Harmonische Polynome

Seminararbeit aus Analysis

Claudio Rojik

17.6.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Seminararbeit beschäftigen wir uns mit harmonischen Polynomen im $\mathbb{R}^n$ als einem Teilgebiet der Theorie harmonischer Funktionen. Am Anfang werden wir untersuchen, inwiefern harmonische Polynome mit gewöhnlichen Polynomen im Zusammenhang stehen, bevor wir dazu kommen werden, harmonische Polynome auf dem L^2-Vektorraum zu betrachten.
Aus der Geographie ist der Begriff des Breitenkreises bekannt. Diese Breitenkreise auf der (n-dimensionalen) Kugel kann man auch mit einer speziellen Art von harmonischen Polynomen beschreiben, woraus klar hervorgeht, dass man harmonische Polynome auch von einem geometrischen Standpunkt aus betrachten kann. Diese geometrische Charakterisierung bildet den Abschluss dieser Arbeit, um die Betrachtung der harmonischen Polynome abzurunden und etwas anschaulicher zu gestalten.

In diesem ersten Abschnitt werden nun Definitionen und Sätze gebracht, die wir in späteren Kapiteln brauchen werden, aber schon bekannt sein sollten. Daher werden sie hier ohne Beweis angegeben oder für einen Beweis wird auf andere Literatur verwiesen.

Bemerkungen zur Notation: Mit $B_r(a)$ bezeichnen wir die offene Kugel um a mit Radius r, B sei eine Kurzschreibweise für $B_1(0)$, mit S bezeichnen wir den Rand von B. Die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\overline{B} := B \cup S$.
Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit μ das Oberflächenmaß auf ∂D, mit σ das normierte Oberflächenmaß auf ∂D.
Für die euklidische Norm von x auf $\mathbb{R}^n$ schreiben wir außerdem meist $|x| := \|x\|_2$.

1.1 Polynome im $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Definition. Seien Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, ein n-Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Dabei seien $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Ein Polynom auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ von der Gestalt

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha,$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ und über alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$ summiert wird.
Der *Grad* des Polynoms $\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha$ beträgt m, wenn es einen Multiindex α mit $|\alpha| = m$ gibt, sodass $c_\alpha \neq 0$.

1.1.2 Definition. Ein Polynom der Gestalt

$$\sum_{|\alpha| = m} c_\alpha x^\alpha$$

heißt *homogenes Polynom vom Grad m.*

1.1.3 Bemerkung. Homogene Polynome p vom Grad m erfüllen klarerweise

$$p(tx) = t^m p(x).$$

1.1.4 Definition. Sei $f : D \to \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnet der *Laplace-Operator* $\Delta f : D \to \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).$$

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *harmonisch*, wenn $\Delta f \equiv 0$.

1.1.5 Definition. Den komplexen Vektorraum aller homogenen Polynome auf dem $\mathbb{R}^n$ vom Grad m bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$. Den Vektorraum der homogenen, harmonischen Polynome vom Grad m bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$. Klarerweise kann man jedes Polynom p vom Grad m eindeutig als $p = \sum_{j=0}^{m} p_j$ mit $p_j \in \mathcal{P}_j(\mathbb{R}^n)$ schreiben. Das Polynom p_j heißt dabei *homogener Teil* von p vom Grad j.

1.1.6 Bemerkung. Durch partielle Differentiation sieht man, dass zwei Polynome genau dann gleich sind, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen. Das ist aber genau dann der Fall, wenn die homogenen Teile von jedem Grad übereinstimmen.
Da der Laplace-Operator mit der Summation vertauscht und der Laplace-Operator angewandt auf ein homogenes Polynom vom Grad m ein homogenes Polynom vom Grad $m - 2$ ergibt, ist ein Polynom genau dann harmonisch, wenn jeder homogene Teil harmonisch ist.

1.1.7 Beispiel. Sei (x, y, z) ein Punkt im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$p(x, y, z) = 8x^5 - 40x^3y^2 + 15xy^4 - 40x^3z^2 + 30xy^2z^2 + 15xz^4 \in \mathcal{H}_5(\mathbb{R}^3)$$

1.2 Definitionen und Sätze aus der Analysis

1.2.1 Satz (Greenscher Integralsatz). Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und seien $p, q : O \to \mathbb{R}$ beide C^2 auf einer offenen, $\overline{G}$ enthaltenden Menge O. Sind die Träger von p und q in $G \cup \partial^o G$ enthalten, so folgt

$$\int_G (p(x)\Delta q(x) - q(x)\Delta p(x))\, d\lambda_n(x) = \int_{\partial^o G} (p(y)\frac{\partial q}{\partial \nu(y)}(y) - q(y)\frac{\partial p}{\partial \nu(y)}(y))\, d\mu(y).$$

Beweis. Für einen Beweis siehe [K2], Korollar 15.7.8.

□

1.2.2 Satz (Stone-Weierstrass). Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ eine punktetrennende Algebra stetiger, komplexwertiger Funktionen auf einer kompakten Menge K, sodass mit $f \in \mathcal{A}$ auch die komplex konjugierte Funktion $\overline{f} \in \mathcal{A}$ ist. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in der Algebra $C(K) := \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf K.

Beweis. Für einen Beweis siehe [K1], Korollar 12.10.4.

□

1.2.3 Bemerkung. Der Vektorraum der Polynome $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$, eingeschränkt auf irgendein kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}^n$, erfüllt die Bedingungen des Satzes von Stone-Weierstraß.

1.2.4 Satz. Sei X ein topologischer Vektorraum und Y ein n-dimensionaler linearer Teilraum von X ($n \in \mathbb{N}$). Dann ist Y abgeschlossen.

Beweis. Für einen Beweis siehe [W], Satz 2.1.16.

□

1.2.5 Satz (Maximumprinzip). Sei eine stetige Funktion $u : \overline{B} \to \mathbb{C}$ harmonisch auf B. Dann liegt das Maximum von $|u|$ auf S.

Folgender Begriff wird in Kapitel 2.4 wichtig sein.

1.2.6 Definition. Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die $|Tx| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, heißt orthogonale Transformation. Die Gruppe der orthogonalen Transformationen auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $O(n)$.

1.2.7 Bemerkung. Orthogonale Transformationen bilden den Rand der Einheitskugel auf sich selbst ab.
Eine Transformation T ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten der Matrix von T (bezüglich der kanonischen Basis) ein orthonormales System bilden.

1.2.8 Lemma. Der Raum $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ ist $O(n)$-invariant. Das bedeutet, dass für ein $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ und für ein $T \in O(n)$ auch $p \circ T \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ liegt.

2 Harmonische Polynome auf $\mathbb{R}^n$

2.1 Motivation und Grundlagen

Ausgangspunkt für die Betrachtung von harmonischen Polynomen stellt das *Dirichlet-Problem* auf der n-dimensionalen Kugel dar.

2.1.1 Satz. Sei $f \in C(S)$. Dann existiert eine eindeutige Funktion $u \in C(\overline{B})$, sodass u harmonisch auf B ist und die Einschränkung von u auf die Kreislinie gleich f ist, das heißt $u|_S = f$. So eine Funktion u ist von der Gestalt

$$u(x) = P[f](x) = \int_S f(\zeta) P(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{1}$$

mit dem Poisson-Kern

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n}.$$

2.1.2 Bemerkung. Da der Poisson-Kern $P(x,\zeta)$ als Funktion von x harmonisch ist, folgt daraus, dass auch $P[f](x)$ als Funktion von x harmonisch auf B ist.

Das nächste Resultat ist bereits etwas überraschend. Angenommen f sei ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$ eingeschränkt auf S. Unser nächster Satz zeigt, dass dann auch $P[f]$ ein Polynom ist, obwohl der Poisson-Kern selber kein Polynom ist.

2.1.3 Satz. Sei p ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$ vom Grad m. Dann gilt

$$P[p|_S] = (1-|x|^2)q + p$$

mit einem Polynom q vom Grad höchstens $m-2$.

Beweis. Sei p ein Polynom vom Grad m. In den Fällen $m = 0$ und $m = 1$ ist p harmonisch, und $P[p|_S] = p$ folgt direkt aus der eindeutigen Lösbarkeit des Dirichlet-Problems, indem man in $u(x) = P[f](x)$ für u gleich p und für f gleich $p|_S$ setzt. Daher folgt die Behauptung des Satzes, indem man $q = 0$ setzt.
Wir nehmen daher an, dass $m \geq 2$ gilt. Für jedes Polynom q gilt $(1-|x|^2)q + p = p$ auf S, weil für jedes $x \in S$ immer $(1-|x|^2) = 0$. Die Funktion $(1-|x|^2)q+p$ ist daher offensichtlich ein Kandidat für die gewünschte Lösung, da diese Funktion die Randbedingung erfüllen würde. Wenn wir daher ein Polynom q finden, sodass $(1-|x|^2)q+p$ harmonisch ist, würde diese Funktion das Dirichlet-Problem mit Randdaten $p|_S$ lösen. Wir müssen also ein Polynom q vom Grad höchstens $m-2$ finden, das die Gleichung

$$\Delta((1-|x|^2)q) = -\Delta p \tag{2}$$

erfüllt. Dazu bezeichnen wir mit W den Vektorraum aller Polynome auf $\mathbb{R}^n$ vom Grad kleiner gleich $m-2$ und definieren eine lineare Abbildung T durch

$$\begin{aligned} T : W &\to W \\ q &\mapsto \Delta((1-|x|^2)q). \end{aligned}$$

Als erstes zeigen wir, dass T eine injektive Abbildung ist. Wenn $T(q) = 0$, dann ist $(1 - |x|^2)q$ eine harmonische Funktion, die auf S gleich Null ist. Diese Funktion ist dann auch auf ganz B Null (weil nach dem Maximumprinzip diese Funktion ihr Maximum auf S annimmt), woraus $q = 0$ folgt. Daher ist T injektiv. Injektive Selbstabbildungen in endlichdimensionalen Vektorräumen sind gleichzeitig surjektiv, daher folgt die Existenz eines Polynoms q vom Grad $m - 2$, sodass (2) erfüllt ist.

□

2.1.4 Korollar. Kein Polynom (außer dem Nullpolynom), das ein Vielfaches von $|x|^2$ ist, ist harmonisch.

Beweis. Der Beweis wird durch einen Widerspruchsbeweis geführt. Sei p ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$ vom Grad m ungleich dem Nullpolynom und sei $|x|^2p$ harmonisch. Da auf S gilt, dass $p|_S = (|x|^2p)|_S$, muss für das Poisson-Integral $P[p|_S] = |x|^2p$ gelten (siehe (1)). Dieses Polynom ist aber vom Grad $m + 2$, was ein Widerspruch zu Satz 2.1.3 ist, wonach der Grad von $P[p|_S]$ höchstens m beträgt.

□

2.2 Die Vektorräume $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$

In diesem Abschnitt werden wir die beiden Vektorräume genauer betrachten und feststellen, in welcher Beziehung sie zueinander stehen. Das wichtigste Resultat ist dabei folgendes:

2.2.1 Proposition. Sei $m \geq 2$. Dann gilt

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\oplus$ die direkte Summe der beiden Räume bezeichnet.

Beweis. Sei $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt aus Satz 2.1.3, dass

$$p = P[p|_S] + |x|^2q - q$$

für ein Polynom q vom Grad höchstens $m - 2$. Nimmt man auf beiden Seiten der Gleichung jetzt nur den homogenen Teil vom Grad m, erhält man

$$p = p_m + |x|^2q_{m-2},$$

wobei $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ (die Harmonizität von p_m folgt dabei aus Bemerkung 1.1.6) und $q_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. (Das alleinstehende Polynom q ist höchstens vom Grad $m-2$ und taucht daher hier nicht mehr auf.) Es wurde also gezeigt, dass man jedes Polynom aus $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ als Summe eines Elements aus $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ und eines Elements aus $|x|^2\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ schreiben kann. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Angenommen es existiert eine zweite Zerlegung $p = \tilde{p}_m + |x|^2\tilde{q}_{m-2}$ mit $\tilde{p}_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{q}_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Für diese gilt natürlich

$$p_m + |x|^2q_{m-2} = p = \tilde{p}_m + |x|^2\tilde{q}_{m-2}.$$

Umformen ergibt

$$p_m - \tilde{p}_m = |x|^2(\tilde{q}_{m-2} - q_{m-2}).$$

Die linke Seite ist als Differenz zweier harmonischer Funktionen wieder harmonisch, die rechte Seite ist ein Polynom, das ein Vielfaches von $|x|^2$ darstellt. Die rechte Seite muss daher auch harmonisch sein. Nach Korollar 2.1.4 kann aber die Differenz $\tilde{q}_{m-2} - q_{m-2}$ daher nur das Nullpolynom sein. Daraus folgt sofort $p_m = \tilde{p}_m$ und $q_{m-2} = \tilde{q}_{m-2}$.

□

Mittels vollständiger Induktion folgt daraus sofort folgendes Resultat.

2.2.2 Satz. Jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ kann eindeutig geschrieben werden als

$$p = p_m + |x|^2 p_{m-2} + \ldots + |x|^{2k} p_{m-2k},$$

mit $k = [\frac{m}{2}]$ und $p_j \in \mathcal{H}_j(\mathbb{R}^n)$. ($[\frac{m}{2}]$ bezeichnet die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{m}{2}$.)

Beweis. In den Fällen $m = 0$ und $m = 1$ ist die Aussage trivial, da $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ gilt. Wir betrachten daher nur $m \geq 2$. Angenommen es sei $p_m \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$. Wir wissen aus der vorigen Proposition, dass wir p schreiben können als

$$p = p_m + |x|^2 q \tag{3}$$

mit $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ und $q \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Jetzt wird ein Induktionsbeweis geführt: Der Induktionsanfang ist klar. Für den Induktionsschritt ersetzen wir m durch $m-2$. Zerlegt man das Polynom q gemäß der Behauptung und setzt es in (3) ein, erhält man die gewünschte Zerlegung des Polynoms p. Diese Zerlegung ist außerdem eindeutig wegen der Eindeutigkeit von p_m und der Zerlegung von q.

□

2.2.3 Bemerkung. Dieser Satz ist besonders dann wichtig, wenn wir alle Funktionen nur auf S betrachten. In diesem Fall ist ja $|x| = 1$, woraus folgt, dass man homogene Polynome in eine Summe von homogenen, harmonischen Polynomen zerlegen kann.

2.2.4 Proposition. Sei $m \geq 2$. Dann gilt:

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ n-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+m-3 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Beweis.
1. Schritt: Bestimmen von $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$.
Da die Monome $\{x^\alpha : |\alpha| = m\}$ eine Basis des Raumes $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ darstellen, ist $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ gleich der Anzahl an unterschiedlichen Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, bei denen $|\alpha| = m$ gilt. Addiert man nun zu jedem Eintrag α_j der Multiindizes 1, bekommt man, dass $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ die Anzahl an unterschiedlichen Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $\alpha_j > 0$ und $|\alpha| = n + m$ ist. Betrachte nun das Intervall $(0, n+m) \subseteq \mathbb{R}$. Entfernt man daraus $n-1$ natürliche Zahlen, so wird das Intervall in n disjunkte offene Intervalle geteilt. Bezeichnen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ die Längen dieser disjunkten Intervalle, ohne Beschränkung der Allgemeinheit aufsteigend geordnet, bekommt man

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n + m.$$

Durch jede Wahl der $n-1$ natürlichen Zahlen aus dem Intervall wird somit eindeutig ein Multiindex erzeugt, der $|\alpha| = n+m$ und $\alpha_j > 0$ erfüllt. Die Anzahl an Wahlmöglichkeiten für die $n-1$ Zahlen beträgt $\begin{pmatrix} n+m-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt sofort

$$\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

<u>2. Schritt:</u> Bestimmen von $\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.
Aus Proposition 2.2.1 wissen wir, dass

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) - \dim \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

gilt. In Verbindung mit dem ersten Schritt folgt somit das gewünschte Resultat.

$\square$

2.3 Zerlegung des Raumes $L^2(S)$ mittels Spherical Harmonics

In Proposition 2.2.1 wurde gezeigt, dass man den Raum $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ in eine direkte Summe des Raumes der harmonischen homogenen Polynome vom Grad m und $|x|^2$ mal des Raumes der homogenen Polynome vom Grad $m-2$ zerlegen kann. In diesem Abschnitt werden wir uns nicht nur mit direkten Summen, sondern besonders mit orthogonalen direkten Summen beschäftigen. Dafür müssen wir ein Skalarprodukt einführen.
Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt jetzt mit dem Raum $L^2(S)$ und dem darauf definierten Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_S f\overline{g}\, d\sigma.$$

Beim Hauptresultat dieses Abschnittes handelt es sich um eine orthogonale Zerlegung des Raumes $L^2(S)$. Zuvor benötigen wir aber noch eine Proposition, die zeigt, dass zwei homogene, harmonische Polynome von unterschiedlichen Graden bezüglich unseres Skalarprodukts orthogonal zueinander sind.

2.3.1 Proposition. Seien p und q Polynome auf $\mathbb{R}^n$, und sei q harmonisch und homogen mit höherem Grad als p. Dann gilt

$$\int_S pq\, d\sigma = 0.$$

Beweis. Bei diesem Resultat gehen nur die Werte von p und q auf S ein. Da man nach Satz 2.2.2 das Polynom p in eine Summe homogener harmonischer Polynome zerlegen kann, reicht es wegen der Linearität des Integrals, die Behauptung auch für homogene harmonische Polynome $p \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ und $q \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ mit $k < m$ zu zeigen.
Aus dem Greenschen Integralsatz (Satz 1.2.1) folgt wegen der Harmonizität von p und q, dass die linke Seite der Gleichung

$$\int_B (p(x)\Delta q(x) - q(x)\Delta p(x))\, d\lambda_n(x) = \int_S (p(y)\frac{\partial q}{\partial \nu(y)}(y) - q(y)\frac{\partial p}{\partial \nu(y)}(y))\, d\sigma(y)$$

Null ist. Somit gilt zunächst

$$\int_S (p(y)\frac{\partial q}{\partial \nu(y)}(y) - q(y)\frac{\partial p}{\partial \nu(y)}(y))\, d\sigma(y) = 0.$$

Betrachtet man jetzt $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in S$ mit Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, und sieht man sich einen einzelnen Summanden $\tilde{p} = c_\alpha \zeta^\alpha$ aus dem Polynom an, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \nu(\zeta)}(\zeta) &= \nabla \tilde{p}(\zeta) \cdot \zeta \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \zeta_i}(\zeta)\zeta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i}(c_\alpha \zeta^\alpha)\zeta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(c_\alpha \frac{\partial(\zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n})}{\partial \zeta_i} \zeta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(c_\alpha \alpha_i \zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \zeta_i^{\alpha_i - 1} \zeta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots \zeta_n^{\alpha_n} \zeta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i c_\alpha \zeta^\alpha) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \tilde{p}(\zeta) \\
&= k\tilde{p}(\zeta).
\end{aligned}$$

Da dies für alle Multiindizes und somit für alle Summanden im Polynom gilt, folgt wegen der Linearität der Summanden

$$\frac{\partial p}{\partial \nu(\zeta)}(\zeta) = kp(\zeta)$$

für das Polynom p.
Analog sieht man, dass $\frac{\partial q}{\partial \nu(\zeta)}(\zeta) = mq(\zeta)$ für $\zeta \in S$ gilt. Einsetzen in den Greenschen Integralsatz ergibt

$$0 = \int_S (p\frac{\partial q}{\partial \nu} - q\frac{\partial p}{\partial \nu})\, d\sigma = (m-k) \int_S pq\, d\sigma.$$

Wegen der Bedingung $k < m$ muss somit das Integral gleich Null sein, was die Behauptung beweist.

□

2.3.2 Bemerkung. Da für ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ die Einschränkung $|x|^2 p|_S = p|_S \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ gleich ist der Einschränkung von $p \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ auf S, zeigt Proposition 2.3.1, dass die Zerlegung (aus Proposition 2.2.1)

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

eine orthogonale Zerlegung bezüglich dem Skalarprodukt auf $L^2(S)$ ist, wenn wir die Funktionen auf S einschränken.

Diese Einschränkungen kann man genauer betrachten und die Theorie der *Spherical Harmonics* darauf aufbauen.

2.3.3 Definition. Ein *Spherical Harmonic vom Grad m* ist die Einschränkung eines Elements von $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ auf S. Der Raum aller Spherical Harmonics vom Grad m wird als $\mathcal{H}_m(S)$ bezeichnet.

2.3.4 Bemerkung. Dieser Raum lässt sich schreiben als

$$\mathcal{H}_m(S) = \{p|_S : p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Da aus $p|_S \equiv 0$ sofort $p \equiv 0$ folgt, ist das Einschränken auf S injektiv. Daher gilt

$$\dim \mathcal{H}_m(S) = \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n).$$

Notation: Wir verwenden die Schreibweise $\mathcal{H}_m(S)$ vor allem dann, um zu betonen, dass die gegebenen Funktionen nur auf S definiert sind.

Bevor wir den Hauptsatz dieses Abschnitts in Angriff nehmen, bringen wir noch ein Beispiel von Spherical Harmonics.

2.3.5 Beispiel. Sei $n = 3$. Die Funktion

$$q(x,y,z) = 15x - 70x^3 + 63x^5 \ , (x,y,z) \in S$$

liegt in $\mathcal{H}_5(S)$.
Auf den ersten Blick ist q weder harmonisch noch homogen vom Grad 5, aber für $(x,y,z) \in S$ kann man die Funktion auch als

$$q(x,y,z) = 15x(x^2+y^2+z^2)^2 - 70x^3(x^2+y^2+z^2) + 63x^5$$

schreiben. Diese Funktion ist offensichtlich homogen vom Grad 5 und man kann auch nachrechnen, dass sie übereinstimmt mit der Funktion p, die durch

$$p(x,y,z) = 8x^5 - 40x^3y^2 + 15xy^4 - 40x^3z^2 + 30xy^2z^2 + 15xz^4$$

definiert ist (vgl. Beispiel 1.1.7). Somit gilt $q = p|_S$, und q ist wirklich ein Element von $\mathcal{H}_5(S)$.

Für den Satz über die Zerlegung des Raumes $L^2(S)$ wiederholen wir einen Teil aus der Hilbertraumtheorie.

2.3.6 Definition. Sei H ein (komplexer) Hilbertraum. Man schreibt dann $H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m$ und bezeichnet H als direkte (orthogonale) Summe der Räume H_m, wenn die nachfolgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- H_m ist ein abgeschlossener Teilraum von H für jedes m.
- H_m ist orthogonal zu H_k, falls $m \neq k$.
- Für alle $x \in H$ existieren $x_m \in H_m$, sodass

  $$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots,$$

  wobei die Summe in der Norm des Hilbertraumes H konvergiert.

Sind diese Bedingungen erfüllt, ist die Zerlegung aus dem dritten Punkt eindeutig.

2.3.7 Bemerkung. Sind die ersten beiden Punkte erfüllt, so gilt der dritte Punkt genau dann, wenn die (komplexe) lineare Hülle von $\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m$ dicht in H ist.

Nun können wir die Zerlegung des Raumes $L^2(S)$ in Angriff nehmen.

2.3.8 Satz. Es gilt $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$.

Beweis. Wir müssen die drei Punkte aus obiger Definition nachprüfen, wobei wir $H := L^2(S)$ und $H_m := \mathcal{H}_m(S)$ setzen.
Der erste Punkt ist erfüllt, weil jeder Raum $\mathcal{H}_m(S)$ ein endlichdimensionaler Teilraum von $L^2(S)$ ist, woraus nach Satz 1.2.4 die Abgeschlossenheit in $L^2(S)$ folgt.
Der zweite Punkt folgt aus Proposition 2.3.1, die besagt, dass $\mathcal{H}_m(S)$ orthogonal ist zu $\mathcal{H}_k(S)$ in $L^2(S)$ für $m \neq k$.
Es bleibt also nur der dritte Punkt zu zeigen. Nach Bemerkung 2.3.7 reicht es zu zeigen, dass die lineare Hülle von $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$ dicht in $L^2(S)$ liegt. Hierfür bemühen wir den Satz von Stone-Weierstrass. Für ein Polynom p folgt aus Satz 2.2.2, dass man $p|_S$ als endliche Summe von Elementen aus $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$ schreiben kann. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass ist die Menge der Einschränkungen $p|_S$ dicht in $C(S)$ bezüglich der Supremumsnorm. Weiters liegt $C(S)$ dicht in $L^2(S)$. Da für die Normen $\|.\|_{L^2} \leq \|.\|_{L^\infty}$ gilt, folgt, dass die lineare Hülle von $\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$ dicht in $L^2(S)$ liegt, womit der dritte Punkt bewiesen ist.

□

2.4 Zonal Harmonics

In diesem Abschnitt betrachten wir eine besondere Art von Spherical Harmonics, nämlich die *Zonal Harmonics*. Mit Hilfe von Zonal Harmonics kann man die eben durchgeführte Zerlegung des $L^2(S)$ anders darstellen.
Zuvor müssen wir den Begriff der Zonal Harmonics einführen und einige Eigenschaften zeigen, die wir brauchen werden.
Sei $\mathcal{H}_m(S)$ ein Skalarproduktraum mit dem $L^2(S)$-Skalarprodukt. Sei ein Punkt $\eta \in S$ fest, und definiere die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{H}_m(S) &\to \mathbb{C} \\ p &\mapsto p(\eta). \end{aligned}$$

Auf $\mathcal{H}_m(S)$ als endlichdimensionalem Skalarproduktraum ist Λ stetig. Somit existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz eine eindeutige Funktion $Z_m(\cdot, \eta) \in \mathcal{H}_m(S)$, die

$$\Lambda(p) = p(\eta) = \langle p, Z_m(\cdot, \eta) \rangle = \int_S p(\zeta) \overline{Z_m(\zeta, \eta)} \, d\sigma(\zeta) \tag{4}$$

für alle $p \in \mathcal{H}_m(S)$ erfüllt.

2.4.1 Definition. Der Spherical Harmonic $Z_m(\cdot, \eta)$ heißt *Zonal Harmonic vom Grad m mit Pol η.*

Bevor wir zu den Eigenschaften von Zonal Harmonics kommen, bringen wir noch ein sehr einfaches Beispiel.

2.4.2 Beispiel. Sei $n = 2$. Dann ist klarerweise $Z_0 \equiv 1$. Die Berechnung von Z_m für $m > 0$ ist aufwendiger und wird daher hier nicht explizit durchgeführt.

2.4.3 Proposition. Sei $\zeta, \eta \in S$ und $m \geq 0$. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. Z_m ist reellwertig.
2. $Z_m(\zeta, \eta) = Z_m(\eta, \zeta)$.
3. $Z_m(\zeta, T(\eta)) = Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)$ für alle $T \in O(n)$.
4. $Z_m(\eta, \eta) = dim\, \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.
5. $|Z_m(\zeta, \eta)| \leq dim\, \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.

Beweis.

1. Angenommen $p \in \mathcal{H}_m(S)$ ist reellwertig. Dann folgt
$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} p(\eta) = \\ &= \operatorname{Im} \int_S p(\zeta) \overline{Z_m(\zeta, \eta)}\, d\sigma(\zeta) = \\ &= -\int_S p(\zeta) \operatorname{Im} Z_m(\zeta, \eta)\, d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$
Definiert man $p(\zeta) := \operatorname{Im} Z_m(\zeta, \eta)$, so liegt p immer noch in $\mathcal{H}_m(S)$ und ist reellwertig, erfüllt also obige Gleichungskette. Einsetzen ergibt
$$\int_S (\operatorname{Im} Z_m(\zeta, \eta))^2\, d\sigma(\zeta) = 0,$$
woraus
$$\operatorname{Im} Z_m(\zeta, \eta) = 0$$
folgt.

2. Sei $h_m := dim\, \mathcal{H}_m(S) = dim\, \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ und wähle eine orthonormale Basis $e_1, \ldots, e_{h_m}$ von $\mathcal{H}_m(S)$. Dann folgt
$$Z_m(\cdot, \eta) = \sum_{j=1}^{h_m} \langle Z_m(\cdot, \eta), e_j \rangle\, e_j = \sum_{j=1}^{h_m} \overline{e_j(\eta)} e_j$$
und daraus
$$Z_m(\zeta, \eta) = \sum_{j=1}^{h_m} \overline{e_j(\eta)} e_j(\zeta). \tag{5}$$
Aus Punkt 1 folgt, dass Z_m reellwertig ist und obiger Ausdruck durch Konjugieren gleich bleibt, woraus 2. folgt.

3. Sei eine orthogonale Transformation $T \in O(n)$ gegeben. Für jedes $p \in \mathcal{H}_m(S)$ gilt wegen Lemma 1.2.8
$$\begin{aligned} p(T(\eta)) &= (p \circ T)(\eta) \\ &= \int_S p(T(\zeta)) Z_m(\zeta, \eta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S p(\zeta) Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)\, d\sigma(\zeta), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Rotationsinvarianz des Maßes σ folgt. Andererseits gilt nach der Definition von Zonal Harmonics

$$p(T(\eta)) = \int_S p(\zeta) Z_m(\zeta, T(\eta))\, d\sigma(\zeta).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zonal Harmonics folgt somit die gewünschte Gleichheit.

4. Aus dem vorigen Punkt wissen wir, dass $Z_m(\zeta, T(\eta)) = Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)$ für alle $T \in O(n)$. Setze hier $\zeta = T(\eta)$. Dann gilt

$$Z_m(T(\eta), T(\eta)) = Z_m(\eta, \eta),$$

woraus folgt, dass die Funktion $\eta \mapsto Z_m(\eta, \eta)$ auf S konstant ist. Aus (5) folgt auch

$$Z_m(\eta, \eta) = \sum_{j=1}^{h_m} |e_j(\eta)|^2.$$

Integriert man nun beide Seiten der Gleichung über S, sieht man, dass

$$\begin{aligned} Z_m(\eta, \eta) &= \int_S \Big(\sum_{j=1}^{h_m} |e_j(\eta)|^2\Big)\, d\sigma(\eta) \\ &= \sum_{j=1}^{h_m} \Big(\int_S |e_j(\eta)|^2\, d\sigma(\eta)\Big) \\ &= h_m \\ &= \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

gilt, wobei man die erste Gleichheit wegen

$$\int_S Z_m(\eta, \eta)\, d\sigma(\eta) = Z_m(\eta, \eta) \int_S 1\, d\sigma(\eta) = Z_m(\eta, \eta)\sigma(S) = Z_m(\eta, \eta)$$

einsieht und die dritte Gleichheit gilt, weil die e_j ein orthonormales System bilden.

5. Wenn man mit $\|\cdot\|$ die Norm auf $L^2(S)$ bezeichnet, dann gilt

$$\|Z_m(\cdot, \eta)\|_2^2 = \langle Z_m(\cdot, \eta), Z_m(\cdot, \eta)\rangle = Z_m(\eta, \eta) = \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$$

und somit weiter

$$\begin{aligned} |Z_m(\zeta, \eta)| &= |\langle Z_m(\cdot, \zeta), Z_m(\cdot, \eta)\rangle| \\ &\leq \|Z_m(\cdot, \zeta)\|_2 \|Z_m(\cdot, \eta)\|_2 \\ &= \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Die Abschätzung folgt hier aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Damit ist auch dieser Punkt bewiesen.

□

In unserem Hauptsatz des vorigen Kapitels (Satz 2.3.8) haben wir $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S)$ gezeigt. Mit Hilfe von Zonal Harmonics kann man diese Tatsache auch anders darstellen.

2.4.4 Satz. Sei $f \in L^2(S)$. Sei $p_m(\eta) = \langle f, Z_m(\cdot, \eta)\rangle$ mit $m \geq 0$ und einem Punkt $\eta \in S$. Dann liegt p_m in $\mathcal{H}_m(S)$ und

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} p_m,$$

wobei die Summe in $L^2(S)$ konvergiert.

Beweis. Aus Satz 2.3.8 wissen wir, dass wir f schreiben können in der Form $f = \sum_{m=0}^{\infty} q_m$ für gewisse $q_m \in \mathcal{H}_m(S)$, wobei die Summe in $L^2(S)$ konvergiert. Beachtet man jetzt, dass Spherical Harmonics von unterschiedlichen Graden orthogonal zueinander sind (Satz 2.3.1), gilt

$$\begin{aligned} p_m(\eta) &= \langle f, Z_m(\cdot, \eta)\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} q_k, Z_m(\cdot, \eta) \right\rangle \\ &= \langle q_m, Z_m(\cdot, \eta)\rangle \\ &= q_m(\eta). \end{aligned}$$

□

2.5 Der Poisson-Kern

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns genauer mit dem Poisson-Kern und zeigen, wie er in Beziehung zu Zonal Harmonics steht.

2.5.1 Bemerkung. Wie wir bereits gesehen haben, kann man ein Element von $\mathcal{H}_m(S)$ eindeutig zu einer Funktion auf $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen (vgl Bemerkung 2.3.4). Dies gilt natürlich auch für Zonal Harmonics. Dabei bezeichne für festes $\zeta \in S$ die Funktion $x \mapsto Z_m(x, \zeta), x \in \mathbb{R}^n$ die (eindeutige) Fortsetzung zu einem Element von $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.

2.5.2 Lemma. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, und sei $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$. Für die Funktion $\zeta \mapsto Z_m(x, \zeta)$ gilt

$$p(x) = \int_S p(\zeta) Z_m(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

mit $Z_m(x, \zeta)$ im obigen Sinn.

Beweis. Im Fall $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= |x|^m p(\frac{x}{|x|}) \\ &= |x|^m \int_S p(\zeta) Z_m(\frac{x}{|x|}, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S p(\zeta) Z_m(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Betrachte nun den Fall $x \in \mathbb{R}^n$, $x = 0$. Ist $m > 0$, so ist $p(x) = 0$ und das Resultat folgt für $Z_m(0, \zeta) := 0$. Im Fall $m = 0$ ist p eine konstante Funktion und man findet eine Funktion $Z_m(0, \zeta)$ mit den gewünschten Eigenschaften, indem man $Z_m(0, \zeta) := 1$ setzt.

□

2.5.3 Proposition. Sei p ein Polynom vom Grad m. Dann gilt

$$P[p|_S](x) = \sum_{k=0}^{m} \int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

für alle $x \in B$.

Beweis. Aus Satz 2.1.3 wissen wir, dass $P[p|_S]$ ein Polynom vom Grad höchstens m ist und sich daher in der Gestalt

$$P[p|_S] = \sum_{k=0}^{m} p_k \tag{6}$$

für homogene harmonische Polynome p_k vom Grad k schreiben lässt. Für alle $x \in B$ und alle k folgt

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \int_S p_k(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S \sum_{j=0}^{m} p_j(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S p(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt dabei aus Lemma 2.5.2, und die zweite Gleichheit gilt wegen der Orthogonalität von Spherical Harmonics von unterschiedlichen Graden, weil p_j und $Z_k(x,\zeta)$ für $j \neq k$ Polynome von unterschiedlichen Graden sind. Die dritte Gleichheit gilt, weil p und das Poissonintegral $P[p|_S] = \sum_{j=0}^{m} p_j$ auf S übereinstimmen (siehe Satz 2.1.3). Einsetzen des Ergebnisses in (6) ergibt die Behauptung.

□

Bevor wir den nächsten wichtigen Satz zeigen können, brauchen wir noch ein technisches Lemma.

2.5.4 Lemma. Sei n eine feste natürliche Zahl. Dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)}{m^{n-2}} \right) = \frac{2}{(n-2)!}.$$

Beweis. Der Beweis wird in 2 Schritten geführt.
1. Schritt: Wir zeigen, dass

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-2}{n-2} + \binom{n+m-3}{n-2}.$$

Man sieht leicht, wenn man folgende Rechenregel $\binom{a+1}{b} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1}$, die bekanntlich für Binomialkoeffizienten gilt, auf beide Ausdrücke anwendet, dass hier sofort

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-3}{n-1} = \binom{n+m-2}{n-2} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

folgt.
2. Schritt: Mit der Schreibweise für die Dimension aus dem ersten Schritt zeigt man jetzt die Aussage des Lemmas. Eine längere Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)}{m^{n-2}} &= \left(\begin{pmatrix} n+m-2 \\ n-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+m-3 \\ n-2 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{m^{n-2}} \\ &= \left(\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!m!} + \frac{(n+m-3)!}{(n-2)!(m-1)!}\right)\frac{1}{m^{n-2}} \\ &= \frac{1}{(n-2)!m!m^{n-2}}\left((n+m-2)! + (n+m-3)!m\right) \\ &= \frac{(n+m-3)!}{(n-2)!m!m^{n-2}}\left(n+2m-2\right).\end{aligned}$$

Durch Aufspalten der Klammer in die einzelnen Summanden sieht man leicht, dass beim Grenzübergang $m \to \infty$ nur der Summand

$$\lim_{m\to\infty} 2m\left(\frac{(n+m-3)!}{(n-2)!m!m^{n-2}}\right)$$

überbleibt, da bei den anderen beiden Summanden m nur in niedrigerer Potenz vertreten ist. Für diesen Ausdruck gilt aber

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} 2m\left(\frac{(n+m-3)!}{(n-2)!m!m^{n-2}}\right) &= 2\lim_{m\to\infty}\frac{(n+m-3)(n+m-4)\cdots(m+2)(m+1)m}{(n-2)!m^{n-2}} \\ &= \frac{2}{(n-2)!}\lim_{m\to\infty}\frac{m^{n-2}+O(m^{n-3})}{m^{n-2}} \\ &= \frac{2}{(n-2)!},\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.

□

2.5.5 Satz. Sei $n \geq 2$. Dann gilt

$$P(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$$

für alle $x \in B$ und $\zeta \in S$. Die unendliche Reihe konvergiert dabei absolut und gleichmäßig auf $K \times S$ für alle kompakten Teilmengen K von B.

Beweis. Sei $n \geq 2$ fest. Dann existiert eine Konstante C, sodass

$$\left|\frac{1}{|x|^m} Z_m(x,\zeta)\right| = \left|Z_m\left(\frac{x}{|x|},\zeta\right)\right| \leq Cm^{n-2}$$

für alle $x \in B$ und $\zeta \in S$ gilt, was man aus Proposition 2.4.3 und Lemma 2.5.4 leicht einsieht. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$ auf Kompakta absolut und gleichmäßig konvergiert.
Es bleibt also noch der erste Punkt zu zeigen. Wir halten dafür $x \in B$ fest. Mit Hilfe von Proposition 2.5.3 sieht man, dass

$$\int_S f(\zeta)P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = P[f](x) = \int_S f(\zeta)\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

für Funktionen f, die Einschränkungen von Polynomen auf S sind, gilt. Die Ausweitung der endlichen Summen aus Proposition 2.5.3 auf unendliche Summen folgt dabei wegen der Orthogonalität von Spherical Harmonics von unterschiedlichen Graden. Da solche Funktionen dicht in $L^2(S)$ sind, folgt $P(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$ für fast alle $\zeta \in S$. Die Stetigkeit der vorkommenden Funktionen impliziert aber Gleichheit überall.

□

2.5.6 Korollar. Sei u eine harmonische Funktion auf $B_r(a)$, das heißt auf der Kugel mit Radius r um den Mittelpunkt a. Dann existieren Polynome $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, sodass

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x-a)$$

für alle $x \in B_r(a)$ gilt, wobei die Reihe absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen K von $B_r(a)$ konvergiert.

Beweis. Angenommen u sei harmonisch auf $\overline{B}$. Aus dem vorigen Satz folgt nun

$$u(x) = \int_S u(\zeta)P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_S u(\zeta)Z_m(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

für alle $x \in B$. Sei $p_m(x) = \int_S u(\zeta)Z_m(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Bezeichnen wir nun mit $P_{\mathcal{H}_m(S)}$ die Projektion auf $\mathcal{H}_m(S)$, so folgt

$$\begin{aligned}
p_m(x) &= \int_S u(\zeta)Z_m(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta) \\
&= \langle u, \zeta \mapsto Z_m(x,\zeta)\rangle \\
&= \left\langle u, P_{\mathcal{H}_m(S)}(\zeta \mapsto Z_m(x,\zeta))\right\rangle \\
&= \left\langle P_{\mathcal{H}_m(S)}(u), \zeta \mapsto Z_m(x,\zeta)\right\rangle \\
&= P_{\mathcal{H}_m(S)}(u(x)).
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit gilt hier wegen $\zeta \mapsto Z_m(x,\zeta) \in \mathcal{H}_m(S)$ (die Projektion ändert nichts) und die letzte Gleichheit wegen Lemma 2.5.2. Da $P_{\mathcal{H}_m(S)}(u(x)) \in \mathcal{H}_m(S)$, folgt $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.
Wie im vorigen Beweis kann man

$$|p_m(x)| \leq Cm^{n-2}|x|^m \int_S |u(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)$$

abschätzen (für alle $x \in \mathbb{R}^n$), woraus die absolute und gleichmäßige Konvergenz zu u auf kompakten Teilmengen K von B folgt.
Nach einer Translation und einer Dilation zeigt das Argument aus dem vorigen Teil des Beweises, dass wenn u auf $B_r(a)$ harmonisch ist, folgt, dass u die gewünschte Reihenentwicklung auf jeder Kugel $B_s(a)$ für $0 < s < r$ hat.

□

2.6 Geometrische Charakterisierung von Zonal Harmonics

In diesem Abschnitt zeigen wir zum Abschluss noch, welche einfachen geometrischen Eigenschaften Zonal Harmonics aufweisen. Zur Motivation sei dabei an die Definition von Breitengraden aus der Geographie erinnert. Identifizieren wir die Erdoberfläche mit $S \subset \mathbb{R}^3$, sodass der Nordpol im Punkt $(0, 0, 1)$ liegt, dann ist ein Breitenkreis der Schnitt von S mit einer Ebene, die normal zur z-Achse steht. Diese Definition kann man auch auf höhere Dimensionen ausweiten.

2.6.1 Definition. Sei $\eta \in S$. Dann heißt der Schnitt von S mit einer Hyperebene normal auf η eine *Parallele orthogonal zu* η.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es zu zeigen, dass die skalaren Vielfachen von $Z_m(\cdot, \eta)$ die einzigen Vertreter von $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ sind, die konstant auf Parallelen orthogonal zu η sind. Um diesen Sachverhalt zeigen zu können, brauchen wir noch einige Vorbereitungen.

2.6.2 Lemma. Sei f eine Funktion auf S, die $f \circ T^{-1} = f$ für alle $T \in O(n)$ mit $T(\eta) = \eta$ erfüllt. Dann ist f konstant auf Parallelen orthogonal zu η.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei die Funktion f nicht konstant auf Parallelen orthogonal zu η. Wir halten einen Punkt x_0 auf einer solchen Parallelen fest. Dann gibt es mindestens einen Punkt x auf derselben Parallelen, der einen Wert ungleich $f(x_0)$ annimmt. Es existiert aber sicher eine orthogonale Transformation T, die η fest lässt und $T(x_0) = x$ abbildet. Dies widerspricht aber natürlich der Voraussetzung, dass $f \circ T^{-1} = f$ für alle $T \in O(n)$.

□

2.6.3 Korollar. Der Zonal Harmonic $Z_m(\cdot, \eta)$ ist konstant auf Parallelen orthogonal zu η.

Beweis. Das Resultat folgt sofort aus vorigem Lemma und $Z_m(\zeta, T(\eta)) = Z_m(T^{-1}(\zeta), \eta)$ aus Proposition 2.4.3.

□

2.6.4 Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *reell-analytisch* auf Ω, wenn für jeden Punkt $a \in \Omega$ Konstanten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$f(x) = \sum c_\alpha (x - a)^\alpha$$

für alle x in einer (kleinen) Umgebung von a gilt. Diese Reihe konvergiere in dieser Umgebung absolut.

2.6.5 Bemerkung. Folgende Bemerkungen folgen aus der Theorie reell-analytischer Funktionen und werden ohne Beweis angegeben.
Die Koeffizienten c_α in der Reihendarstellung reell-analytischer Funktionen sind eindeutig.
Reellwertige harmonische Funktionen auf Ω sind immer reell-analytisch auf Ω.
In der Reihendarstellung reell-analytischer Funktionen kann man partielle Ableitungen mit der Summation vertauschen. Daher gilt dies auch für den Laplace-Operator.

2.6.6 Lemma. Sei eine Funktion f reell-analytisch und radial auf $\mathbb{R}^n$. Dann existieren Konstanten $c_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m |x|^{2m}$$

für alle x in einer Umgebung um 0 gilt.

Beweis.
1. Schritt:
Angenommen f sei aus $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ und f sei nicht die Nullfunktion. Weil f laut Voraussetzung radial ist, nimmt f auf S einen konstanten Wert $c \neq 0$ an, woraus $f(x) = c|x|^m$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt. Klarerweise ist m gerade (sonst wäre f kein Polynom), daher hat f die gewünschte Gestalt.
2. Schritt:
Nun verallgemeinern wir den Beweis von Polynomen auf allgemeinere reell-analytische und radiale Funktionen f. Bezeichne mit $\sum p_m$ die homogene Entwicklung von f um 0 und sei $T \in O(n)$. Da f radial ist, gilt $f = f \circ T$ und in einer Umgebung von 0 daher auch $\sum p_m = \sum p_m \circ T$. Die einzelnen p_m sind homogene Polynome vom Grad m, was aber auch für $p_m \circ T$ gilt. Wegen der Eindeutigkeit der homogenen Entwicklung von f um 0 folgt die Gleichheit $p_m = p_m \circ T$ für alle m. Da dies für alle $T \in O(n)$ gilt, sind alle p_m radial. Daher können wir den ersten Beweisschritt anwenden und erhalten die behauptete Gestalt von f.

□

Für den Rest dieses Abschnitts identifizieren wir $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und schreiben einen Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ als $z = (x, y)$, wobei $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt.

2.6.7 Lemma. Sei u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und sei $u(\cdot, y)$ radial auf $\mathbb{R}^{n-1}$ für jedes feste $y \in \mathbb{R}$. Sei weiters $u(0, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Dann folgt $u \equiv 0$.

Beweis. Weil u reell-analytisch auf $\mathbb{R}^n$ ist und jedes $u(\cdot, y)$ radial auf $\mathbb{R}^{n-1}$ ist, zeigt das vorige Lemma, dass die Entwicklung von u um 0 von der Gestalt

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(y) |x|^{2m}$$

ist, wobei die Koeffizienten c_m hier von y abhängen. Aus der Harmonizität von u und Bemerkung 2.6.5 folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u(x, y) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m''(y) |x|^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m c_m(y) |x|^{2(m-1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [c_m''(y) + \alpha_{m+1} c_{m+1}(y)] |x|^{2m}, \end{aligned}$$

wobei die α_m Konstanten ungleich Null sind, die beim Differenzieren von $u(x, y)$ nach x entstehen und deren genauer Wert irrelevant ist. Da die Summe in der letzten Zeile der Gleichung den Wert 0 annehmen muss für alle $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, folgt aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer harmonischen Funktion, dass jeder Term in eckigen Klammern verschwinden muss. Dies folgt auch aus der Theorie reell-analytischer Funktionen und wird hier ohne Beweis angeführt.

Wegen der geforderten Bedingung $c_0(y) = u(0, y) = 0$ sieht man induktiv, dass alle c_m identisch Null sein müssen, was wiederum $u \equiv 0$ impliziert.

□

Nach all diesen Vorbereitungen können wir jetzt den Hauptsatz dieses Abschnitts zeigen, der bereits zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt wurde.

2.6.8 Satz. Sei $\eta \in S$. Dann gilt: Ein Spherical Harmonic vom Grad m ist genau dann konstant auf Parallelen orthogonal zu η, wenn es ein skalares Vielfaches von $Z_m(\cdot, \eta)$ ist.

Beweis. Die eine Richtung, dass $Z_m(\cdot, \eta)$ konstant auf Parallelen orthogonal zu η ist, haben wir bereits in Korollar 2.6.3 gesehen. Daher gilt dies auch für skalare Vielfache dieser Funktion.
Interessanter ist die andere Richtung. Dafür können wir $m \geq 1$ annehmen. Definiere zusätzlich den Nordpol $N := (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Als ersten Schritt betrachten wir den Fall $\eta = N$ und verallgemeinern dann auf andere Werte für η. Sei $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ konstant auf Parallelen orthogonal zu N. Für alle orthogonalen Transformationen $T \in O(n-1)$ folgt somit aus der Definition von Parallelen orthogonal zu einem Punkt, dass

$$p(Tx, y) = p(x, y)$$

für alle $(x, y) \in S$ und daher auch für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ gilt. Weil diese Gleichheit für alle T gilt, schließen wir, dass $p(\cdot, y)$ radial ist auf $\mathbb{R}^{n-1}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Daher gilt diese Tatsache auch für $Z_m((\cdot, y), N)$, als ein Element von $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ betrachtet.
Wähle jetzt eine Konstante c so, dass $p(N) = cZ_m(N, N)$ gilt. Die Existenz einer solchen Konstanten folgt dabei sofort aus der Tatsache, dass beide beteiligten Funktionen reellwertig sind. Definiere nun

$$u = p - cZ_m(\cdot, N).$$

Dann ist u klarerweise harmonisch auf $\mathbb{R}^n$. Die Funktion $u(\cdot, y)$, betrachtet als Funktion auf $\mathbb{R}^{n-1}$ ist radial auf $\mathbb{R}^{n-1}$ für jedes feste $y \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$u(0, y) = u(yN) = y^m u(N) = 0$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Weil die Voraussetzungen des vorigen Lemmas erfüllt sind, folgt, dass u die Nullfunktion ist. Somit gilt

$$p = cZ_m(\cdot, N),$$

was zeigt, dass p ein skalares Vielfaches von $Z_m(\cdot, N)$ ist.
Im zweiten Schritt verallgemeinern wir die Tatsache für $\eta \in S$. Dafür wählen wir eine orthogonale Transformation $T \in O(n)$ so, dass $T(N) = \eta$. Wenn jetzt $p \in \mathcal{H}_m(S)$ konstant ist auf Parallelen orthogonal zu η, so ist jetzt $p \circ T$ konstant auf Parallelen orthogonal zu N. Der erste Beweisschritt zeigt aber, dass $p \circ T$ somit ein skalares Vielfaches von $Z_m(\cdot, N)$ ist, was impliziert, dass p ein Vielfaches von $Z_m(\cdot, N) \circ T^{-1}$ ist. Nach Proposition 2.4.3 gilt aber $Z_m(\cdot, N) \circ T^{-1} = Z_m(\cdot, \eta)$, womit der Satz bewiesen wäre.

□

Literatur

[A] Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey: *Harmonic Function Theory, Second Edition*, Springer-Verlag, New York 2001.

[K1] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2 für technische Mathematik*, TU Wien, 2008.

[K2] Michael Kaltenbäck: *Analysis 3 für technische Mathematik*, TU Wien, 2009.

[R] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York 1953.

[W] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis*, TU Wien, 5. Auflage 2009.