Über die Stone-Cech Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen, RAMSEY Theorie und den Satz von HINDMAN

Florian Karl Richter

5. März 2010 in Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitende Worte zur Ramsey-Theorie

Unter dem Begriff der "Ramsey[1] Theorie" versteht man keine Theorie im eigentlichen Sinn, oder in anderen Worten, kein Gebiet der Mathematik, sodass sich eine Theorie rund um eine Struktur oder rund um einen oder mehrere Hauptsätze aufbauen würde. Vielmehr wird der Begriff der Ramsey Theorie oft als Sammelbegriff verstanden, der mehrere Sätze aus der Kombinatorik zusammenfasst, die sich vor allem darin ähneln, dass bestimmten Mengen, die in einer gewissen Weise "groß" sind, besondere Eigenschaft zugeschrieben werden. Die mathematische Auslegung von "groß" kann hier jedoch von Satz zu Satz stark variieren.
Ziel dieser Seminararbeit wird es sein, den Satz von HINDMAN zu beweisen, ein Satz, der sich ebenfalls in die Ramsey Theorie einordnen lässt. Eine sehr abgeschwächte Form dieses Satzes ist der Satz von Schur, der sich mit Hilfe des *Ramsey party theorem* beweisen lässt.

[1] Frank Plumpton Ramsey; geb. 1903, † 1930

1.1 Ramsey Party Theorem

Das *Ramsey party theorem* ist ein gutes Beispiel, wenn man den Einstieg in die Ramsey Theorie finden möchte. Denn einerseits braucht man keinerlei mathematische Vorkenntnisse um Gefallen an dem Satz zu finden, der sich mit einem Partygetümmel der besonderen Art beschäftigt, andererseits vermittelt er ein verständliches Bild davon welche Richtung das Ganze einschlagen wird, sollte man sich dazu entschließen tiefer in die Ramsey Theorie vorzudringen.
Er besagt, dass sich auf einer Party, auf der sich unendlich viele Gäste aufhalten, immer eine unendliche Teilmenge von Gästen finden lässt, in welcher entweder ein jeder der Gäste alle anderen kennt, oder wo keiner einen kennt. In anderen Worten lässt sich zu jeder Zweifärbung der Menge aller ungeordneten Paaren von natürlichen Zahlen eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ finden, sodass alle ungeordneten Paare, die von dieser gefundenen Teilmenge erzeugt werden, die selbe Farbe besitzen.

Beweis : Für den Beweis kann man sich wie folgt einen leichten zielführenden Algorithmus überlegen: Man wähle einen Gast a_1 aus, der unendlich viele Bekannte auf der Party besitzt. Unter den Bekannten von a_1 wähle man erneut einen Gast a_2 aus, der von den Bekannten von a_1 ebenfalls unendlich viele kennt. Unter den Bekannten von a_2, die auch a_1 kennt, wähle man erneut einen Gast a_3 aus, der ebenfalls unendlich viele Bekannte unter den Bekannten von a_1 und a_2 hat. Auf diese Weise fährt man fort. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Wenn der Algorithmus nicht abbricht, d.h. wenn man immer wieder einen Gast a_n findet, der unendlich viele Bekannte unter den Bekannten, die a_1 ... a_{n-1} teilen, besitzt, dann ist die Menge $\{a_1, a_2, ...\}$ eine Menge, wo ein jeder alle anderen kennt. Bricht jedoch der Algorithmus nach dem n-ten Schritt ab, so ist es der Fall, dass aus der Menge der Bekannte, die a_1 bis a_n teilen, kein Gast gefunden werden kann, der aus dieser Menge noch unendlich viele andere Gäste kennt. Gleichzeitig ist diese Menge aber unendlich groß. Deshalb kann man aus dieser Menge einen Gast b_1 wählen und die endlich vielen Bekannten, die er noch in jener Menge besitzt aus der Menge eliminieren. Da nur endliche viele eliminiert wurden ist die neue Menge, die man erhält, wieder unendlich groß und in ihr sind wiederum nur Gäste, wo ein jeder nur endlich viele andere kennt. Man wählt wieder einen beliebigen Gast b_2 aus dieser Menge aus und eliminiert alle seine Bekannten, welche auch wieder nur endlich viele sind. b_1 und b_2 kennen einander natürlich nicht, weil b_2 aus der Menge stammt, die nach der ersten Eliminationsphase entstand. Nach diesem Verfahren erhält man eine zweite Folge b_1, b_2, ... von Gästen, wo es der Fall ist, dass keiner den anderen kennt. $\square$

1.2 Satz von Schur

Die Aussage des Satzes von Schur erinnert besonders an die Aussage des Satzes von HINDMAN (der erst weiter unten formuliert wird) und kann auch als Spezialfall von diesem interpretiert werden. Jedoch lässt sich der Satz von Schur noch sehr einfach mit Zuhilfenahme des *Ramsey party theorem* auf elementare Art und Weise beweisen, während sich ein elementarer Beweis des Satzes von HINDMAN als sehr lang und kombinatorisch aufwendig erweist. In dieser Seminararbeit wird jedoch kein elementarer Zugang gewählt um den Satz von HINDMAN zu beweisen, sondern ein topologischer Zugang über die Stone-Cech Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$. Darüber hinaus wird uns dieser Zugang zu (teils auch überraschenden) zusätzlichen Ergebnissen führen.

Der Satz von Schur besagt nun, dass es zu jeder n-Färbung der natürlichen Zahlen 2 Zahlen x,y gibt, sodass x, y, und x+y die selbe Farbe besitzen. Dieser Satz lässt sich nun mit den eben Bewiesenen leicht zeigen. Man ordnet einfach jedem ungeordneten Paar (z_i, z_j), $z_i < z_j$, die selbe Farbe wie $z_j - z_i$ zu und erhält eine n-Färbung der Menge aller ungeordneten Paare von $\mathbb{N}$. Nach dem *Ramsey party theorem* erhält man nun Zahlen $z_1 < z_2 < z_3$, wo $z_2 - z_1$, $z_3 - z_1$ und $z_3 - z_2$ die selbe Farbe haben. Hier wird nicht die oben bewiesene Version des *Ramsey party theorem* verwendet, sondern dessen Verallgemeinerung von dem Fall einer 2-Färbung der Menge aller ungeordneten Paare von $\mathbb{N}$ auf den Fall einer n-Färbung. Der Beweis des *Ramsey party theorem* für eine n-Färbung der Menge aller ungeordneten Paare von $\mathbb{N}$ verläuft ähnlich wie der oben angegebene Beweis. Man wähle nun $x = z_2 - z_1$ und $y = z_3 - z_2$.

2 Die Topologie von $\beta\mathbb{N}$

2.1 Ultrafilter auf $\mathbb{N}$

2.1.1.: Definition: Ein Ultrafilter p über $\mathbb{N}$ ist definiert als ein maximaler Filter über $\mathbb{N}$, oder anders formuliert, ein nichtleeres Mengensystem über $\mathbb{N}$, das folgende vier Eigenschaften erfüllt:

(i) $\emptyset \notin p$,
(ii) $A \in p$ und $A \subset B$ impliziert $B \in p$,
(iii) $A, B \in p$ impliziert $A \cap B \in p$,
(iv) (Maximalität): für $r \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_r$ existiert ein i, mit $1 \leq i \leq r$, sodass $A_i \in p$.

2.1.2.: Definition: Die Menge aller Ultrafilter über $\mathbb{N}$ sei im weiteren mit $\beta\mathbb{N}$ bezeichnet, also $\beta\mathbb{N} := \{p \subset 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \ : \ p$ erfüllt (i), (ii), (iii) und $(iv)\}$. Diese Schreibweise leitet sich aus der gängigen Bezeichnung für die Stone-Cech Kompaktifizierung einer Topologie X durch βX ab. In der Tat handelt es sich hierbei um die Stone-Cech Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen, worauf weiter unten noch genauer eingegangen wird.

Ein einfaches Beispiel für Elemente aus $\beta\mathbb{N}$ wären die so genannten Hauptfilter über $\mathbb{N}$. Ein Hauptfilter zum Punkt $k \in \mathbb{N}$ ist jener Ultrafilter über $\mathbb{N}$, der gegen den Punkt k konvergiert[2], also jener Ultrafilter, der sich genau aus den Teilmengen von $\mathbb{N}$ zusammensetzt, die k enthalten:

$$\mu_k := \{A \subset \mathbb{N} \ : \ k \in A\}$$

Jedoch ist es abgesehen von den Hauptfiltern unmöglich, eine explizite Darstellung eines Elementes von $\beta\mathbb{N}$ anzugeben. Damit ist uns aber nur ein abzählbarer, also sehr kleiner Teil der überabzählbaren Menge $\beta\mathbb{N}$ [3] wirklich bekannt, was einer der Gründe ist, warum $\beta\mathbb{N}$ ein Raum ist, von dem man sich nur schwer eine Vorstellung machen kann. Dieser Eindruck wird noch einmal verstärken, wenn wir $\beta\mathbb{N}$ mit einer Topologie versehen und später noch zu einer Halbgruppe erweitern.

2.2 Die Topologie

2.2.1.: Definition: Für alle $A \subset \mathbb{N}$ sei $\overline{A}$ definiert als $\overline{A} := \{p \in \beta\mathbb{N} \ : \ A \in p\}$ und $\mathfrak{A}$ definiert als $\mathfrak{A} := \{\overline{A} \ : \ A \subset \mathbb{N}\}$.

Es lässt sich nun unter Verwendung der Eigenschaften (i) bis (iv) auf elementare Weise nachrechnen, dass die Identitäten $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ und $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} \overline{A} = \overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$ gelten, woraus umgehend folgt, dass $\mathfrak{A}$ alle Bedingungen erfüllt, um die Basis einer Topologie zu bilden:

2.2.2.: Definition: Die von $\mathfrak{A}$ auf $\beta\mathbb{N}$ erzeugte Topologie sei mit $\mathcal{T}$ bezeichnet.

Aus der Eigenschaft $\overline{A^c} = \overline{A}^c$ ist sofort ersichtlich, dass in dieser Topologie für alle Elemente aus der Basis $\mathfrak{A}$ gilt, dass sie sowohl offen als auch abgeschlossen sind und damit folgt, dass $\mathfrak{A}$ nicht nur eine Basis der offenen sondern auch eine Basis der abgeschlossenen Mengen von $\mathcal{T}$ bildet.
In weiterer Folge suchen wir eine Einbettung der natürlichen Zahlen in $\beta\mathbb{N}$. Dazu haben wir den Begriff der Hauptfilter eingeführt: Wenn μ_k den Hauptfilter zu k bezeichnet erkennt man, dass $\overline{\{k\}} = \mu_k$ gilt. Damit ist μ_k also ein Element von $\mathfrak{A}$ und daher auch offen und abgeschlossen zugleich. Ebenso ist aber $\{k\}$ in $\mathbb{N}$ versehen mit der diskreten Topologie offen und abgeschlossen. Damit folgt aber bereits, dass die Abbildung $\iota : k \mapsto \mu_k$ eine offene und natürlich auch stetige[4] Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\beta\mathbb{N}$ ist,

[2] Zur Erinnerung: Ein Filter konvergiert in einer Topologie genau dann gegen einen Punkt x, wenn er feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$. T_2 ist z.B. auch eine hinreichende Bedingung dafür, dass dieser Grenzwert eindeutig ist. Weiters gilt, dass auf einer kompakten Topologie jeder Ultrafilter einen Grenzwert besitzt und dass ein Ultrafilter genau dann gleich dem Umgebungsfilter eines Punktes x ist, wenn der Ultrafilter gegen x konvergiert und x zusätzlich einen isolierten Punkt der Topologie darstellt.

[3] Genau genommen lässt sich zeigen: Die Mächtigkeit von $\beta\mathbb{N}$ entspricht der Mächtigkeit von $2^{2^{\mathbb{N}}}$.

[4] Jede Funktion die von den natürlichen Zahlen weg in eine Topologie hinein abbildet ist bzgl. der diskreten Topologie auf $\mathbb{N}$ stetig.

die die natürlichen Zahlen bijektiv mit der Menge aller Hauptfilter identifiziert. Dass ι wirklich eine offene Abbildung ist lässt sich einfach über den Umstand erklären, dass alle Mengen der Form $\{k\}$ zusammengefasst eine Basis der diskreten Topologie von $\mathbb{N}$ bilden, und wenn eine Basis der offenen Mengen unter einer Abbildung auf offene Mengen abgebildet werden ist die Abbildung bereits offen. Damit ist aber die Menge aller Hauptfilter (versehen mit der Spurtopologie) bereits homöomorph zu $\mathbb{N}$. Nun könnte man meinen, da sich jetzt ja Mengen aus $\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$ einbetten lassen, dass die oben definierte Notation $\overline{A}$, $A \subset \mathbb{N}$, als Teilmenge von $\beta\mathbb{N}$ leicht mit dem Abschluss der Einbettung $\overline{\iota(A)}$ in $\beta\mathbb{N}$ zu verwechseln sei. Tatsächlich stimmen diese beiden Mengen aber überein. Um das einzusehen betrachte man den Abschluss einer Menge als den Schnitt über alle abgeschlossenen Obermengen, beziehungsweise als den Schnitt über alle Obermengen, die aus der Basis der abgeschlossenen Mengen stammen und man erhält:

$$\overline{\iota(A)} = \bigcap_{\overline{B}\in\mathfrak{A},\iota(A)\subset\overline{B}} \overline{B} = \bigcap_{B\subset\mathbb{N},A\subset B} \overline{B} = \overline{A}.$$

Aus einer vorigen Bemerkung ist bereits bekannt, dass $\overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$ gilt, woraus nun ohne weiteres folgt, dass $\mathbb{N}$ dicht in $\beta\mathbb{N}$ liegt.

2.3 Eigenschaften von $\mathcal{T}$

2.3.1.: Satz : Die von $\mathfrak{A}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ auf $\beta\mathbb{N}$ ist kompakt.

Beweis : Zuerst zeigen wir, dass $\mathfrak{A}$ die endliche Duchschnittseigenschaft erfüllt, also dass für eine Familie A_i, $i \in I$ und $A_i \subset \mathbb{N}$, folgende Implikation gilt:

$$\bigcap_{i\in\mathcal{F}} \overline{A}_i \neq \emptyset, \text{ für alle } \mathcal{F} \subset I, \mathcal{F} \text{ endlich} \qquad \Rightarrow \qquad \bigcap_{i\in I} \overline{A}_i \neq \emptyset. \tag{1}$$

Dazu betrachten wir die Menge $\mathfrak{F} := \{\bigcap_{i\in\mathcal{F}} A_i \ : \ \mathcal{F} \subset I \text{ endlich}\}$ und stellen fest, dass es sich hierbei um eine Menge handelt, die alle Eigenschaften einer Filterbasis erfüllt (weil der Schnitt zweier Mengen aus $\mathfrak{F}$ nicht leer und wieder in $\mathfrak{F}$ enthalten ist und weil die leere Menge nicht in $\mathfrak{F}$ liegt). Damit können wir $\mathfrak{F}$ zu einem Ultrafilter $p \in \beta\mathbb{N}$ fortsetzen. Für p gilt, dass er $\mathfrak{F}$ enthält, und damit auch $\bigcap_{i\in\mathcal{F}} A_i$ für alle endlichen $\mathcal{F} \subset I$ enthält. Damit enthält er insbesondere alle A_i. Also ist $p \in \overline{A}_i$ für alle $i \in I$. Und damit ist p enthalten in $\bigcap_{i\in I} \overline{A}_i$.

Sei nun eine Überdeckung von $\beta\mathbb{N}$ durch eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{A}_i, i \in I$ gegeben. O.B.d.A. können wir annehmen, dass alle $\mathcal{A}_i$ aus $\mathfrak{A}$ stammen, da $\mathfrak{A}$ eine Basis der Topologie ist. Somit lässt sich die Familie schreiben als $\overline{A}_i$, $i \in I$ und $A_i \subset \mathbb{N}$. Setze $B_i := A_i^c$. Aus $\bigcup_{i\in I} \overline{A}_i = \beta\mathbb{N}$ folgt $\bigcap_{i\in I} \overline{A}_i^c = \bigcap_{i\in I} \overline{A^c}_i = \bigcap_{i\in I} \overline{B}_i = \emptyset$ und aus der Kontraposition von (1) folgert man die Existent einer endlichen Indexmenge $\mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $\bigcap_{i\in\mathcal{F}} \overline{B}_i = \emptyset$. Dann ist $\overline{A}_i$, mit $i \in \mathcal{F}$, eine endliche Teilüberdeckung von $\beta\mathbb{N}$. $\square$

2.3.2.: Satz : Jede in $(\beta\mathbb{N}, \mathcal{T})$ konvergente Folge von Ultrafiltern ist ab einem gewissen Index konstant.

Beweis : Angenommen $p_n \xrightarrow{\mathcal{T}} p$ und $p_n \neq p_m \neq p$ für $n \neq m$. Man erkennt leicht, dass es ausreichen wird, die Behauptung nur für jene Folgen zu zeigen, die diese Vorraussetzungen auch erfüllen, denn für Folgen, für die endlich viele Folgenglieder gleich sind, oder mit dem Grenzwert übereinstimmen kann man diese Glieder aus der Folge streichen und eine äquivalente Folge betrachten, die die Vorraussetzungen erfüllt, und das selbe Konvergenzverhlaten aufweist. Sind hingegen unendlich viele Folgenglieder gleich, so hat man entweder bereits eine ab einem Index konstante Folge, oder man kann eine maximale Teilfoge so auswählen, sodass alle Glieder der Teilfolge paarweise verschieden sind. Zeigt man nun die Behauptung für die Teilfolge, so folgt die Behauptung für die ganze Folge.

Weil $\beta\mathbb{N}$ Hausdorff ist, kann man p_1 und p durch Mengen aus $\mathfrak{A}$ trennen:

$$\exists A_1, B_1 \subset \mathbb{N} \text{ mit } p_1 \in \overline{A}_1,\ p \in \overline{B}_1,\ \overline{A}_1 \cap \overline{B}_1 = \emptyset$$

Da aber alle bis auf endlich viele Folgenglieder von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B_1 enthalten sind, kann ich nun p_1 von den endlich vielen Punkten, die nicht in B_1 liegen trennen und erhalte eine Umgebung $C_1 \subset A_1$ mit den Eigenschaften

$$p_1 \in \overline{C}_1 \text{ und } p_n \notin \overline{C}_1 \text{ für } n \neq 1$$

Das selbe Verfahren kann man aber auch mit dem N-ten Folgenglied durchführen und erhält

$$\exists C_N \text{ mit } p_N \in \overline{C}_N \text{ und } p_n \notin \overline{C}_N \text{ für } n \neq N$$

Weiters kann man o.B.d.A. fordern, das C_N disjunkt zu den ersten $N-1$ gefundenen Mengen C_i, $i \leq N-1$, ist. Auf diese Weise erhält man induktiv eine Folge von offenen disjunkten Mengen in $\beta\mathbb{N}$ die jeweils genau einen Punk der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ umgeben:

$$\exists (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } p_n \in \overline{C}_n \text{ und } \overline{C}_{n_1} \cap \overline{C}_{n_2} = \emptyset \text{ für } n_1 \neq n_2.$$

Nun betrachte die beiden Mengen $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{2i}$ und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{2i+1}$. Diese Mengen sind disjunkt und daher können nicht beide Mengen in ein und demselben Ultrafilter enthalten sein, unabhängig davon, welchen Ultrafilter ich betrachte. Insbesondere ist mindestens eine der beiden nicht in p enthalten. Angenommen $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{2i}$ wäre diejenige der beiden, die nicht in p ist. dann ist $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{2i})^c$ in p enthalten und damit ist $\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{2i}}^c$ eine Umgebung von p, die alle p_n mit geradem n nicht enthält. Insbesondere ist $\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{2i}}^c$ eine Umgebung des Grenzwertes p, die unendlich viele Folgeglieder nicht enthält, was ein Widerspruch zur Konvergenz ist. □

2.3.3.: Korollar : $(\beta\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ist kompakt aber nicht folgenkompakt[5].

2.4 Stone-Cech Kompaktifizierung

2.4.1.: Definition: Die Stone-Cech Kompaktifizierung eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert als ein topologischer Raum $(\beta X, \mathcal{Y})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(\beta X, \mathcal{Y})$ ist kompakt,
2. es existiert eine Abbildung $\iota : X \to \beta X$, sodass $\iota : (X, \mathcal{T}) \to (\iota(X), \mathcal{Y}_{\iota(X)})$ ein Homöomorphismus ist, also eine bijektive, stetige und offene Abbildung.
3. $\iota(X)$ liegt dicht in βX.
4. für jede stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt es eine eindeutige stetige Funktion $f^{(\beta)} : \beta X \to [0,1]$, sodass $f^{(\beta)}(\iota(x)) = f(x)$ für alle $x \in X$.

Nun wollen wir zeigen, das es sich bei $\beta\mathbb{N}$ wirklich um die Stone-Cech Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ handelt: Wir wissen bereits, dass $\beta\mathbb{N}$ kompakt ist, dass es eine Einbettung gibt, die die oben erwähnten Eigenschaften erfüllt, und dass $\mathbb{N}$ dicht in $\beta\mathbb{N}$ eingebettet wird. Um zu zeigen, dass sich stetige Funktionen auch noch fortsetzen lassen nehmen wir an, dass f eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $[0,1]$ ist. Definiere $F_p := \{f(A) \ : \ A \in p\}$ für $p \in \beta\mathbb{N}$. Es ist leicht ersichtlich, dass F_p die Eigenschaften einer Filterbasis erfüllen. Damit lässt sich F_p zu einem Ultrafilter $\mathfrak{F}_p$ über $[0,1]$ fortsetzen und dieser konvergiert gegen einen Punkt x_p in $[0,1]$, weil jeder Ultrafilter auf einer kompakten Topologie konvergiert. Nun definiere man $f^{(\beta)}(p) = x_p$ für alle $p \in \beta\mathbb{N}$. Es ist wiederum nicht schwer festzustellen, dass das Mengensystem F_{μ_k} gegen den Bildpunkt von k unter f konvergiert. Also gilt $f^{(\beta)}(\mu_k) = f(k)$.
Nun zur Eindeutigkeit: Angenommen es gäbe zwei Fortsetzungen von F_p zu einem Ultrafilter, einmal zu $\mathfrak{F}_p^{(1)}$ und einmal zu $\mathfrak{F}_p^{(2)}$, wobei $\mathfrak{F}_p^{(1)}$ gegen x konvergiert, und $\mathfrak{F}_p^{(2)}$ gegen y, $x \neq y$. Dann wähle man

[5] Eine Topologie heißt folgenkompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

eine Umgebungen U_x von x die y nicht enthält. Da für alle $A \in p$ gilt $f(A) \in F_p \subset \mathfrak{F}_p^{(1)}$ und in $\mathfrak{F}_p^{(1)}$ nur Mengen enthalten sind, die x enthalten, gilt für alle $A \in p$, dass $x \in f(A)$. Analog gilt $y \in f(A)\ \forall A \in p$. Nun sind 2 Fälle zu unterscheiden:
1.Fall: $f^{-1}(U_x) \in p$: Dann wäre aber $f^{-1}(U_x)$ eine Menge in p mit $y \notin f(f^{-1}(U_x)) = U_x$ und damit wäre die Ursprüngliche Annahme $x \neq y$ zu einem Widerspruch geführt.
2.Fall: $f^{-1}(U_x) \notin p$: Dann müsste aber $f^{-1}(U_x)^c = f^{-1}(U_x^c) \in p$ gelten, womit mit $f^{-1}(U_x^c)$ eine Menge gefunden wäre, dessen Bild unter f das Element x nicht enthält, was ebenfalls zu einem Widerspruch führt.

Letztlich bleibt nur mehr zu zeigen, dass die eben beschriebene Fortsetzung $f^{(\beta)}$ von f eine stetige Abbildung ist. Dazu btrachten wir das Urbild von einem offenen Intervall $(\delta - \epsilon, \delta + \epsilon)$ unter $f^{(\beta)}$:

$$
\begin{aligned}
&(f^{(\beta)})^{-1}(\delta - \epsilon, \delta + \epsilon) = \\
&= \{p \in \beta\mathbb{N}\ :\ \mathfrak{F}_p \text{ konvergiert geg. einen Pkt. in } (\delta - \epsilon, \delta + \epsilon)\} = \{p \in \beta\mathbb{N}\ :\ (\delta - \epsilon, \delta + \epsilon) \in \mathfrak{F}_p\} = \\
&= \{p \in \beta\mathbb{N}\ :\ f^{-1}(\delta - \epsilon, \delta + \epsilon) \in f^{-1}(\mathfrak{F}_p)\} = \{p \in \beta\mathbb{N}\ :\ f^{-1}(\delta - \epsilon, \delta + \epsilon) \in p\} = \\
&= \overline{f^{-1}(\delta - \epsilon, \delta + \epsilon)}
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt, dass $\beta\mathbb{N}$ die Stone-Cech Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ ist.

3 $\beta\mathbb{N}$ als Halbgruppe

3.0.2.: Definition: Für zwei Ultrafilter $p, q \in \beta\mathbb{N}$ ist die Faltung oder Addition $p + q$ gegeben durch

$$p + q := \{\ A \subset \mathbb{N}\ :\ \{\ n\ :\ (A - n) \in p\} \in q\}.$$

Hierbei ist die Menge $(A - n)$ definiert als $\{m \in \mathbb{N}\ :\ m + n \in A\}$.

Warum man diese Operation Addition nennt, darauf wird weiter unten noch genauer eingegangen. Dass sie aber auch den Namen Faltung trägt, rührt daher, dass man jeden Ultrafilter als endlich-additives 0-1-wertiges Wahrscheinlichkeitsmaß über $\mathbb{N}$ auffassen kann, wobei $p(A) = \begin{cases} 1, & A \in p \\ 0, & A \notin p \end{cases}$. Tut man dies, so erinnert die Addition sehr stark an die Faltung, wie man sie von endlichen Borelmaßen auf topologischen Gruppen kennt. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass die einzigen σ-additiven Ultrafilter die Hauptfilter sind, alle anderen Ultrafilter jedoch nur endlich-additiv sind. Die σ-Additivität ist jedoch eine wichtige Vorraussetzung für den Satz von FUBINI, der verwendet wird, um die Kommutativität der Faltung zu beweisen. In weiterer Folge werden wir sehen, dass die "Faltung" von Ultrafilter eben genau nur auf den Hauptfiltern kommutativ operiert, ansonsten jedoch nicht kommutativ ist.

3.0.3.: Lemma : Das Mengensystem $p + q$ ist wieder ein Ultrafilter.

Beweis : Man sieht unmittelbar, dass $p + q$ ein Filter ist. Weiters gilt:

$$(A - n)^c = \{m\ :\ m + n \in A\}^c = \{m\ :\ m + n \notin A\} = \{m\ :\ m + n \in A^c\} = (A^c - n)$$

Um zu zeigen, das $p + q$ ein Ultrafilter ist nehmen wir an, dass $A \notin p + q$:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \{\ n\ :\ (A - n) \in p\} \notin q \\
&\Rightarrow \{\ n\ :\ (A - n) \in p\}^c \in q \\
&\Rightarrow \{\ n\ :\ (A - n) \notin p\} \in q \\
&\Rightarrow \{\ n\ :\ (A - n)^c \in p\} \in q \\
&\Rightarrow \{\ n\ :\ (A^c - n) \in p\} \in q \\
&\Rightarrow A^c \in p + q
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt, das $p+q$ ein Ultrafilter ist. $\square$

Auf ähnliche Art und Weise kann man nachrechnen, das die Addition auf $\beta\mathbb{N}$ assoziativ ist. Damit bildet $\beta\mathbb{N}$ mit $+$ eine kompakte Halbgruppe.
Um die eben definierte Addition besser zu verstehen betrachten wir vorerst, wie sie auf den eigebettete Elemente von $\mathbb{N}$ operiert. Sei also $m, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \in \mu_k + \mu_m \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{n \ : \ (A-n) \in \mu_k\} \in \mu_m \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m \in \{n \ : \ (A-n) \in \mu_k\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m \in (A-n) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m+k \in A \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Also ist $\mu_k + \mu_m = \mu_m + \mu_k = \mu_{k+m}$. Man sieht, dass die Addition in $\beta\mathbb{N}$ eingeschränkt auf Hauptfilter das selbe leistet wie die gewöhnliche Addition auf $\mathbb{N}$. Man sieht auch, dass die Addition eingeschränkt auf Hauptfilter kommutativ ist. Für den Rest von $\beta\mathbb{N}$ gilt das aber nicht. Genauer gesagt lässt sich zeigen, dass das Zentrum der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$ nur aus den Hauptfilter besteht, und nicht aus mehr.

3.0.4.: Definition: $\lambda_p := \begin{cases} \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N} \\ q \mapsto p+q \end{cases} \quad \rho_q := \begin{cases} \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N} \\ p \mapsto p+q \end{cases}$

3.0.5.: Lemma : Für festgehaltenes p ist λ_p stetig

Beweis :

$$\begin{aligned} \lambda_p^{-1}(\overline{A}) &= \\ &= \{q \in \beta\mathbb{N} \ : \ A \in p+q\} \\ &= \{q \in \beta\mathbb{N} \ : \ \{n \ : \ (A-n) \in p\} \in q\} \\ &= \overline{\{n \ : \ (A-n) \in p\}} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass Urbilder von offenen Mengen aus der Basis der Topologie wieder offene Mengen sind und damit ist λ_p stetig. $\square$

Es ist nun aber der Fall, dass ρ_q nur dann stetig ist, wenn q ein Hauptfilter ist. Im Allgemeinen ist ρ_q eine unstetige Abbildung und die Addition $+ : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ ist nur stetig im rechten Argument, also linksstetig[6].

4 Idempotente Elemente

4.1 Ein Satz über linksstetige kompakte Halbgruppen

4.1.1.: Satz : Jede linksstetige und kompakte Halbgruppe S enthält ein idempotentes Element, also ein $p \in S$ mit $p^2 = p$.

Beweis : Es sei die Menge aller abgeschlossenen, nicht leeren Unterhalbgruppen von S geordnet nach der Mengeninklusion. Betrachten wir nun eine Kette aus dieser Halbordnung, also eine Familie $(S_i)_{i\in I}$ von nicht leeren abgeschlossenen Unterhalbgruppen von S mit der Eigenschaft $S_{i_1} \subseteq S_{i_2} \ \vee \ S_{i_1} \supseteq S_{i_2}$ für $i_1, i_2 \in I$, so ist $\bigcap_{i\in I} S_i$ als Durchschnitt von abgeschlossenen Halbgruppen wieder eine abgeschlossene Halbgruppe. Da wir uns in einer kompakten Topologie befinden folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft zusätzlich, dass $\bigcap_{i\in I} S_i$ nicht leer ist. Damit hat man gezeigt, dass eine jede Kette eine untere

[6]Vielfach wird dies in der Literatur auch als “rechtsstetig“ bezeichnet. Welchen Namen man nun dieser Eigenschaft zuschreibt ist immer wieder verschieden.

Schranke besitzt und das Lemma von Zorn garantiert uns nun die Existenz einer minimalen abgeschlossenen Unterhalbgruppe S_0 von S die nicht leer ist.
Für ein $p \in S_0$ definiere man M_p als $\{q \in S_0 \ : \ pq = p\}$. Da die Multiplikation stetig im rechten Argument ist, ist M_p abgeschlossen. Betrachte weiters die Menge pS_0. Da S_0 kompakt und die Operation linksstetig ist, ist pS_0 eine abgeschlossene Teilmenge von S_0. pS_0 ist aber genauso eine Unterhalbgruppe von S_0. Da aber S_0 minimal ist, müssen pS_0 und S_0 bereits übereinstimmen. Damit folgt $p \in pS_0$ und damit die Existenz eines $q \in S_0$ mit $pq = p$. Damit und aus der Definition von M_p folgt, dass M_p nicht leer ist. Aber auch M_p ist für sich genommen eine Halbgruppe und in S_0 enthalten. Aus der Minimalität folgt $M_p = S_0$ und somit $p \in M_p$. Daraus folgt: $p^2 = p$. □

Aus diesem Satz folgt, dass in $\beta\mathbb{N}$ idempotente Elemente existieren.

4.2 Idempotente Elemente von $\beta\mathbb{N}$

4.2.1.: Definition: Zu einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen sei $FS(n_i)_{i=1}^{\infty}$ die Menge, die mittels endlicher Summen aus den Folgegliedern von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hervorgeht:

$$FS(n_i)_{i=1}^{\infty} = \{n_{i_1} + ... + n_{i_r}, r \in \mathbb{N}, i_1 < 1_2 < ... < i_r\}.$$

Solche unter endlichen Summen abgeschlossene Mengen nennt man auch IP-Mengen.

4.2.2.: Satz : Sei p ein idempotentes Element von $(\beta\mathbb{N}, +)$. Dann enthält jede Menge von $A \in p$ eine IP-Menge.

Beweis : Sei $A \in p$ und $p + p = p \in \beta\mathbb{N}$. Zu allererst sei bemerkt, dass A nicht endlich sein kann. Denn wäre A endlich, dann kann man A als endliche und disjunkte Vereinigung von Singletons schreiben. Damit müsste p aber genau eines der Singletons enthalten und wäre damit ein Hauptfilter. Aber Hauptfilter sind keine idempotenten Elemente.
Aus $A \in p + p$ folgt $\{n \ : \ (A - n) \in p\} \in p$. Damit ist der Schnitt $A \cap \{n \ : \ (A - n) \in p\}$ ebenfalls in p enthalten. Also findet man ein $n_1 \in A$ sodass $A_1 := A\cap(A-n_1) \in p$. Da die Menge $A\cap\{n \ : \ (A-n) \in p\}$ in p liegt und damit unendlich groß ist, besitzt man sogar unendlich viele Wahlmöglichkeiten für ein solches n_1.
A_1 ist wieder in p enthalten, so wie A zuvor. Daher kann man den selben Schritt für A_1 wiederholen. Aus $A_1 \in p + p$ folgt $\{n \ : \ (A_1 - n) \in p\} \in p$ und damit $A_1 \cap \{n \ : \ (A_1 - n) \in p\} \in p$. Also findet man wieder ein $n_2 \in A$ sodass $A_2 := A_1 \cap (A_1 - n_2) \in p$. Da die Menge $A \cap \{n \ : \ (A - n) \in p\}$ wieder unendlich groß ist, kann man o.B.d.A. $n_2 > n_1$ wählen.
Für A_2 gilt: $A_2 = A_1 \cap (A_1 - n_2) = A \cap (A - n_1) \cap (A - n_2) \cap (A_1 - n_1 - n_2)$ und damit folgt $n_1 + n_2 \in A$. Führen wir dieses Verfahren fort so erhalten wir eine Mengenfolge A_i und eine Zahlenfolge n_i mit $n_{i+2} \in A_{i+1} = A_i \cap (A_i - n_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, ...$
Weil sich A_i immer wieder schreiben lässt als $A_i = A \cap ... \cap (A - n_1 - n_2 - ... - n_i)$ gilt $FS(n_i)_{i=0}^{\infty} \subset A$.
□

4.2.3.: Satz : Zu jeder Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existiert ein idempotentes Element $p \in \beta\mathbb{N}$, sodass $FS(x_i)_{i=0}^{\infty} \in p$.

Beweis : Sei $\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{FS(x_i)_{i=n}^{\infty}}$. Aus der endlichen Durchschnittseigenschft folgt, dass Γ nicht leer ist. Klarerweise ist Γ auch kompakt. Es ist nicht schwer einzusehen, dass Γ unter der Addition abgeschlossen ist[7], also ein linksstetige und kompakte Halbgruppe ist. Daher wissen wir, dass es ein Element $p \in \Gamma$ gibt mit $p + p = p$. Also $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{FS(x_i)_{i=n}^{\infty}}$ und damit insbesondere $p \in \overline{FS(x_i)_{i=1}^{\infty}}$. Damit gilt $\overline{FS(x_i)_{i=1}^{\infty}} \in p$. □

[7]Siehe Anhang I

4.3 Satz von HINDMAN

4.3.1.: Satz von Hindman: Der Satz von Hindman (oder "finit sums theorem") besagt, dass man zu jeder endlichen Partitionierung $\bigcup_{i=1}^{r} C_i = \mathbb{N}$, $C_{i_1} \cap C_{i_2} = \emptyset$ für $i_1 \neq i_2$, eine Partition C_{i_0} findet, sodass diese eine IP-Menge enthält.

Beweis : Wir wissen, dass es in $\beta\mathbb{N}$ ein Element p gibt, mit $p + p = p$. Da $(C_i)_{i=1}^{r}$ eine Partitionierung von $\mathbb{N}$ ist folgt aus der (iv) Eigenschaft für Ultrafilter, dass eine der Partitionen, C_{i_0}, in p enthalten ist. Damit enthält C_{i_0} eine IP-Menge. □

4.3.2.: Satz (finit unions theorem): Für jede endliche Partitionierung von $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{N} \ : \ F$ ist endlich$\}$, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{C}_i$ und $\mathcal{C}_{i_1} \cap \mathcal{C}_{i_2} = \emptyset$ für $i_1 \neq i_2$, findet man eine Partition $\mathcal{C}_{i_0}$, die eine unendliche Folge von nichtleeren und disjunkten Mengen $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zusammen mit allen möglichen Vereinigungen $U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_k}$, $k \in \mathbb{N}$, enthält. O.B.d.A. kann man zusätzlich annehmen, dass $\max U_i < \min U_{i+1}$.

Beweis : Über die Bijektion $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ definiert durch $\{i_1, \ ..., i_k\} \mapsto 2^{i_1} + \ ... \ + 2^{i_k}$, welche die Eigenschaft $\varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ für $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ besitzt, kann man diesen Satz sofort mit Hilfe des Satzes von Hindman beweisen. □

4.3.3.: Satz : Für jede endliche Partitionierung einer IP-Menge gibt es eine Partition, die eine IP-Menge enthält.

Beweis : In Satz (4.2.3) wurde bereits gezeigt: Zu jeder IP-Menge gibt es einen idempotenten Ultrafilter p, der diese Menge enthält. Daraus kann man schließen, dass auch eine der Partitionen in p enthalten ist und als Element eines idempotenten Ultrafilters enthält diese Partition wieder eine IP-Menge. □

4.4 Weitere Eigenschaften von idempotente Ultrafilter

Definiert man die Multiplikation auf $\beta\mathbb{N}$ als

$p * q := \{A \subset \mathbb{N} : \{n : (An^{-1}) \in p\} \in q\}$, wobei $A * n^{-1} = \{m \in \mathbb{N} : m * n \in A\}$,

so kann man jeden der oben geführten Beweise für die Addition von Ultrafiltern ohne weiter Schwierigkeiten auf die Multiplikation übertragen. Allgemein kann man alle Ergebnisse sogar für $(\beta G, \cdot_\beta)$ verwenden, wobei $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe, βG die Menge aller Ultrafilter und $p \cdot_\beta q := \{A \subset G : \{x : (Ax^{-1}) \in p\} \in q\}$ ist.
Es gilt also für die Multiplikation:

- $p * q \in \beta\mathbb{N}$
- $\mu_m * \mu_k = \mu_{m*k}$
- Die Multiplikation ist linksstetig.
- $(\beta\mathbb{N}, *)$ ist eine kompakte linksstetige Halbgruppe. Daraus folgt die Existenz eines idempotenten Ultrafilters $p = p^2$.
- Sei $PS(x_i)_{i=1}^{\infty} = \{x_{i_1} * ... * x_{i_r}, r \in \mathbb{N}, i_1 < 1_2 < ... < i_r\}$. Jedes Element $A \subset \mathbb{N}$ eines idempotenten Ultrafilters $p = p^2$ enthält eine IP Menge, also eine bezüglich endlichen Produkten abgeschlossene Menge. Weiters gibt es zu jeder Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einen idempotenten Ultrafilter p, der $PS(x_i)_{i=1}^{\infty}$ enthält.

4.4.1.: Satz : Sei Γ der Abschluss der Menge aller additiven(multiplikativen) idempotenten Elementen aus $\beta\mathbb{N}$. Dann ist p $\in \Gamma$ wenn und nur dann wenn jede p-große[8] Menge A eine additive(multiplikative) IP Menge enthält.

Beweis : Ist $A \in p \in \Gamma$ dann gilt $p \in \overline{A}$. $\overline{A}$ ist aber eine offen Umgebung und weil p aus dem Abschluss über alle idempotenten Ultrafilter kommt muss $\overline{A}$ einen nicht leeren Durchschnitt mit der Menge aller idempotenten Elmente haben. Also $\exists q \in \overline{A}$ mit $q = q + q (q = q^2)$, und damit $A \in q$. Damit enthält A eine IP-Menge.
Gilt andererseits dass jede Menge $A \in p$ eine IP-Menge enthält, so folgt für jede offene Umgebung $\overline{A}$ von p aus der Basis $\mathfrak{A}$ der Topologie (das sind genau alle $\overline{A}$ mit $A \in p$) und Satz (4.2.3), dass der Schnitt von $\overline{A}$ mit der Menge aller idempotenten Ultrafilter nicht leer ist. Das bedeutet jedoch, dass p im besagtem Abschluss enthalten ist. $\square$

4.4.2.: Lemma : Sei Γ wie im Satz (4.4.1). Dann bildet Gamma ein rechtes Ideal in $(\beta\mathbb{N}, *)$.

Beweis : Sei $p \in \Gamma,\ q \in \beta\mathbb{N}$ und $A \in p * q$. Dann gilt $\{x \in \mathbb{N} : Ax^{-1} \in p\} \in q$ und insbesondere ist $\{x \in \mathbb{N} : Ax^{-1} \in p\}$ nicht leer. Wähle x so, dass $Ax^{-1} \in p$. Weil p in Γ liegt, und $Ax^{-1} \in p$ folgt, dass Ax^{-1} eine IP-Menge enthält. Es existiert demnach eine Folge $(y_n)_{n \in N}$, sodass $FS(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset Ax^{-1}$. Daraus folgt aber $FS(xy_i)_{i=1}^{\infty} \subset A$ und damit enthält A eine IP-Menge. Das gilt aber nun für alle $A \in p * q$. Nach dem letzten Satz muss damit $p * q \in \Gamma$ gelten. $\square$

4.4.3.: Satz : Für jede endliche Partitionierung der natürlichen Zahlen $\bigcup_{i=1}^{r} C_i = \mathbb{N},\ C_{i_1} \cap C_{i_2} = \emptyset$ für $i_1 \neq i_2$, lässt sich eine Partition C_{i_0} finden, sodass diese zugleich eine additive IP-Menge und eine multiplikative IP-Menge enthält.

Beweis : Aus den vorangegangenen Sätzen wissen wir, dass Γ, als der Abschluss über die Menge aller additiv-idempotenten Ultrafilter, ein Rechtsideal bzgl. der Multiplikation ist. Damit ist Γ aber eine Unterhalbgruppe von $(\beta\mathbb{N}, *)$ und damit eine kompakte linksstetige Halbgruppe bzgl. $*$. Damit existiert ein Ultrafilter p in Γ mit $p^2 = p$ und weil p aus Γ stammt gilt zusätzlich $p + p = p$. Über p und über die (iv) Eigenschaft der Ultrafilter findet man nun die Partition, die sowohl eine multiplikative, sowie additive IP-Menge enthält. $\square$

5 Anhang

anhang.sec)

5.1 Anhang I

$\Gamma := \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{FS(x_i)_{i=n}^{\infty}}$. Zu zeigen ist, das Γ unter der Addition abgeschlossen ist:

$p, q \in \Gamma$
$p + q = \{A \subset \mathbb{N} : \{n : (A - n) \in p\} \in q\}$
z.z.: $\{m : (FS(x_i)_{i=n}^{\infty}) - m) \in p\} \in q$ für alle $n \in \mathbb{N}$

1.Fall: $m := x_j,\ j \geq n$
$\Rightarrow (FS(x_i)_{i=n}^{\infty} - x_j) \supset FS(x_i)_{i=j+1}^{\infty} \in p$
2.Fall: $m := \sum_{l=1}^{k} x_{j_l}$ mit $x_{j_l} \geq n,\ l = 1, ..., k$
$\Rightarrow$ Mit dem selben Argument wie zuvor folgt $(FS(x_i)_{i=n}^{\infty}) - m) \in p$
3. Fall: $m \notin FS(x_i)_{i=n}^{\infty}$

[8] Wie bereits weiter oben erwähnt kann jeder Ultrafilter als endlichadditives Maß angesehen werden. Eine Menge heißt dabei p-groß, wenn das p-Maß von ihr gleich 1 ist.

$\Rightarrow (FS(x_i)_{i=n}^{\infty}) - m) \cap FS(x_i)_{i=n}^{\infty} = \emptyset \Rightarrow (FS(x_i)_{i=n}^{\infty}) - m) \notin p$

Aus den drei Fällen ergibt sich $\{m : (FS(x_i)_{i=n}^{\infty}) - m) \in p\} = FS(x_i)_{i=n}^{\infty}$ und damit folgt auch die Behauptung.

6 Literatur

V.Bergelson: `Minimal Idempotents and Ergodic Ramsey Theory` *Topics in Dynamics and Ergodic Ramsey Theory 8-39, London Math. Soc. Lecture Note Series 310, Cambridge University Press, Cambridge, (2003)*
URL(vom 30. Dezember 2009): `http://www.math.ohio-state.edu/~vitaly/vbkatsiveli20march03.pdf`