Seminararbeit: Auswahlaxiom

Stefan Rigger

17. November 2014

1 Einleitung

In der vorliegenden Seminararbeit werden die Axiome der Zermelo-Fränkel-Mengenlehre vorausgesetzt. Ziel dieser Arbeit ist, die mathematische Gleichwertigkeit einiger bekannter Resultate zum Auswahlaxiom herauszuarbeiten, darunter das Lemma von Zorn, der Wohlordnungssatz und der Satz von Tychonoff. Zuletzt werden als interessante Konsequenzen aus dem Auswahlaxiom die Unlösbarkeit des Maßproblems und das Banach-Tarski-Paradoxon vorgestellt. Wir verwenden dabei die folgende Formulierung des Auswahlaxioms: Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie nichtleerer Mengen, dann gilt

$$\prod_{i\in I} A_i = \big\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \; \forall i \in I \big\} \neq \emptyset$$

Wir bezeichnen eine Funktion $f \in \prod_{i\in I} A_i$ auch als Auswahlfunktion. Wir setzen insbesondere voraus, dass die folgenden beiden Aussagen aus dem Zermelo-Fränkel-System ohne Verwendung des Auswahlaxioms ableitbar sind:

A. Jedes endliche Produkt nichtleerer Mengen ist nichtleer

B. Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen, sodass wir für jedes $i \in I$ ein eindeutiges Element $a_i \in A_i$ angeben können, dann ist die durch $f(i) = a_i$ definierte Funktion eine Auswahlfunktion.

Beispiel 1.1. Sei $A_x := \mathbb{R} \setminus \{x\}$. Es fällt leicht, für die Familie $(A_x)_{x\in\mathbb{R}}$ eine Auswahlfunktion anzugeben: Sei dazu z.B. einfach $f(x) = x - 1$. Wir brauchen hier wegen Punkt B nicht das Auswahlaxiom um einzusehen, dass $\prod_{x\in\mathbb{R}} A_x \neq \emptyset$ gilt.

Beispiel 1.2. Indem wir die Familie aller nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{R}$ betrachten, erhalten wir mit dem Auswahlaxiom die Existenz einer Funktion $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \emptyset \to \mathbb{R}$. Es fällt schwer, sich eine explizite Funktionsvorschrift für eine solche Funktion auszudenken, da man dazu wohl die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ bestimmen müsste.

2 Ordnungstheoretische Grundlagen

Dieses Kapitel beruht auf [4]. Um zu zeigen, dass das Lemma von Zorn und der Wohlordnungssatz aus dem Auswahlaxiom folgen, werden wir zunächst einen ordnungstheoretischen Fixpunktsatz beweisen. Dazu benötigen wir einige Definitionen:

Definition 2.1. Sei T eine Menge, sei $<$ eine Relation auf T die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Transitivität: $(a < b$ und $b < c) \Rightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in T$
- Asymmetrie: $a < b \Rightarrow b \nless a \quad \forall a, b \in T$

dann nennen wir $(T, <)$ eine **strikte Halbordnung**. Wir werden im Folgenden einfach von einer Halbordnung sprechen, durch die Verwendung des $<$-Symbols wird angedeutet, dass eine strikte Halbordnung gemeint ist. Weiters gehen wir davon aus, dass die Festlegung von $>, \leq, \geq$ klar ist.

Definition 2.2. Sei $(T, <)$ eine Halbordnung. Wir nennen $(T, <)$ Totalordnung, falls zwei beliebige Elemente $a, b \in T$ vergleichbar sind, d.h.

$$\forall a, b \in T : (a \leq b) \vee (b \leq a)$$

Wir bezeichnen eine totalgeordnete Teilmenge einer Halbordnung auch als **Kette**.

Definition 2.3. Sei $(T, <)$ eine Halbordnung. Dann nennen wir $(T, <)$ **Wohlordnung**, falls jede nichtleere Teilmenge von T ein kleinstes Element besitzt, d.h.

$$\forall S \neq \emptyset,\ S \subseteq T\ \exists s_0 \in S :\ s_0 \leq s \quad \forall s \in S$$

Definition 2.4. Sei $(T, <)$ eine Halbordnung. Eine Teilmenge S von T heißt **initiales Segment** von T, falls S die Bedingung

$$\forall s \in S, r \in T : r < s \Rightarrow r \in S$$

erfüllt. Für $t \in T$ definieren wir die **Sektion** von t als

$$T_t := \{s \in T\ | s < t\}$$

Lemma 2.5. *Sei $(T, <)$ eine Halbordnung. Dann gilt:*

i) Jede Sektion ist initiales Segment

ii) T ist initiales Segment, aber keine Sektion

iii) Ist jedes S_i für $i \in I$ initales Segment, dann ist auch $\cup_{i \in I} S_i$ initales Segment

Lemma 2.6. *Sei $(T, <)$ eine Wohlordnung, $S \subsetneq T$. Dann ist S initiales Segment genau dann, wenn $S = T_t$ für ein $t \in T$ ist.*

Beweis. Wir nehmen an, S sei initiales Segment. Es ist $S^c \neq \emptyset$, und da T wohlgeordnet ist, hat S^c ein kleinstes Element s_0. Da jede Wohlordnung eine Totalordnung ist, folgt $S = T_{s_0}$. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Satz 2.7 (Fixpunktsatz). *Sei $(T, <)$ eine Halbordnung mit der Eigenschaft, dass jede Kette in T ein Supremum (=kleinste obere Schranke) hat. Ist eine Abbildung f*

$$f : T \to T$$

gegeben, die die Bedingung

$$\forall t \in T : f(t) \geq t$$

erfüllt, dann hat f einen Fixpunkt in T, d.h. es existiert ein $t_0 \in T$ mit $f(t_0) = t_0$.

Beweis. Da jede Kette in T ein Supremum hat, ist die Funktion

$$g : \{\text{Ketten in } T\} \to T, \quad C \mapsto \sup(C)$$

wohldefiniert. Jede Sektion C_t einer Kette C ist wiederum eine Kette, also ist $g(C_t)$ für alle $t \in T$ wohldefiniert. Wir bezeichnen eine Kette C, die wohlgeordnet ist und

$$f(g(C_t)) = t \quad \forall t \in C$$

erfüllt, als *f-Kette*.

Behauptung: Jedes initiale Segment einer f-Kette ist wiederum eine f-Kette: Sei B initiales Segment von C, und sei C eine f-Kette. Der Fall $B = C$ ist trivial, sei also $B \neq C$. Da C wohlgeordnet ist, können wir Lemma 2.6 anwenden, daher gibt es ein $s \in C$ mit $B = C_s$. Für $t \in B$ folgt $B_t = (C_s)_t = C_t$, womit $f(g(B_t)) = f(g(C_t)) = t$ für alle $t \in B$ gezeigt ist.

Behauptung: Sei C eine f-Kette, $\mathcal{S}$ die Menge aller initialen Segmente von C, dann ist $(\mathcal{S}, \subseteq)$ eine Wohlordnung: Sei $(S_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie initialer Segmente von C mit O.B.d.A. $S_i \neq C$. Nach Lemma 2.6 gibt es für jedes $i \in I$ ein $t_i \in C$ mit $S_i = C_{t_i}$. Ist t_j $(j \in I)$ kleinstes Element der Menge $\{t_i \mid i \in I\}$, dann ist $S_j = C_{t_j}$ bezüglich $\subseteq$ kleinstes Element von $(S_i)_{i \in I}$.

Die folgende Tatsache ist ein zentraler Punkt im Beweis dieses Satzes:

Behauptung: Seien C, D jeweils f-Ketten. Dann ist entweder C initiales Segment von D oder D initiales Segment von C: Nehmen wir an, D sei kein initiales Segment von C. Definieren wir $\mathcal{S}$ als die Menge aller initialen Segmente von D, so wissen wir aufgrund der vorigen Behauptung, dass $(\mathcal{S}, \subseteq)$ eine Wohlordnung ist. Die Menge aller initialen Segmente von D, die keine initialen Segmente von C sind, enthält nach Voraussetzung D, ist somit nichtleer und hat deshalb ein (bezüglich $\subseteq$) kleinstes Element A.
Die Menge A hat ein größtes Element: Hätte A kein größtes Element, so wäre die Menge $A_a \cup \{a\}$ für jedes $a \in A$ echte Teilmenge von A und somit nach Definition von A initiales Segment von C. Damit wäre aber auch

$$\bigcup_{a \in A} A_a \cup \{a\} = A$$

initiales Segment von C, Widerspruch. Sei also t das größte Element von A.
A_t ist sowohl initiales Segment von C als auch von D. Gilt $A_t = C$, so sind wir fertig. Wir wollen also die Annahme $A_t \neq C$ auf einen Widerspruch führen: Im Fall $A_t \neq C$ besitzt die Menge $C \setminus A_t$ als nichtleere Teilmenge einer Wohlordnung ein kleinstes Element u. Wir zeigen

$$D_t = A_t = C_u$$

Um die erste Gleichheit einzusehen, erinnern wir uns daran dass $A = A_t \cup \{t\}$ initiales Segment von D ist und daher für $d \in D$ mit $d < t$ schon $d \in A_t$ folgt. Für die zweite Gleichheit wenden

wir Lemma 2.6 auf A_t aufgefasst als initiales Segment von C an und erhalten $A_t = C_z$ für ein $z \in C$. Die Annahme $u < z$ führt auf $u \in A_t$, Widerspruch. Es muss also $A_t = C_z \subseteq C_u$ gelten. Die jeweiligen anderen Inklusionen sind offensichtlich.
Unter Ausnützung der Tatsache, dass C und D jeweils f-Ketten sind, erhalten wir

$$t = f(g(D_t)) = f(g(C_u)) = u$$

Woraus folgt, dass $A = A_t \cup \{t\} = C_u \cup \{u\}$ initiales Segment von C ist, im Widerspruch zur Definition von A. Damit muss also C initiales Segment von D sein.

Sei S die Vereinigung aller f-Ketten in T. Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir

1) $S \neq \emptyset$
2) S ist wohlgeordnet
3) $t = f(g(S_t))$ für alle $t \in S$, S ist also f-Kette
4) Keine echte Obermenge von S ist f-Kette

1) Trivialerweise ist die leere Menge eine Kette, also können wir $t := g(\emptyset)$ und $C := \{f(t)\}$ setzen. Damit folgt $f(g(C_{f(t)})) = f(g(\emptyset)) = f(t)$ und somit ist C eine f-Kette.
2) Sei $W \subseteq S, W \neq \emptyset$. Für $x \in W$ gibt es eine f-Kette C mit $x \in C$. Sei $V := W \cap C$, dann gibt es da C wohlgeordnet ist ein $r \in V$ sodass $r \leq v$ für alle $v \in V$ erfüllt ist. Für $w \in W$ gibt es eine f-Kette D mit $w \in D$. Ist D initiales Segment von C, so folgt $D \subseteq C$ und somit $r \leq w$. Ist C initiales Segment von D mit O.B.d.A. $C \neq D$, dann gilt $C = D_t$ nach Lemma 2.6 für ein $t \in D$ und es folgt $r \leq w$.
3) Sei $t \in S$, sei A eine f-Kette die $t \in A$ erfüllt. Dann gilt $S_t = A_t$: Ist $y \in S_t$, so gibt es eine f-Kette B mit $y \in B$. Ist A initiales Segment von B, folgt wegen $y < t$ und $t \in A$ unmittelbar $y \in A_t$. Ist B initiales Segment von A, so folgt direkt $B \subseteq A$ und damit ebenfalls $y \in A_t$. Damit ergibt sich

$$t = f(g(A_t)) = f(g(S_t)) \quad \forall t \in S$$

Es ist daher S wiederum eine f-Kette, und offenbar kann es keine echte Obermenge von S geben, die ebenfalls f-Kette ist.

Das nützen wir aus, um einen Fixpunkt t_0 der Abbildung f zu finden. Wir setzen

$$t_0 := f(g(S)) \geq g(S)$$

t_0 ist damit eine obere Schranke von S. Wäre $t_0 \notin S$, so wäre $S \cup \{t_0\}$ eine f-Kette, die eine echte Obermenge von S wäre, ein Widerspruch zu 4). Daher ist $t_0 \in S$ und $t_0 \leq g(S)$, es folgt $t_0 = g(S)$. Wir erhalten insgesamt

$$t_0 = f(g(S)) = f(t_0)$$

□

3 Das Lemma von Zorn

Das folgende Kapitel beruht auf [1].

Definition 3.1. Es sei daran erinnert, dass wir ein Element $m \in T$ genau dann **maximal** nennen, wenn

$$m \not< t \quad \forall t \in T$$

erfüllt ist, d.h. es gibt in T kein mit m vergleichbares Element, das echt größer als m ist. Maximale Elemente brauchen keine größten Elemente zu sein. Wir formulieren nun das Lemma von Zorn:

Satz 3.2 (Lemma von Zorn)**.** *Sei $(T, <)$ eine Halbordnung mit der Eigenschaft, dass jede Kette in T eine obere Schranke in T hat. Dann gibt es in T ein maximales Element.*

Satz 3.3. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Lemma von Zorn.*

Beweis. [$\Rightarrow$]: Es gelte das Auswahlaxiom. Wir führen den Beweis indirekt: Hat $(T, <)$ kein maximales Element, so ist für jedes $x \in T$ die Menge

$$T^x := \{t \in T : x < t\}$$

nichtleer, und nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Funktion φ mit

$$\varphi : T \to \bigcup_{x \in T} T^x \quad x \mapsto \varphi(x) \in T^x$$

Die Funktion φ erfüllt also insbesondere

$$\varphi(x) > x$$

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Ketten in $(T, <)$. Dann ist $(\mathcal{C}, \subseteq)$ eine Halbordnung. Nach Voraussetzung hat jedes $C \in \mathcal{C}$ eine (bezüglich $<$) obere Schranke in T, unter Verwendung des Auswahlaxioms können wir deshalb eine Funktion g definieren, sodass $g(C)$ obere Schranke von C ist. Wir definieren eine Funktion f

$$f : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \quad C \mapsto C \cup \{\varphi(g(C))\}$$

Offenbar gilt für $c \in C$ stets $\varphi(g(C)) > c$, damit folgt

$$C \subsetneq f(C) \tag{1}$$

Die Elemente einer Kette in $(\mathcal{C}, \subseteq)$ sind Ketten in $(T, <)$. Für eine solche Kette $(C_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{C}$ gilt (sup bezüglich $\subseteq$)

$$\sup((C_i)_{i \in I}) = \bigcup_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}$$

Wir können daher Satz 2.7 auf $(\mathcal{C}, \subseteq)$ (bzw. $(\mathcal{C}, \subsetneq)$) zusammen mit der Funktion f anwenden, und erhalten die Existenz einer Kette $C_0 \in \mathcal{C}$ mit $f(C_0) = C_0$, ein Widerspruch zu (1).

[$\Leftarrow$]: Es gelte das Lemma von Zorn. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \bigcup_{J \subseteq I} \prod_{i \in J} A_i$$

Im Folgenden wird es nützlich sein, die Elemente von $\mathcal{A}$ als Relationen aufzufassen.

Eine Relation $f \subseteq I \times \bigcup_{i\in I} A_i$ liegt genau dann in $\mathcal{A}$, wenn f die Bedingungen

1. $(i,x) \in f \;\Rightarrow\; x \in A_i$
2. $(i,x),(i,y) \in f \;\Rightarrow\; x = y$.

erfüllt. Damit wird $(\mathcal{A}, \subseteq)$ zu einer Halbordnung, in der offenbar $f \subseteq g$ genau dann gilt wenn g eine Fortsetzung von f ist.
Wir wollen nun zeigen, dass jede Kette in $\mathcal{A}$ eine obere Schranke hat. Sei dazu C eine Kette in $(\mathcal{A}, \subseteq)$ und sei f_0 die Vereinigung über alle f in C. Wir überzeugen uns davon, dass f_0 in $\mathcal{A}$ liegt:

1. Sei $(i,x) \in f_0$. Dann gibt es ein $g \in C$ mit $(i,x) \in g$ und es folgt $x \in A_i$.
2. Sei $(i,x),(i,y) \in f_0$. Dann gibt es $f, g \in C$ mit $(i,x) \in f$, $(i,y) \in g$. Da C eine Kette ist, können wir O.B.d.A annehmen, dass $f \subseteq g$, woraus $(i,x),(i,y) \in g$ folgt und wegen $g \in \mathcal{A}$ weiter $x = y$.

Offenbar ist f_0 das Supremum von C. Nach dem Lemma von Zorn hat $(\mathcal{A}, \subseteq)$ ein maximales Element F. Sei M der Definitionsbereich von F. Wir wollen nun die Annahme $M \subsetneq I$ auf einen Widerspruch führen: Für $i_0 \in I \setminus M$ sei y $\in A_{i_0}$ (das Auswahlaxiom wird hier nicht gebraucht, siehe Punkt A, Kapitel 1). Sei

$$g := F \cup \{(i_0, y)\}$$

Dann gilt $g \in \mathcal{A}$ und $F \subsetneq g$ im Widerspruch zur Definition von F. Also muss $M = I$ gelten und es folgt

$$F \in \prod_{i\in I} A_i$$

$\square$

4 Der Wohlordnungssatz

Das folgende Kapitel beruht auf der Darstellung in [3].

Satz 4.1 (Wohlordnungssatz)**.** *Sei T eine beliebige Menge. Dann kann auf T eine Relation $\prec$ definiert werden, sodass $(T, \prec)$ eine Wohlordnung ist.*

Satz 4.2. *Der Wohlordnungssatz ist äquivalent zum Auswahlaxiom.*

Beweis. [$\Leftarrow$]: Nach Satz 3.2 können wir annehmen, dass das Lemma von Zorn gilt. O.B.d.A. sei $T \neq \emptyset$. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass eine Relation $<$ auf einer Menge A als Teilmenge von $A \times A$ definiert ist. Die folgende Menge besteht daher aus geordneten Paaren von Mengen:

$$P := \{(B, <_B) : B \subseteq T \text{ und } (B, <_B) \text{ ist Wohlordnung}\}$$

Diese Menge ist nichtleer, da für jedes $t \in T$ die Menge $(\{t\}, \emptyset)$ in P liegt.Wir versehen P mit einer Ordnungsstruktur:

$$(B, <) \prec (C, \ll) \Leftrightarrow B \subseteq C \quad \text{und} \quad \forall a, b \in B : [a < b \Leftrightarrow a \ll b] \quad \text{und} \quad \forall b \in B, \forall c \in C \backslash B : [b \ll c]$$

Damit wird $(P, \prec)$ zu einer Halbordnung. Sei $\mathcal{C}$ eine Kette in $(P, \prec)$. Dann ist mit den Definitionen

$$S := \bigcup_{(B,<_B)\in\mathcal{C}} B \qquad <_S := \bigcup_{(B,<_B)\in\mathcal{C}} <_B$$

$(S, <_S)$ wohlgeordnet: Sei A eine nichtleere Teilmenge von S. Sei $a \in A$ beliebig, dann können wir $(B, <) \in \mathcal{C}$ mit $x \in B$ wählen. Damit ist $A \cap B$ eine nichtleere Teilmenge von B und hat daher ein bezüglich $<$ kleinstes Element x. Wir zeigen, dass es kein $y \in A$ mit $y <_D x$ gibt:
Gibt es ein solches y, so kann man $(C, \ll) \in \mathcal{C}$ mit $x, y \in C$ und $y \ll x$ wählen. Da $\mathcal{C}$ eine Kette ist, muss einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

1. $(C, \ll) \preceq (B, <)$: Es folgt $y \in C \subseteq B$ und damit $y \in A \cap B$, aus $y \ll x$ folgt weiters $y < x$ im Widerspruch zur Definition von x.
2. $(B, <) \prec (C, \ll)$: Wie in Fall 1) überlegt führt die Annahme $y \in B$ auf einen Widerspruch, es muss also $y \in C \setminus B$ gelten. Es folgt $x \ll y$ im Widerspruch zur Wahl von C.

Damit hat A ein kleinstes Element und somit ist $(S, <_S)$ eine Wohlordnung. Offenbar ist $(S, <_S)$ eine obere Schranke von $\mathcal{C}$. Wir haben daher gezeigt, dass jede Kette in $(P, \prec)$ eine obere Schranke hat.
Aus dem Lemma von Zorn folgt nun die Existenz eines maximalen Elements $(M, <) \in P$. Angenommen, es wäre $M \neq T$, dann können wir ein $t \in T \setminus M$ wählen und setzen

$$C := M \cup \{t\} \qquad <_C := < \cup \{(m, t) : m \in M\}$$

Damit haben wir ein Element $(C, <_C) \in P$ gefunden, sodass $(M, <) \prec (C, <_C)$ gilt, Widerspruch. Es muss daher $M = T$ gelten, was zu zeigen war.

[$\Rightarrow$]: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Nach dem Wohlordnungssatz können wir auf $T := \bigcup_{i \in I} A_i$ eine Relation $\prec$ definieren, sodass $(T, \prec)$ wohlgeordnet ist. Setzen wir für $i \in I$

$$\varphi(i) := \text{kleinstes Element von } A_i$$

so gilt

$$\varphi \in \prod_{i \in I} A_i$$

$\square$

5 Satz von Tychonoff

Dieses Kapitel beruht auf [7].

Satz 5.1 (Satz von Tychonoff)**.** *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakte topologische Räume. Dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie kompakt.*

Satz 5.2. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Satz von Tychonoff*

Beweis. Für die Implikation [$\Rightarrow$] verweisen wir auf [8].
[$\Leftarrow$]: Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Wir setzen

$$X_i := A_i \cup \{A_i\}, \quad \mathcal{T}_i := \{\emptyset, A_i, \{A_i\}, X_i\}$$

Damit ist $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt. Nach dem Satz von Tychonoff ist auch $X := \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ kompakt. Betrachten wir nun in X die Familie $(O_j)_{j\in I}$ in $\mathcal{T}$ offener Mengen, die durch

$$O_j = \prod_{i\in I} B_{i,j} \quad \text{wobei} \quad B_{i,j} := \begin{cases} X_i & i \neq j \\ \{A_j\} & i = j \end{cases}$$

definiert ist. Wir zeigen, dass es keine endliche Teilüberdeckung $O_{j_1}, \dots, O_{j_n}$ von X geben kann: Sei $\varphi \in \prod_{k=1}^n A_{j_k}$ (wegen der Endlichkeit des Produkts wird hier das Auswahlaxiom nicht gebraucht, siehe Punkt A, Kapitel 1). Indem wir $\varphi(i) = A_i$ für alle $i \neq j_1, \dots j_n$ festlegen, können wir φ zu einer Funktion auf X fortsetzen, die aber nicht in $\bigcup_{k=1}^n O_{j_k}$ liegt. Es kann also $\bigcup_{j\in I} O_j$ keine Überdeckung von X sein. Daraus folgt, dass es eine Funktion $f \in X \setminus \bigcup_{j\in I} O_j$ gibt. Das bedeutet genau, dass für kein $j \in I$ die Bedingung $f(j) = A_j$ erfüllt sein kann, also folgt

$$f(j) \in A_j \quad \forall j \in I \quad \Rightarrow \quad f \in \prod_{i\in I} A_i$$

$\square$

6 Unlösbarkeit des Maßproblems

Dieses Kapitel beruht auf der Darstellung in [2]. Unter dem Maßproblem verstehen wir die folgende Fragestellung: Existiert eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, die die Eigenschaften

- *Kongruenz:* $\mu(A) = \mu(B)$ falls A kongruent zu B ist
- *Normiertheit:* $\mu([0,1]^n) = 1$
- *σ-Additivität:* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$

erfüllt? Der Titel dieses Abschnitts nimmt die Antwort vorweg.

Satz 6.1. *Das Maßproblem ist für alle $n \in \mathbb{N}$ unlösbar.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$. Wir wollen einen indirekten Beweis führen. Definiere

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

Sei $(x_i + \mathbb{Q})_{i \in I}$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ die Familie aller Nebenklassen dieser Äquivalenzrelation. Die Menge $\{x_i : i \in I\}$ sei also ein vollständiges Repräsentantensystem. Wegen $x_i - \lfloor x_i \rfloor \in [0, 1]$ sehen wir ein, dass für alle $i \in I$ stets $(x_i + \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \neq \emptyset$ gilt. Nach dem Auswahlaxiom gibt es deshalb eine Funktion φ mit

$$\varphi \in \prod_{i \in I} (x_i + \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$$

Wir setzen

$$V := \varphi(I)$$

Diese Menge V hat nun die folgenden beiden Eigenschaften:

1. Sind $p, q \in \mathbb{Q}$ und $p \neq q$ dann ist $(p + V) \cap (q + V) = \emptyset$: Definitionsgemäß enthält V genau ein Element aus jeder Nebenklasse. Gäbe es $v_1, v_2 \in V$ mit $p + v_1 = q + v_2$, so würde $v_1 \sim v_2$ und $v_1 \neq v_2$ folgen, ein Widerspruch.

2. Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[-1, 1]$. Dann gilt $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + V)$: Da die Nebenklassen einer Äquivalenzrelation eine Partition bilden, gibt es für $x \in [0, 1]$ ein $i \in I$, sodass x in $(x_i + \mathbb{Q})$ liegt. Für $\varphi(i) = v \in V$ gilt dann $x \sim v$, daher gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = x - v \in [-1, 1]$, es folgt $x = q + v \in (q + V) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + V)$.

Wegen dem zweiten Punkt gilt daher

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + V) \subseteq [-1, 2]$$

Nehmen wir nun an, wir hätten ein Maß μ gefunden, das das Maßproblem löst. Wegen der σ-Additivität würde aus $A \subseteq B$ dann $\mu(A) \leq \mu(B)$ folgen, und wir erhalten unter Ausnützung der Normiertheitseigenschaft

$$1 \leq \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + V) \right) \leq 3$$

Wobei $\mu([-1, 2]) = 3$ aus $[-1, 2] = [-1, 0] \cup [0, 1] \cup [1, 2]$ und der sich aus der Kongruenzeigenschaft ergebenden Translationsinvarianz von μ folgt. Wegen Eigenschaft 1 sind nun die Mengen $q_n + V$ paarweise disjunkt, und wir erhalten

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(q_n + V) \leq 3$$

Wegen der Translationsinvarianz von μ gilt aber $\mu(q_i + V) = \mu(q_j + V)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, wir können also $c := \mu(q_1 + V) \geq 0$ setzen und erhalten den gewünschten Widerspruch

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} c \leq 3$$

Damit erhält man auch sofort die Unlösbarkeit für beliebiges $n \in \mathbb{N}$: Wäre nämlich μ_n eine Lösung des n-dimensionalen Maßproblems, so könnte man durch

$$\mu(A) := \mu_n(A \times [0,1]^{n-1})$$

eine Lösung des eindimensionalen Problems erhalten. □

Bemerkung 6.2. Da das Lebesgue-Maß auf der $\sigma-$Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen die Axiome einer Lösung des Maßproblems erfüllt, folgt unmittelbar, dass die im obigen Beweis konstruierte Menge V nicht Lebesgue-messbar sein kann. Dabei ging das Auswahlaxiom wesentlich ein, es gilt sogar, dass die Existenz von nicht Lebesgue-messbaren Teilmengen der reellen Zahlen in ZF ohne Verwendung des Auswahlaxioms nicht bewiesen werden kann, siehe dazu [5].

7 Das Banach-Tarski-Paradoxon

Wir wollen zuletzt noch ein bizarr anmutendes Ergebnis anführen (jedoch nicht beweisen), das unter Verwendung des Auswahlaxioms hergeleitet werden kann:

Satz 7.1 (Banach-Tarski-Paradoxon)**.** *Es sei $n \geq 3$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ seien beschränkte Mengen mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es eine Partition von $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ mit paarweise disjunkten Mengen A_i und eine Partition von $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ mit paarweise disjunkten Mengen B_i, sodass für alle $i \in \{1, ..., k\}$ die Menge A_i kongruent zu B_i ist.*

Ein Beweis kann etwa in [6] nachgelesen werden. Zur Illustration, was die paradoxen Konsequenzen dieses Satzes sind: Aus diesem Resultat lässt sich beispielsweise folgern, dass es möglich ist, eine Kugel im $\mathbb{R}^3$ zu partitionieren und die dabei entstehenden Mengen auf eine solche Weise Translationen, Drehungen und Spiegelungen zu unterziehen sodass die Bilder dieser Mengen danach eine Partition *zweier* Kugeln mit gleichem Durchmesser bilden (oder von 10^6 Kugeln mit tausendfachem Durchmesser...).

Bemerkung 7.2. Indem man z.B. das oben angeführte Beispiel mit der Kugel im $\mathbb{R}^3$ betrachtet, sieht man sofort ein, dass die Partitionen in Satz 7.1 im Allgemeinen nicht Lebesgue-messbar sind.

Literatur

[1] Martin Blümlinger. *Analysis 3, WS 2013/14*. http://www.asc.tuwien.ac.at/~blue.

[2] Donald L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser/Springer, New York, second edition, 2013.

[3] Don Monk. *Graduate Set Theory*. http://euclid.colorado.edu/~monkd/m6730/gradsets05.pdf.

[4] Jerry Shurman. The Axiom of Choice, Zorn's lemma and the Well Ordering Principle. http://people.reed.edu/~jerry/332/23zorn.pdf.

[5] Robert M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. of Math. (2)*, 92:1–56, 1970.

[6] Karl Stromberg. The Banach-Tarski paradox. *Amer. Math. Monthly*, 86(3):151–161, 1979.

[7] John Terilla. Tychonoff's theorem. http://math.hunter.cuny.edu/mbenders/notes4.pdf.

[8] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, and Martin Blümlinger. *Funktionalanalysis*. http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/fana2015.pdf.