsilon > 0$ ein m^+ existiert, sodass $\left|\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f_n^+ \, d\mu\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m^+$. Analog existieren n_0^- und m^-, sodass

$$I(f^-) = I(f_n^-) = \int_X f_n^- \, d\mu = \int_X f^- \, d\mu \text{ für alle } n \geq \max\{n_0^-, m^-\}.$$

Daraus folgt

$$I(f) = I(f^+) - I(f^-) = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Eindeutigkeit folgt, da wenn $J(f) := \int_X f \, d\mu$, $f \in C(X)$ eine weitere Linearform ist, gilt aufgrund der Eindeutigkeit auf $C_b(X)$ aus Satz 3.10 $I = J$ auf $C_b(X)$. Mit Lemma 3.11 folgt nun $I = J$ auf $C(X)$. □

4 Literatur

1. Elstrodt, Jürgen. Maß-und Integrationstheorie. 2010. Springer.

2. Kaltenbäck, Michael. Analysis 2 (Vorlesungsskriptum).

3. Kaltenbäck, Michael. Analysis 3 (Vorlesungsskriptum).