Seminararbeit aus Analysis

TU Wien - WS 2009/10

Invariante Maße auf eingebetteten Lie-Gruppen

Raphael Pruckner

21.06.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Das Haarsche Maß auf lokalkompakten topologischen Gruppen

Definition 1.1 (topologische Gruppe)**.** Ein Paar $(G, \mathcal{T})$, bestehend aus einer Gruppe $(G, \cdot)$ und einer Topologie $\mathcal{T}$auf G, heißt *topologische Gruppe*, falls

- die Inversenbildung $(.)^{-1} : x \mapsto x^{-1}$, $G \to G$ und
- die Gruppenmultiplikation $\cdot : (x, y) \mapsto xy$, $G \times G \to G$

stetig Abbildungen sind, wobei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen wird.

Eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T})$ heißt *lokalkompakt*, falls der topologische Raum $(G, \mathcal{T})$ lokalkompakt ist. Eine lokalkompakte topologische Gruppe wollen wir im Folgenden auch kurz eine *lokalkompakte Gruppe* nennen und des Weiteren setzen wir stets voraus, dass $(G, \mathcal{T})$ Hausdorffsch ist.

Definition 1.2. Ein Maß μ auf einer topologischen Gruppe (genauer, auf dem Messraum $(G, \mathfrak{B}(G))$ wobei $\mathfrak{B}(G) = A_\sigma(\mathcal{T})$) heißt linksinvariant, falls $\mu(B) = \mu(sB)$ für alle $B \in \mathfrak{B}(G)$ und für alle $s \in G$.

Folgenden tiefliegenden Satz über die Existenz und Eindeutigkeit eines speziellen Maßes wollen wir ohne den langen Beweis importieren. Für Interessierte sei auf [1, Kapitel VIII, §3, 3.], oder auch auf [2] verwiesen.

Satz 1.3. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe. So existiert immer ein linksinvariantes, positives, nicht verschwindendes, Riesz-reguläres Borelmaß $\mu : \mathfrak{B}(G) \to [0, +\infty]$, das sogenannte linke Haarsche Maß oder kurz linke Haarmaß.*
Es ist bis auf eine multiplikative, positive Konstante eindeutig.

Bemerkung 1.4. Statt linksinvarianten Maßen können wir auch rechtsinvariante Maße betrachten. Dass sich die Theorie dabei nicht ändert, gewährleistet uns folgende einfach zu beweisende Beobachtung:

> *Ist μ ein linksinvariantes (rechtsinvariantes), positives, Riesz-reguläres Borelmaß, so ist $\widehat{\mu}$ ein rechtsinvariantes (linksinvariantes), positives, Riesz-reguläres Borelmaß, wobei $\widehat{\mu}(B) := \mu(B^{-1})$, $B \in \mathfrak{B}(G)$.*

Wir können uns also getrost auf die Linksinvarianz beschränken. In einer abelschen topologischen Gruppe sind diese Begriffe klarerweise äquivalent.

Beispiel. Betrachten wir die Gruppe $(\mathbb{R}^p, +)$. Versieht man den $\mathbb{R}^p$ mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{E}^p$ so wird $(\mathbb{R}^p, \mathcal{E}^p)$ offensichtlich zu einer lokalkompakten Gruppe. Laut Satz 1.3 existiert also ein, bis auf eine multiplikative Konstante eindeutiges, linkes Haarsches Maß μ welches insbesondere $\mu(B) = \mu(s + B)$ für alle $s \in \mathbb{R}^p$ und für alle $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p) = \mathfrak{B}_p$ erfüllt.

In der Maßtheorie haben wir schon ein spezielles Maß auf $(\mathbb{R}^p, \mathcal{E}^p)$ kennengelernt, das Lebesgue-Maß λ_p. Wir haben gesehen, dass für je zwei translationsinvariante, nicht verschwindende Maße ν_1, ν_2 auf $\mathfrak{B}_p$ bereits $\nu_1 = c\nu_2$, $c > 0$ gilt. Das Lebesgue-Maß haben wir aus jenen durch die Normierungsbedingung $\lambda_p\left((0,1]^p\right) = 1$ eindeutig bestimmt.

Wir sehen also, dass in diesem Fall das linke Haarmaß genau (bis auf multiplikative Konstanten) das Lebesgue-Maß λ_p ist. Satz 1.3 kann also als Verallgemeinerung der Tatsache angesehen werden, dass es auf $\mathfrak{B}_p$ ein ausgezeichnetes Maß λ_p gibt.

Beispiel. Versieht man die Gruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot\,)$ mit der Spurtopologie der euklidischen Topologie, so erhält man, wie man sich leicht überzeugt, wiederum eine lokalkompakte Gruppe. Hier ist es ad hoc nicht offensichtlich wie das linke Haarmaß, dessen Existenz aus Satz 1.3 folgt, aussieht.

Das nächste Lemma gibt, in einem Spezialfall, eine konkrete Darstellung des Haarschen Maßes, nämlich die Dichtefunktion bezüglich des Lebesgue-Maßes, an.

Lemma 1.5. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen ist für ein gewisses $p \in \mathbb{N}$, und die Topologie genau die Spurtopologie der euklidischen Topologie, $\mathcal{T} = \mathcal{E}^p|_G$ ist. Des Weiteren sei die Gruppenmultiplikation $\cdot : (x,y) \mapsto xy$ als Abbildung zwischen den offenen Mengen $G \times G \to G$ stetig differenzierbar. Dann ist $(B \in \mathfrak{B}(G))$*

$$\mu : B \mapsto \int_B \frac{1}{|\det dl_t(e)|} d\lambda_p(t),$$

ein linkes Haarmaß, dabei ist $l_x : y \mapsto xy, G \to G$ ein Diffeomorphismus, und $x \mapsto dl_x(e), G \to \mathbb{R}^{p \times p}$ stetig.
Entsprechend ist

$$\mu : B \mapsto \int_B \frac{1}{|\det dr_t(e)|} d\lambda_p(t),$$

ein rechtes Haarmaß, wobei $r_x : y \mapsto yx$.

Beweis. Wegen $l_x(y_1) = l_x(y_2) \Rightarrow xy_1 = xy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ ist die Abbildung l_x injektiv und weil für jedes $y \in G$ $l_x(x^{-1}y) = y$ ist sie auch surjektiv, also bijektiv.

Nun gilt offensichtlich $l_x = \cdot \circ \pi_x$ mit $\pi_x : y \mapsto (x,y), G \to G \times G$ und somit ist l_x als Zusammensetzung von (laut Voraussetzung) stetig differenzierbarer Funktionen wieder stetig differenzierbar für jedes beliebiges $x \in G$. Aufgrund von $(l_x)^{-1} = l_{x^{-1}}$ folgt schon, dass die Abbildung l_x für jedes $x \in G$ ein Diffeomorphismus ist. Klarerweise ist damit die $p \times p$ Matrix $dl_x(t)$ für alle $t \in G$ regulär, d.h. $\det dl_x(t) \neq 0$

Genauso sieht man, dass $x \mapsto l_x(t)$ als Zusammensetzung zweier stetig differenzierbarer Funktionen wieder stetig differenzierbar ist, und deshalb ist $x \mapsto dl_x(t)$ für alle $t \in G$ stetig. Weil $\det : A \mapsto \det A, \mathbb{R}^{p \times p} \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $x \mapsto \det dl_t(e)$ stetig und bildet nie auf Null ab. Damit ergibt sich die Stetigkeit von $x \mapsto |\det dl_t(e)|$ und schließlich die von $x \mapsto \frac{1}{|\det dl_t(e)|}$.

Folglich ist die angegebene Dichtefunktion positiv und messbar. Aus der Maßtheorie wissen wir, dass μ ein Maß ist.

Offensichtlich gilt $l_{x_1 x_2} = l_{x_1} \circ l_{x_2}$ und mit der Kettenregel $d(l_{st})(e) = d(l_s \circ l_t)(e) = d(l_s)(t) d(l_t)(e)$. Nun gilt für ein messbares $f : G \to \mathbb{R}$ und ein $s \in G$ wegen der Transformationsregel angewandt auf den Diffeomorphismus $l_s : G \to G$

$$\int_G f(t) \cdot \frac{1}{|\det dl_t(e)|}\, d\lambda_p(t) = \int_G f(st) \cdot \frac{1}{|\det dl_{st}(e)|} \cdot |\det dl_s(t)|\, d\lambda_p(t) =$$

$$= \int_G f(st) \cdot \frac{1}{|\det dl_s(t)| \cdot |\det dl_t(e)|} |\det dl_s(t)| \, d\lambda_p(t) = \int_G f(st) \cdot \frac{1}{|\det dl_t(e)|} \, d\lambda_p(t).$$

Wählt man nun speziell $f = \mathbb{1}_B$ für ein beliebiges $B \in \mathfrak{B}(G)$, so erhält man $\mu(B) = \mu(s^{-1}B)$ für alle $s \in G$, also die Linksinvarianz von μ.

Genauso zeigt man die Rechtsinvarianz des anderen Maßes. □

Beispiel. Betrachte die lokalkompakte Gruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Klarerweise ist $(x, y) \mapsto xy$ stetig differenzierbar und auch alle anderen Bedingungen in Lemma 1.5 sind erfüllt. Für die Abbildung $l_t : y \mapsto ty$ gilt $dl_t(y) = t$. Demnach ist $\mu : B \mapsto \int_B \frac{1}{t} \, d\lambda(t)$ für $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+)$ das Haarsche Maß auf $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

Ziel dieser Seminararbeit ist es Lemma 1.5 zu verallgemeinern. Statt der Forderung, dass die lokalkompakte Gruppe $(G, \mathcal{T})$ eine offene Teilmenge eines gewissen $\mathbb{R}^p$ ist, werden wir nur verlangen, dass es sich um eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, mit gewissen Eigenschaften, handelt. Wir werden sehen, dass unter diesen Voraussetzungen ein sehr ähnliches Resultat (Satz 2.18) gilt.

2 Das Haarsche Maß auf eingebetteten Lie-Gruppen

2.1 Über stetig differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Damit sichergestellt ist, dass wir von denselben Begriffen reden, möchte ich folgende Definitionen angeben.

Definition 2.1. Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt *d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$* $(0 < d \leq p)$, falls es zu jedem $x \in M$ eine d-dimensionale Einbettung $\phi : D \to M$ mit $x \in \phi(D)$ gibt.

Definition 2.2. Für $M \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, heißt eine Abbildung $\phi : D \to M$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $0 < d \leq p$ eine d-dimensionale *Einbettung* in M, wenn

- $\emptyset \neq D$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist,
- $\phi(D)$ offene Teilmenge von M bezgl. der Spurtopologie ist, dh. $\phi(D) = M \cap U$ für eine in $\mathbb{R}^p$ offene Teilmenge U,
- $\phi : D \to \phi(D)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $\phi(D)$ mit der Spurtopologie versehen wird,
- ϕ als Abbildung von D nach $\mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar ist,
- $d\phi(s)$ für alle $s \in D$ injektiv ist, d.h. $d\phi(s)$ maximalen Rang d hat

Im Folgenden ist M_i immer eine d_i-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{p_i}$.

Definition 2.3. Eine Funktion $f : M_1 \to M_2$ heißt *stetig differenzierbar*, falls für beliebige Einbettungen $\phi : D \to M_1$ und $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M_2$ die nur $O := (f \circ \phi)^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{D})) \neq \emptyset$ erfüllen, gilt

- $O \subseteq D$ ist offen
- die Abbildung $\tilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O : O \to \tilde{D}$ ist (im klassischen Sinne) stetig differenzierbar

Eine Bijektion $f : M_1 \to M_2$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f und f^{-1} im obigen Sinn stetig differenzierbar sind.

Dieses Korollar wird in den Beweisen nachfolgender Lemmata verwendet. Einen Beweis findet man in [AnaIII, 15.3.3].

Korollar 2.4. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^p$, und seien $\phi_1 : D_1 \to M$ sowie $\phi_2 : D_2 \to M$ zwei d-dimensionale Einbettungen in M mit $\phi_1(D_1) \cap \phi_2(D_2) \neq \emptyset$. Dann ist die Abbildung*

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1|_{B_1} : B_1 \to B_2, \text{ mit } B_j := \phi_j^{-1}(\phi_1(D_1) \cap \phi_2(D_2)),\ j = 1, 2$$

ein Diffeomorphismus von der offenen Menge B_1 ($\subseteq \mathbb{R}^d$) auf die offene Menge B_2 ($\subseteq \mathbb{R}^d$).

Im nächsten Lemma lernen wir eine äquivalente Formulierung von Definition 2.3 kennen.

Lemma 2.5. *Eine Funktion $f : M_1 \to M_2$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn es zu jedem $x \in M_1$ eine Einbettung $\phi_1 : D_1 \to M_1$ mit $x \in \phi_1(D_1)$ und eine Einbettung $\phi_2 : D_2 \to M_2$ mit $f(x) \in \phi_2(D_2)$ gibt, sodass $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2)$ und $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ stetig differenzierbar (im klassischen Sinne) ist.*

Beweis. $\Rightarrow$) Sei f stetig differenzierbar und $x \in M_1$. Wir finden sicherlich Einbettungen $\phi : D \to M_1$ mit $\phi(s) = x$ für ein $s \in D$ und $\phi_2 : D_2 \to M_2$ mit $f(x) \in \phi_2(D_2)$. Weil die Menge $D_1 := O := (f \circ \phi)^{-1}(\phi_2(D_2))$ nicht leer ist, da ja $s \in D_1$, folgt wegen Definition 2.3, dass sie eine offene Teilmenge von D ist, und, dass

$$\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi|_O : O \to D_2 \tag{1}$$

stetig differenzierbar ist. Die Abbildung $\phi_1 := \phi|_{D_1} : D_1 \to M_1$ ist als Einschränkung einer Einbettung auf eine offene Teilmenge des ursprünglichen Definitionsbereichs wieder eine Einbettung, wie man leicht überprüft. Nun gilt klarerweise $f(\phi_1(D_1)) = f(\phi(\phi^{-1}(f^{-1}(\phi_2(D_2))))) = f(f^{-1}(\phi_2(D_2))) \subseteq \phi_2(D_2)$ und in 1 steht bereits die nötige Differenzierbarkeitseigenschaft.

$\Leftarrow$)

Nun gelte die in Lemma 2.5 behauptete Tatsache. Seien uns irgendwelche Einbettungen $\phi : D \to M_1$ und $\widetilde{\phi} : \widetilde{D} \to M_2$ mit $O := (f \circ \phi)^{-1}(\widetilde{\phi}(\widetilde{D})) \neq \emptyset$ gegeben. Wir werden zeigen, dass O eine offene Teilmenge von D ist, und dass $\widetilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O : O \to \widetilde{D}$ stetig differenzierbar ist.

Sei $s \in O$ beliebig und $x := \phi(s)$. Es gibt sicher Einbettungen $\phi_1 : D_1 \to M_1$ mit $x \in \phi_1(D_1)$ und $\phi_2 : D_2 \to M_2$ mit $f(x) \in \phi_2(D_2)$, so dass $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2)$ und so dass $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ stetig differenzierbar ist.

Die Mengen

$$C_1 := \phi_1(D_1) \cap \phi(D) \quad \text{und} \quad C_2 := \phi_2(D_2) \cap \widetilde{\phi}(\widetilde{D})$$

sind als Schnitt zweier offenen Mengen offen in M_1 bzw. M_2, und enthalten x bzw. $f(x)$. Nach Korollar 2.4 sind die beiden Abbildungen

$$\phi_1^{-1} \circ \phi|_{\phi^{-1}(C_1)} : \phi^{-1}(C_1) \to \phi_1^{-1}(C_1), \;\; \phi_2^{-1} \circ \widetilde{\phi}\Big|_{\widetilde{\phi}^{-1}(C_2)} : \widetilde{\phi}^{-1}(C_2) \to \phi_2^{-1}(C_2)$$

Diffeomorphismen, wobei alle 4 Mengen klarerweise offen sind.

Da $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ insbesondere stetig ist, ist das Urbild von der offenen Menge $\phi_2^{-1}(C_2) \subseteq D_2$ unter dieser Abbildung offen in D_1. Außerdem stimmt es mit $(f \circ \phi_1)^{-1}(C_2)$ überein. Damit ist auch $\phi^{-1}(C_1) \cap (f \circ \phi_1)^{-1}(C_2)$ offen in D_1. Da $\phi_1^{-1} \circ \phi|_{\phi^{-1}(C_1)}$ insbesondere ein Homöomorphismus ist, muss auch

$$P := (\phi^{-1} \circ \phi_1)(\phi_1^{-1}(C_1) \cap (f \circ \phi_1)^{-1}(C_2)) = \phi^{-1}(C_1 \cap f^{-1}(C_2))$$

offen in D sein und enthält $s = \phi^{-1}(x)$. Außerdem gilt

$$f(\phi(P)) = f(C_1 \cap f^{-1}(C_2)) \subseteq C_2 \subseteq \widetilde{\phi}(\widetilde{D}).$$

Damit gilt $s \in P \subseteq O$, und $\widetilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O : O \to \widetilde{D}$ eingeschränkt auf P stimmt mit

$$(\phi_2^{-1} \circ \widetilde{\phi})^{-1} \circ \phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 \circ (\phi_1^{-1} \circ \phi)\big|_P$$

überein. Diese Abbildung ist aber, als Zusammensetzung dreier stetig differenzierbarer Abbildungen, lokal bei s stetig differenzierbar. Da $s \in O$ beliebig war, sieht man, dass O als Vereinigung der jeweils offenen Mengen P selber offen ist, und dass $\widetilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O$ auch überall stetig differenzierbar ist. □

Im nächsten Lemma wollen wir uns von einigen grundlegenden Eigenschaften des neuen Begriffes vergewissern.

Lemma 2.6. *Seien $f : M_1 \to M_2$ und $h : M_2 \to M_3$ beliebige stetig differenzierbare Funktionen im Sinne von Definition 2.3, so gilt:*

1. *f ist stetig bezüglich der Spurtopologien, also als Abbildung von $(M_1, \mathcal{E}^{p_1}|_{M_1})$ nach $(M_2, \mathcal{E}^{p_2}|_{M_2})$.*

2. *Die Hintereinanderausführung $h \circ f : M_1 \to M_3$ ist wieder stetig differenzierbar.*

Beweis. ad 1.

Für ein $x \in M_1$ gilt wegen Lemma 2.5, dass $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ stetig differenzierbar im klassischem Sinne, also insbesondere stetig ist, für gewisse Einbettungen $\phi_i : D_i \to M_i \quad i \in \{1, 2\}$. Setzt man diese stetige Funktion mit der ebenfalls stetigen Funktion $\phi_2 : D_2 \to \phi_2(D_2)$ zusammen so erhält man die Stetigkeit von $f \circ \phi_1 : D_1 \to \phi_2(D_2)$. Setzt man ein weiteres Mal mit $\phi_1^{-1} : \phi_1(D_1) \to D_1$ zusammen so folgt, dass $f : \phi_1(D_1) \to \phi_2(D_2)$ stetig ist, wobei $\phi_1(D_1)$ und $\phi_2(D_2)$ jeweils mit der Spurtopologie versehen ist. Daraus folgt elementar die Behauptung.

ad 2.

Zu jedem $x \in M_1$ gibt es, nach Lemma 2.5 angewandt auf f, Einbettungen $\phi_1 : D_1 \to M_1$ mit $x \in \phi_1(D_1)$ und $\phi_2 : D_2 \to M_2$ mit $f(x) \in \phi_2(D_2)$, so dass $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2)$. Das Lemma angewandt auf h liefert die Existenz von Einbettungen $\widetilde{\phi}_2 : \widetilde{D}_2 \to M_2$ mit $f(x) \in \widetilde{\phi}_2(\widetilde{D}_2)$ und $\phi_3 : D_3 \to M_3$ mit $h(f(x)) \in \phi_3(D_3)$, so dass $h(\widetilde{\phi}_2(\widetilde{D}_2)) \subseteq \phi_3(D_3)$. Und zwar so, dass

$$\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2 \quad \text{und} \quad \phi_3^{-1} \circ h \circ \widetilde{\phi}_2 : \widetilde{D}_2 \to D_3$$

stetig differenzierbar sind. Wegen der Stetigkeit von f ist $\phi_1^{-1}(f^{-1}(\widetilde{\phi}_2(\widetilde{D}_2)))$ offen in D_1. Indem wir ϕ_1 auf diese Menge einschränken, können wir o.B.d.A. zusätzlich noch $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \widetilde{\phi}_2(\widetilde{D}_2)$ annehmen. Also gilt sogar

$$f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2) \cap \widetilde{\phi}_2(\widetilde{D}_2) \tag{2}$$

Nach Korollar 2.4 ist

$$\widetilde{\phi}_2^{-1} \circ \phi_2 : B_2 \to \widetilde{B}_2$$

mit $B_2 := \phi_2^{-1}(\phi_2(D_2) \cap \widetilde{\phi}_2(\widetilde{D}_2))$, $\widetilde{B}_2 := \widetilde{\phi}_2^{-1}(\phi_2(D_2) \cap \widetilde{\phi}_2(\widetilde{D}_2))$ ein Diffeomorphismus.

Damit ist diese Abbildung

$$\phi_3^{-1} \circ h \circ \widetilde{\phi}_2 \circ (\widetilde{\phi}_2^{-1} \circ \phi_2) \circ \phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_3$$

wegen (2) wohldefiniert und als Hintereinanderausführung dreier stetig differenzierbarer Abbildungen (im klassischen Sinne) selbst stetig differenzierbar. Außerdem stimmt sie mit $\phi_3^{-1} \circ h \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_3$ überein. Weil auch $h(f(\phi_1(D_1))) \subseteq \phi_3(D_3)$ gilt, haben wir nach Lemma 2.5 gezeigt, dass $h \circ f$ stetig differenzierbar ist.

□

2.2 Eingebettete Lie-Gruppen

Bemerkung 2.7. Behauptung: $M_1 \times M_2$ ist eine $d_1 + d_2$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$.

Um das zu zeigen muss nur bemerkt werden, dass es zu einem $(s,t) \in M_1 \times M_2$ sicherlich Einbettungen $\phi_1 : D_1 \to M_1$ mit $s \in \phi_1(D_1)$ und $\phi_2 : D_2 \to M_2$ mit $t \in \phi_2(D_2)$ gibt. Nun betrachte man die Abbildung $\phi_1 \times \phi_2 : (x,y) \mapsto (\phi_1(x), \phi_2(y)), D_1 \times D_2 \to M_1 \times M_2$. Wie man leicht überprüft ist dies wieder eine Einbettung die klarerweise $(s,t) \in \phi_1 \times \phi_2(D_1 \times D_2)$ erfüllt.

Mit diesem Wissen macht folgende Definition Sinn.

Definition 2.8. Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ und die Gruppenmultiplikation $\cdot : (x,y) \mapsto xy$, $G \times G \to G$ stetig differenzierbar, so heißt G eine *Lie-Gruppe*.

Beispiel. Typische Beispiele für Lie-Gruppen sind die allgemeine lineare Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ oder auch abgeschlossene Untergruppen davon, wie zum Beispiel die spezielle lineare Gruppe $SL(n,\mathbb{R})$, die orthogonale Gruppe $O(n)$ und die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$. Andere Beispiele wären $(\mathbb{R}^p, +)$ oder auch $(\mathbb{T}, \cdot)$.

Lemma 2.9. *Sei G eine Lie-Gruppe. Für jedes $x \in G$ ist die Abbildung $l_x : y \mapsto xy, G \to G$ ein Diffeomorphismus. Das gleiche gilt für $r_x : y \mapsto yx, G \to G$.*

Beweis. Wie wir schon im Beweis von Lemma 1.5 gesehen haben, ist l_x bijektiv. Wegen $(l_x)^{-1} = l_{x^{-1}}$ reicht es also zu zeigen, dass l_x stetig differenzierbar ist, für ein beliebiges $x \in G$.

Sei $y \in G$ beliebig, $\phi_1 : D_1 \to G$ eine Einbettung mit $\phi_1(s_1) = x$ für $s_1 \in D_1$ und $\phi_2 : D_2 \to G$ eine Einbettung mit $\phi_2(s_2) = y$ für $s_2 \in D_2$. Weiters sei $\phi_3 : D_3 \to G$ eine Einbettung mit $\phi_3(s_3) = xy$, $s_3 \in D_3$. Die Gruppenmultiplikation in G bezeichnen wir mit $\Gamma : (x,y) \mapsto xy, G \times G \to G$.

Weil Γ stetig differenzierbar und $\phi_1 \times \phi_2 : D_1 \times D_2 \to G \times G$ eine Einbettung ist, gilt, dass $\Psi := \phi_3^{-1} \circ \Gamma \circ (\phi_1 \times \phi_2) : O \to D_3$ klassisch stetig differenzierbar ist, wobei $O := (\Gamma \circ (\phi_1 \times \phi_2))^{-1}(\phi_3(D_3)) \ni (s_1, s_2)$ offen in $\mathbb{R}^{2d}$ ist (vergleiche Definition 2.3).

Die Menge $O_{s_1} := \{t \in \mathbb{R}^d : (s_1, t) \in O\}$ ist offen in $\mathbb{R}^d$. Die Einbettungsabbildung $\iota : t \mapsto (s_1, t), O_{s_1} \to O$ ist klarerweise stetig differenzierbar. Betrachte nun folgende stetig differenzierbare Abbildung:

$$\Psi \circ \iota : t \mapsto \Psi(s_1, t) = \phi_3^{-1}(\phi_1(s_1) \cdot \phi_2(t)) = \phi_3^{-1}(l_x(\phi_2(t))) \quad t \in O_{s_1}$$

Wir haben zu einem beliebigen $y \in G$ eine Einbettung $\phi_2 : O_{s_1} \subseteq D_2 \to G$ mit $y \in \phi_2(O_{s_1})$ und eine Einbettung $\phi_3 : D_3 \to G$ mit $l_x(y) = xy \in \phi_3(D_3)$ gefunden, so dass alle Voraussetzungen von Lemma 2.5 erfüllt sind. Also ist l_x ein Diffeomorphismus.

Genauso zeigt man, dass r_x ein Diffeomorphismus ist. □

Bemerkung 2.10. In einer Lie-Gruppe G gilt immer, dass die Inversenbildung $(.)^{-1} : x \mapsto x^{-1}, G \to G$ stetig differenzierbar ist, wie sich mit dem Hauptsatz über implizite Funktionen zeigen lässt:

Bezeichne $\Gamma : G \times G \to G$ die stetig differenzierbare Gruppenmultiplikation und sei $x \in G$ beliebig. Wir finden sicher Einbettungen $\phi_1 : D_1 \to G$ mit $\phi_1(s_1) = x$ für ein $s_1 \in D_1$, $\phi_2 : D_2 \to G$ mit $\phi_2(s_2) = x^{-1}$ für ein $s_2 \in D_2$ sowie $\phi_3 : D_3 \to G$ mit $\phi_3(s_3) = e$ für ein $s_3 \in D_3$. Außerdem lässt sich durch Verkleinern der Mengen D_1, D_2 o.B.d.A. $\Gamma(\phi_1 \times \phi_2(D_1 \times D_2)) \subseteq \phi_3(D_3)$ erreichen, indem man ausnutzt, dass Γ nach dem 1. Punkt von Lemma 2.6 stetig ist. Nun liefert die stetige Differenzierbarkeit von Γ, dass

$$\phi_3^{-1} \circ \Gamma \circ (\phi_1 \times \phi_2) : D_1 \times D_2 \to D_3$$

(klassisch) stetig differenzierbar ist. Aus technischen Gründen setzten wir diese Abbildung noch mit folgender Translation $T : s \mapsto s - s_3, D_3 \to T(D_3)$ zusammen, und erhalten folgende stetig differenzierbare Funktion:

$$F := T \circ \phi_3^{-1} \circ \Gamma \circ (\phi_1 \times \phi_2) : D_1 \times D_2 \subseteq \mathbb{R}^{2d} \to T(D_3) \subseteq \mathbb{R}^d$$

Für $(s_1, s_2) \in D_1 \times D_2$ gilt $F(s_1, s_2) = T(\phi_3^{-1}(\phi_1(s_1) \cdot \phi_2(s_2)) = T(\phi_3^{-1}(e)) = T(s_3) = 0$. Wenn wir also zeigen können, dass die $d \times d$ Matrix $dF_2(s_1, s_2)$, bestehend aus den hinteren d Spalten von $dF(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^{d \times 2d}$, invertierbar ist, können wir den Hauptsatz über implizite Funktionen anwenden.

Die Abbildung $t \mapsto dF_2(s_1, t)$ ist nichts anderes als die Ableitung der Funktion $t \mapsto F(s_1, t)$ als Funktion von $t \in D_2$. Nun gilt $F(s_1, t) = T(\phi_3^{-1}(\phi_1(s_1) \cdot \phi_2(t))) = T(\phi_3^{-1}(x \cdot \phi_2(t))) = T(\phi_3^{-1}(l_x(\phi_2(t))))$. Nach Lemma 2.9 wissen wir, dass $l_x : G \to G$ ein Diffeomorphismus ist. Daraus schließt man elementar, dass $t \mapsto F(s_1, t)$ als Abbildung von D_2 nach $T(\phi_3^{-1}(l_x(\phi_2(D_2))))$ ein Diffeomorphismus ist. Die Ableitung davon, also $dF_2(s_1, t)$, ist daher für alle $t \in D_2$, also insbesondere für s_2 invertierbar.

Der Hauptsatz über implizite Funktionen liefert uns nun die Existenz zweier offene Kugeln, $U = U_\delta(s_1)$ mit $U \subseteq D_1$ sowieso $V = U_\rho(s_2)$ mit $V \subseteq D_2$. Außerdem existiert eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ mit $F(s, g(s)) = 0$ für alle $s \in U$. Wenn man in die Definition von F einsetzt sieht man, dass die letzte Identität auch folgendermaßen angeschrieben werden kann:

$$\phi_2\left(g\left(s\right)\right) = \left(\phi_1\left(s\right)\right)^{-1} \quad \text{für alle } s \in U \tag{3}$$

Indem wir D_1 und D_2 notfalls weiter verkleinern gelte $D_1 = U$ und $D_2 = V$. Definiere nun eine neue Funktion $h : \phi_1(D_1) \to \phi_2(D_2), z \mapsto \left(\phi_2 \circ g \circ \phi_1^{-1}\right)(z)$. Unter Benutzung von (3) zeigt die kurze Rechnung

$$h(z) = \phi_2(g(\phi_1^{-1}(z))) = (\phi_1(\phi_1^{-1}(z)))^{-1} = z^{-1} \quad z \in \phi_1(D_1) \subseteq G,$$

dass die Funktion h lokal auf $\phi_1(D_1)$ genau dem Invertieren $(.)^{-1}$ entspricht.

Nun haben wir alles in der Hand um Lemma 2.5 anwenden zu können: Zu einem beliebigem $x \in G$ haben wir Einbettungen ϕ_1 und ϕ_2 gefunden, sodass die im Lemma gewünschte Inklusion $(.)^{-1}(\phi_1(D_1)) = h(\phi_1(D_1)) = \phi_2(g(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2)$ gilt. Außerdem ist $\phi_2^{-1} \circ (.)^{-1} \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ im klassischem Sinn stetig differenzierbar, denn es gilt $\phi_2^{-1} \circ (.)^{-1} \circ \phi_1 = \phi_2^{-1} \circ h \circ \phi_1 = g$ und g ist stetig differenzierbar als Abbildung zwischen D_1 und D_2.

Mit Lemma 2.5 folgt also, dass die Inversenbildung in jeder Lie-Gruppe eine stetig differenzierbare Abbildung ist.

Bemerkung 2.11. Versieht man eine Lie-Gruppe G mit der Spurtopologie $\mathcal{T} := \mathcal{E}^p|_G$ so wird $(G, \mathcal{T})$ zu einer lokalkompakten Gruppe.

Um das einzusehen, sei zunächst bemerkt, dass die Gruppenmultiplikation laut Definition 2.8 und die Inversenbildung laut Bemerkung 2.10 stetig differenzierbar sind und demnach laut Lemma 2.6 stetig bezüglich den jeweiligen Spurtopologien sind. Die Spurtopologie auf G entspricht ja genau unserer Topologie $\mathcal{T}$, womit die Stetigkeit der Inversenbildung gezeigt wäre. Die Spurtopologie auf $G \times G$ entspricht der Produkttopologie der Spurtopologien auf G, in Zeichen $\mathcal{E}^{2p}|_{G\times G} = \mathcal{E}^p|_G \times \mathcal{E}^p|_G = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$, weil die Spurtopolgie ebenso wie die Produkttopologie über die Initiale Topologie definiert sind, und die Konstruktion der Initialen Topologie assoziativ ist. Wir erhalten also, dass $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe ist.

Wieso handelt es sich um eine lokalkompakte Gruppe? Dazu müssen wir zu einem beliebigen $x \in G$ eine kompakte Umgebung K finden, also eine kompakte Menge K, so dass es eine offene Menge O gibt, so dass $x \in O \subseteq K$ gilt.

Sei also $x \in G$. Weil G eine Mannigfaltigkeit ist, existiert sicherlich eine Einbettung $\phi : D \to G$ mit $x = \phi(s)$ für ein $s \in D$. Weil D offen ist, können wir $\epsilon > 0$ so klein wählen, dass die abgeschlossene ϵ-Kugel um s, $K_\epsilon(s)$, noch ganz in D enthalten ist. $K_\epsilon(s)$ ist abgeschlossen und beschränkt also nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Nun ist $K := \phi(K_\epsilon(s))$ als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt. Klarerweise enthält sie x, und als O können wir zum Beispiel das Bild der offene ϵ Kugel um s, $O := \phi(U_\epsilon(s))$, wählen.

2.3 Eine Verallgemeinerung der Transformationsregel

Definition 2.12. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ und $f : M \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Ist $x \in M$ und $\phi : D \to M$ irgendeine Einbettung mit $x \in \phi(D)$, so definieren wir mit $x = \phi(s)$

$$\Xi(f)(x) := \sqrt{\frac{\det d(f \circ \phi)(s)^T d(f \circ \phi)(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}} \quad \in [0, +\infty)\,.$$

Ist dieses Objekt wohldefiniert?

Die Funktion f ist stetig differenzierbar, wobei man hier den $\mathbb{R}^q$ formal als q - dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^q$, also als offene Teilmenge vom $\mathbb{R}^q$, auffassen kann, und als Einbettung immer die identische Abbildung $\mathrm{id} : x \mapsto x, \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ genommen werden kann.

Für jede Einbettung ϕ ist damit nach Lemma 2.5 die Abbildung $\mathrm{id} \circ f \circ \phi = f \circ \phi : D \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar im klassischen Sinne. Damit machen Ausdrücke wie $d(f \circ \phi)(s)$ Sinn.

Weil $d\phi(s)$ immer vollen Rang hat, ist $d\phi(s)^T d\phi(s)$ symmetrisch, positiv definit, und hat demnach eine Determinante strikt größer als Null. Für die Matrix im Zähler, $d(f \circ \phi)(s)^T d(f \circ \phi)(s)$, gilt immerhin, dass ihre Determinante größer gleich Null ist, weil sie symmetrisch positiv semidefinit ist. Wir dividieren also nicht durch Null, ziehen die Wurzel aus einer nicht negativen Zahl, und damit ist $\Xi(f)(x)$ immer größer gleich Null.

Schlussendlich wollen wir uns noch überlegen, dass die Funktion $\Xi(f)(x)$ unabhängig von der konkret gewählten Einbettung ϕ ist:

Sei also $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M$ eine weitere Einbettung mit $x \in \tilde{\phi}(\tilde{D})$ also $x = \tilde{\phi}(\tilde{s})$ für ein $\tilde{s} \in \tilde{D}$. Nach Korollar 2.4 ist $\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi|_{B_1} : B_1 \to B_2$ mit $B_1 := \phi^{-1}(\phi(D) \cap \tilde{\phi}(\tilde{D}))$ und $B_2 := \tilde{\phi}^{-1}(\phi(D) \cap \tilde{\phi}(\tilde{D}))$ ein klassischer Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^d$. Klarerweise ist damit $T := d(\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi)(s) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär. Nun gilt für beliebige $C \in \mathbb{R}^{q \times d}$:

$$|\det T| \sqrt{\det C^T C} = \sqrt{\det T^T \det C^T C \det T} = \sqrt{\det (CT)^T (CT)} \tag{4}$$

Wählen wir speziell $C := d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s})$, so gilt wegen der Kettenregel
$CT = d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s}) d(\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi)(s) = d(f \circ \phi)(s)$, und Gleichung (4) liefert

$$|\det T| \sqrt{\det d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s})^T d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s})} = \sqrt{\det d(f \circ \phi)(s)^T d(f \circ \phi)(s)}$$

Wählen wir $C := d\tilde{\phi}(\tilde{s})$ so folgt analog $CT = d\tilde{\phi}(\tilde{s}) d(\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi)(s) = d\phi(s)$ und mit (4)

$$|\det T| \sqrt{\det d\tilde{\phi}(\tilde{s})^T d\tilde{\phi}(\tilde{s})} = \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}$$

Wir sehen also, dass sich der neue Nenner vom alten Nenner genau um den gleichen konstanten Faktor $|\det T| > 0$ unterscheidet wie der neue Zähler vom alten Zähler. Damit ist die Definition unabhängig von der konkret gewählten Einbettung.

Bemerkung 2.13. Wenn wir irgendeine Einbettung $\phi : D \to M$ in eine Mannigfaltigkeit M haben und einen klassischen Diffeomorphismus $T : O \to D$ zwischen zwei offenen Mengen $O, D \subseteq \mathbb{R}^d$, so ist es keine große Weisheit, dass dann $\phi \circ T : O \to M$ wieder eine Einbettung in M ist.

Genauso einfach sieht man ein, dass für eine Einbettung $\phi : D \to M$ und einen klassischen Diffeomorphismus $\widetilde{T}$, die Abbildung $\widetilde{T} \circ \phi : D \to \widetilde{T}(M)$ wieder eine Einbettung in $\widetilde{T}(M)$ ist. Dabei reicht im Allgemeinen nicht, dass $\mathrm{dom}(\widetilde{T}) = M$, weil M im Allgemeinen nicht offen sein muss. Der Diffeomorphismus muss also auf einer echt größeren offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}^p$ definiert sein, also $\widetilde{T} : O \to P$ mit $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $M \subseteq O$. In der nächsten Bemerkung wird die gleiche Frage behandelt, wobei wir statt diesem klassischen Diffeomorphismus einen Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten voraussetzen.

Bemerkung 2.14. Sei $\phi : D \to M_1$ eine Einbettung und $f : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Ziel dieser Bemerkung ist zu zeigen, dass $f \circ \phi : D \to M_2$ eine Einbettung in M_2 ist.

Sei $s \in D$ beliebig, so existiert zu $f(\phi(s)) \in M_2$ sicher eine Einbettung $\widetilde{\phi} : \widetilde{D} \to M_2$ mit $f(\phi(s)) \in \widetilde{\phi}(\widetilde{D})$. Weil nun $O_s := (f \circ \phi)^{-1}(\widetilde{\phi}(\widetilde{D}))$ nicht leer ist, weil ja $s \in O_s$, gilt nach Definition 2.3, dass O_s als Teilmenge von D offen im $\mathbb{R}^{d_1}$ ist. Nun ist $\phi_1 := \phi|_{O_s}$ erneut eine Einbettung.

Weil $\phi_1(O_s) \subseteq M_1$ offen bezüglich der Spurtopologie ist und f^{-1} als stetig differenzierbare Funktion nach Lemma 2.6 stetig ist, ist die Menge $f(\phi_1(O_s)) \subseteq M_2$ offen bezüglich der Spurtopologie. Schließlich ergibt sich, dass $P_s := \widetilde{\phi}^{-1}(f(\phi_1(O_s)))$ als Teilmenge von $\widetilde{D}$ im $\mathbb{R}^{d_2}$ offen ist. Wie zuvor ist $\phi_2 := \widetilde{\phi}|_{P_s}$ eine Einbettung.

Mit dieser Konstruktion haben wir

$$f(\phi_1(O_s)) = \phi_2(P_s) \text{ oder dazu äquivalent } \phi_1(O_s) = f^{-1}(\phi_2(P_s)) \tag{5}$$

erreicht. Weil f und f^{-1} stetig differenzierbar sind, können wir in beiden Fällen in Definition 2.3 ϕ_1 und ϕ_2 als Einbettungen wählen, und erhalten mit 5, dass

$$g := \phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : O_s \to P_s \text{ und } h := \phi_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \phi_2 : P_s \to O_s$$

stetig differenzierbare Abbildungen im klassischen Sinne sind. Außerdem sind g und h als Hintereinanderausführung bijektiver Abbildungen bijektiv und es gilt $g = h^{-1}$. Nach der Kettenregel folgt $(s \in O_s, t \in P_s, t = g(s))$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d_1}} = d\,\mathrm{id}_{O_s}(s) = d(h \circ g)(s) = dh(t)dg(s), \quad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d_2}} = d\,\mathrm{id}_{P_s}(t) = d(g \circ h)(t) = dg(s)dh(t)$$

Aus der linearen Algebra folgt $d_1 = d_2$. Also muss die Dimension zweier diffeomorpher Mannigfaltigkeiten gleich sein. Damit sehen wir auch, dass g und h klassische Diffeomorphismen sind.

Nun ist $\phi_2 \circ g : O_s \to M_2$, wie schon in Bemerkung 2.13 beobachtet, wieder eine Einbettung in M_2. Diese Abbildung stimmt jedoch mit $f \circ \phi_1 : O_s \to M_2$ überein.

Wir haben nun gezeigt, dass es für jedes $s \in D$ eine s-enthaltende, offene Menge $O_s \subseteq D$ gibt, so dass $f \circ \phi|_{O_s} : O_s \to M_2$ eine Einbettung in M_2 ist. Gewissermaßen ist also $f \circ \phi : D \to M_2$ lokal um jedes s eine Einbettung. Wie man leicht überprüft folgt daraus schon, dass $f \circ \phi : D \to M_2$ eine Einbettung ist.

Satz 2.15. *Seien M_1, M_2 zwei d-dimensionale Mannigfaltigkeiten [1] im $\mathbb{R}^{p_1}, \mathbb{R}^{p_2}$ und bezeichnen σ_1, σ_2 die Oberflächenmaße auf M_1, M_2. Ist $T : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus, so gilt für ein messbares $f : M_2 \to \mathbb{C}$*

$$\int_{M_2} f \, d\sigma_2 = \int_{M_1} f(T(t)) \cdot \Xi(T)(t) \, d\sigma_1(t).^{2}$$

Beweis. Sei $\phi_j : D_j \to M_1, j \in \mathbb{N}$, eine Folge von Einbettungen so, dass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(D_j) = M_1$. Mit $N_j := \phi_j(D_j) \backslash (\phi_{j-1}(D_{j-1}) \cup \ldots \cup \phi_1(D_1))$ erhalten wir eine Partition von M_1.

[1] Man beachte, dass die Mannigfaltigkeiten gleiche Dimension haben müssen, wenn es einen Diffeomorphismus $T : M_1 \to M_2$ geben soll; siehe Bemerkung 2.14

[2] Aufgrund der Definition von Ξ müsste hier eigentlich $\Xi(\iota \circ T)$ statt $\Xi(T)$ stehen, wobei $\iota : M_2 \to \mathbb{R}^{p_2}$ die Einbettungsabbildung ist.

Wie aus Analysis III bekannt, gilt dann

$$\int_{M_2} f(T(t)) \cdot \Xi(T)(t)\, d\sigma_1(t) =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(N_j)} (f \circ T \circ \phi_j)(s) \cdot \Xi(T)(\phi_j(s)) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}\, d\lambda_d(s) =$$

Wir schreiben das um zu

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(N_j)} (f \circ T \circ \phi_j)(s) \cdot$$

$$\sqrt{\frac{\det d(T\circ\phi_j)(s)^T d(T\circ\phi_j)(s)}{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}} \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}\, d\lambda_d(s) =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{(T\circ\phi_j)^{-1}(T(N_j))} (f \circ (T \circ \phi_j))(s) \cdot \sqrt{\det d(T\circ\phi_j)(s)^T d(T\circ\phi_j)(s)}\, d\lambda_d(s) \qquad (6)$$

Nun sind wegen Bemerkung 2.14 die Abbildungen $T \circ \phi_j : D_j \to M_2$ auch Einbettungen. Wegen $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(T\circ\phi_j)(D_j) = T\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(D_j)\right) = T(M_1) = M_2$ und

$$T(N_j) = (T\circ\phi_j)(D_j) \setminus ((T\circ\phi_{j-1})(D_{j-1}) \cup \ldots \cup (T\circ\phi_1)(D_1))$$

sind die $T(N_j), j \in \mathbb{N}$ eine Partition von M_2. Demnach ist (6) nichts anderes als $\int_{M_2} f\, d\sigma_2$. □

2.4 Radon-Nikodym-Ableitung vom Haarmaß bzgl. des Oberflächenmaßes

Bemerkung 2.16. Ziel dieser technischen Bemerkung wird eine Stetigkeitsaussage sein, die für den nächsten Satz von Bedeutung sein wird.

Bezeichne $\Gamma : G \times G \to G$ wieder die (stetig differenzierbare) Gruppenmultiplikation und sei $\iota : x \mapsto x, G \to \mathbb{R}^p$ die Einbettung, die, wie man einfach einsieht, ebenfalls stetig differenzierbar ist. Nach Lemma 2.6 ist die Hintereinanderausführung $\widetilde{\Gamma} := \iota\circ\Gamma : G\times G \to \mathbb{R}^p$ wieder stetig differenzierbar.

Sind $\phi_i : D_i \to G \;\; i \in \{1,2\}$ beliebige Einbettungen, dann ist, wie wir schon einmal festgestellt haben, $\phi_1 \times \phi_2$ eine Einbettung in $G \times G$, und daher $\Psi := \widetilde{\Gamma} \circ (\phi_1 \times \phi_2) : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^p$ eine stetig differenzierbare Abbildung im klassischen Sinn. Daher ist

$$(s,t) \mapsto d\Psi(s,t),\ D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^{p\times 2d} \text{ stetig.} \qquad (7)$$

Schreiben wir $(s,t) = (\xi_1, \ldots, \xi_d, \eta_1, \ldots, \eta_d) \in D_1 \times D_2$ so gilt

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_j}(s,t) = \frac{\partial}{\partial\eta_j}(\phi_1(s)\cdot\phi_2(t)) = \frac{\partial}{\partial\eta_j}(l_{\phi_1(s)}\circ\phi_2)(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\xi_j}(s,t) = \frac{\partial}{\partial\xi_j}(r_{\phi_2(t)}\circ\phi_1)(s)$$

$$\text{insbesondere also} \quad d\Psi(s,t) = (d(r_{\phi_2(t)}\circ\phi_1)(s), d(l_{\phi_1(s)}\circ\phi_2)(t))$$

Halten wir etwa $t \in D_2$ fest, so ist, wie in (7) ersichtlich, $s \mapsto d\Psi(s,t)$ stetig, also insbesondere auch $s \mapsto d(l_{\phi_1(s)} \circ \phi_2)(t) \quad s \in D_1$.

Nun folgt die Stetigkeit von $x \mapsto d(l_x \circ \phi_2)(t)$ auf ganz G, und zwar für jede Einbettung $\phi_2 : D_2 \to G$ und jedes $t \in D_2$.

Um das einzusehen, sei uns ein $\widetilde{x} \in G$ gegeben. Wir finden sicherlich eine Einbettung $\phi_1 : D_1 \to G$ mit $\phi_1(s) = \widetilde{x}$ für ein $s \in D_1$. Für jede beliebige, also auch für diese Einbettung ist $s \mapsto d(l_{\phi_1(s)} \circ \phi_2)(t)$ stetig auf D_1. Weil $\phi_1 : D_1 \to \phi_1(D_1)$ ein Homöomorphismus ist, ist insbesondere ϕ_1^{-1} stetig. Die obige Funktion kann man nun auch schreiben als $x \mapsto \phi_1^{-1}(x) \mapsto d(l_{\phi_1(\phi_1^{-1}(x))} \circ \phi_2)(t) \quad x \in \phi_1(D_1)$ und ist somit lokal um $\widetilde{x}$ stetig.

Bemerkung 2.17. Wir erkennen nun auch, dass zur Kartierung einer Lie-Gruppe G als Mannigfaltigkeit eigentlich nur eine Einbettung $\phi : D \to G$ mit $e \in \phi(D)$ nötig ist.

Ist nämlich $x \in G$ beliebig, so ist $\phi_x := l_x \circ \phi : D \to G$ wegen Lemma 2.9 und Bemerkung 2.14 wieder eine Einbettung mit $x \in \phi_x(D)$.

Satz 2.18. *Sei G eine Lie-Gruppe und bezeichne σ das Oberflächenmaß auf G. Dann ist $(B \in \mathfrak{B}(G))$*

$$\mu : B \mapsto \int_B \frac{1}{\Xi(l_x)(e)}\, d\sigma(x)$$

ein linkes Haarmaß, wobei $l_x : y \mapsto xy$. Dabei ist $x \mapsto \Xi(l_x)(e), G \to (0,\infty)$ stetig. Entsprechend ist

$$\mu : B \mapsto \int_B \frac{1}{\Xi(r_x)(e)}\, d\sigma(x)$$

ein rechtes Haarmaß, wobei $r_x : y \mapsto yx$.

Beweis. Zunächst gilt

$$\Xi(l_{yx})(e) = \Xi(l_x)(e) \cdot \Xi(l_y)(x) \quad \text{für alle } x, y \in G$$

Um das einzusehen, sei $\phi : D \to G$ eine Einbettung mit $\phi(s) = e$ für ein $s \in D$. Nach Bemerkung 2.17 ist auch $l_x \circ \phi : D \to G$ eine Einbettung mit $l_x \circ \phi(s) = x$. Da $\Xi(l_y)$ unabhängig von der gewählten Einbettung ist, gilt

$$\Xi(l_y)(x) = \sqrt{\frac{\det d(l_y \circ (l_x \circ \phi))(s)^T d(l_y \circ (l_x \circ \phi))(s)}{\det d(l_x \circ \phi)(s)^T d(l_x \circ \phi)(s)}}$$

und klarerweise

$$\Xi(l_x)(e) = \sqrt{\frac{\det d(l_x \circ \phi)(s)^T d(l_x \circ \phi)(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}} \tag{8}$$

Multiplizieren liefert

$$\Xi(l_x)(e) \cdot \Xi(l_y)(x) = \sqrt{\frac{\det d(l_y \circ (l_x \circ \phi))(s)^T d(l_y \circ (l_x \circ \phi))(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}}$$

Dieser Ausdruck stimmt aber wegen $l_y \circ l_x = l_{yx}$ mit $\Xi(l_{yx})(e)$ überein.

Die Stetigkeit von $x \mapsto \Xi(l_x)(e)$ folgt wegen Bemerkung 2.16 aus Zeile (8). Die reelle Zahl $\Xi(l_x)(e)$ ist, wie behauptet, strikt größer als Null, weil nicht nur die Matrix im Nenner, sondern auch jene im Zähler eine symmetrisch positiv definite Matrix ist, und demnach eine Determinante strikt größer als Null hat.

Die Dichtefunktion ist also stetig, daher messbar, und positiv. Damit ist klar, dass durch μ ein Maß definiert wird.

Nun gilt für ein $y \in G$ und ein messbares $f : G \to \mathbb{R}$ wegen der verallgemeinerten Transformationsregel 2.15 angewandt auf den Diffeomorphismus $l_y : G \to G$ (siehe Lemma 2.9)

$$\int_G f(x) \frac{1}{\Xi(l_x)(e)} \, d\sigma(x) = \int_G f(yx) \frac{1}{\Xi(l_{yx})(e)} \Xi(l_y)(x) \, d\sigma(x) = \int_G f(yx) \frac{1}{\Xi(l_x)(e)} \, d\sigma(x)$$

Die Transformationsregel durften wir anwenden, weil der Integrand als Produkt zweier messbarer Funktionen wieder messbar ist.

Wählt man nun speziell $f = \mathbb{1}_B$ für ein beliebiges $B \in \mathfrak{B}(G)$ so erhält man $\mu(B) = \mu(y^{-1}B)$ für alle $y \in G$, also die Linksinvarianz von μ.

Genauso zeigt man die Rechtsinvarianz des anderen Maßes. $\square$

Beispiel. Betrachte die Lie-Gruppe $O(n)$. Man kann sich überlegen, dass hier $\Xi(l_x)(e) = 1$ für alle $x \in O(n)$ gilt. Nach Satz 2.18 stimmt hier also das Oberflächenmaß mit dem Haarschen Maß überein.

Literatur

[1] Jürgen Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 6. Auflage

[AnaIII] Michael Kaltenbäck: *Analysis 3 für technische Mathematik*, Vorlesungsskript, Wien, Juni 2010

[2] Michael Feischl: *Das Haarsche Maß*, Seminararbeit aus Analysis SS 2009