Dualität von regulären Verbänden und nüchternen Topologien

Seminararbeit

Philipp Schönbauer
WS 2011/12

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorientheorie

Ziel dieser Arbeit ist die Herleitung der Dualität zwischen nüchternen topologischen Räumen und regulären Verbänden als Grundlage für die Herleitung verschiedener topologischer Repräsentationen algebraischer Strukturen, unter anderem der Stone Duality und der Esakia Duality. Diese topologischen Repräsentationen sind formal durch Dualitäten von Kategorien gegeben. In diesem Abschnitt werden dazu die benötigten Begriffe aus der Kategorientheorie definiert.

Definition 1.1. Eine *Kategorie* $\mathscr{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten, einer Klasse von Morphismen und einer Verknüpfungsabbildung $\circ$ auf den Morphismen.

1. Die Klasse von Objekten wird bezeichnet mit $Obj(\mathscr{C})$.

2. Die Klasse von Morphismen wird bezeichnet mit $Mor(\mathscr{C})$. Jeder Morphismus hat einen Definitionsbereich $dom(f) \in Obj(\mathscr{C})$ und einen Bildbereich $ran(f) \in Obj(\mathscr{C})$. Für einen Morphismus mit Definitionsbereich A und Bildbereich B schreiben wir kurz $f : A \to B$. Die Menge aller Morphismen mit Definitionsbereich A und Bildbereich B wird mit $Mor(A, B)$ bezeichnet. Um die Kategorie zu betonen, wird die Menge der Morphismen $f : A \to B$ in der Kategorie $\mathscr{C}$ gelegentlich auch mit $Mor_{\mathscr{C}}(A, B)$ bezeichnet.

3. Die Verknüpfungsvorschrift $\circ$. Dabei gilt:

   (a) $\forall A, B, C \in Obj(\mathscr{C})$ ist $\circ : Mor(B, C) \times Mor(A, B) \to Mor(A, C)$, d.h. für alle Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist $g \circ f : A \to C$ ein Morphismus.

   (b) $\circ$ ist assoziativ.

   (c) Für alle Objekte A existiert ein *Identitätsmorphismus*, d.h. ein Morphismus $id_A : A \to A$, sodass $f \circ id_A = f$ und $id_A \circ g = g$, wann immer f, g Morphismen und die entsprechenden Ausdrücke definiert sind.

Zwei Objekte $A, B \in Obj(\mathscr{C})$ einer Kategorie $\mathscr{C}$ heißen *isomorph*, i.Z. $A \cong B$, falls Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ existieren, sodass $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$.

Beispiel 1.2. Erste Beispiele von Kategorien.

1. Die Kategorie **Set** hat als Objekte die Klasse aller Mengen und als Morphismen die Klasse sämtlicher Funktionen. Die Verknüpfung $\circ$ ist dabei die klassische Verknüpfung von Funktionen.

2. Die Kategorie **Top** aller topologischen Räume zusammen mit stetigen Funktionen als Morphismen.

3. Die meisten algebraischen Strukturen (wie z.B. Ringe, Algebren, Gruppen, Vektorräume, ...) werden eine Kategorie, wenn man als Morphismen alle Homomorphismen zulässt.

Definition 1.3. Ein *Funktor* $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ besteht aus einer Abbildungsvorschrift für Objekte, $T : Obj(\mathscr{C}) \to Obj(\mathscr{D})$, und einer Abbildungsvorschrift für Morphismen, $T : Mor(\mathscr{C}) \to Mor(\mathscr{D})$. Dabei gilt:

1. Ist $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$, so ist $T(f) : T(A) \to T(B)$ ein Morphismus in $\mathscr{D}$.

2. Es ist $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$, wann immer definiert (wegen 1. ist die linke Seite genau dann definiert, wenn die rechte Seite es ist).

3. Für alle Objekte A von $\mathscr{C}$ gilt: $T(id_A) = id_{T(A)}$.

Ein Funktor besteht daher eigentlich aus zwei Abbildungsvorschriften, eine operiert auf den Objekten, die Andere auf den Morphismen. Wir werden aber, der allgemeinen Konvention folgend, beide Abbildungsvorschriften mit dem selben Zeichen bezeichnen.

Beispiel 1.4. Beispiele zu Funktoren.

1. Der einfachste Funktor ist schlicht der Identitätsfunktor $id_{\mathscr{C}}$ einer Kategorie $\mathscr{C}$ auf sich selbst.

2. Bezeichnet **Ring** die Kategorie aller Ringe mit Ringhomomorphismen, so bildet der „forgetful functor" U : **Ring** $\rightarrow$ **Set** einen Ring A auf die zugrunde liegende Menge ab, und einen Ringhomomorphismus auf seine zugrunde liegende Funktion. Analog kann der forgetful functor für jede algebraische Struktur definiert werden

Definition 1.5. Ein *Cofunktor* $T : \mathscr{C} \rightarrow \mathscr{D}$ besteht analog zu einem Funktor aus einer Abbildungsvorschrift für Objekte $T : Obj(\mathscr{C}) \rightarrow Obj(\mathscr{D})$, und einer Abbildungsvorschrift für Morphismen, $T : Mor(\mathscr{C}) \rightarrow Mor(\mathscr{D})$. Dabei gilt:

1. Ist $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$, so ist $T(f) : T(B) \rightarrow T(A)$ ein Morphismus in $\mathscr{D}$.

2. Es ist $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$, wann immer definiert (wieder ist wegen 1. ist die linke Seite genau dann definiert, wenn die rechte Seite es ist).

3. Für alle Objekte A von $\mathscr{C}$ gilt: $T(id_A) = id_{T(A)}$.

Als nächstes benötigen wir noch eine Möglichkeit zwei Kategorien miteinander vergleichen zu können. Hier stellt sich folgende Definition als sinnvoll heraus:

Definition 1.6. Eine *Äquivalenz* zwischen zwei Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ (i.Z. $\mathscr{C} \equiv \mathscr{D}$) besteht aus zwei Funktoren $S : \mathscr{C} \rightarrow \mathscr{D}$ und $T : \mathscr{D} \rightarrow \mathscr{C}$, sodass:

1. Für alle $A \in Obj(\mathscr{C})$ gilt $TS(A) \cong A$.

2. Für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$ gilt $ST(B) \cong B$.

3. Für alle $A, A' \in Obj(\mathscr{C})$ ist $S\,|_{Mor(A,A')}: Mor(A, A') \rightarrow Mor(S(A), S(A'))$ bijektiv.

4. Für alle $B, B' \in Obj(\mathscr{C})$ ist $T\,|_{Mor(B,B')}: Mor(B, B') \rightarrow Mor(T(B), T(B'))$ bijektiv.

5. Es existiert eine Abbildung $\tau : Obj(\mathscr{C}) \rightarrow Mor(\mathscr{C})$, sodass gilt:

   (a) Für alle $A \in Obj(\mathscr{C})$ ist $\tau_A := \tau(A) : A \rightarrow TS(A)$ ein Isomorphismus.

   (b) Für alle $f : A \rightarrow A' \in Mor(\mathscr{C})$ gilt $TS(f) \circ \tau_A = \tau_{A'} \circ f$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "f"'] & TS(A) \arrow[d, "TS(f)"] \\
A' \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & TS(A')
\end{tikzcd}$$

6. Es existiert eine Abbildung $\sigma : Obj(\mathscr{D}) \rightarrow Mor(\mathscr{D})$, sodass gilt:

   (a) Für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$ ist $\sigma_B := \sigma(B) : B \rightarrow ST(B)$ ein Isomorphismus.

   (b) Für alle $g : B \rightarrow B' \in Mor(\mathscr{D})$ gilt $ST(g) \circ \sigma_B = \sigma_{B'} \circ g$.

Eine Äquivalenz heißt *Isomorphismus* zwischen den Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ (i.Z. $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$), falls in obiger Definition immer $\tau_A = id_A$ und $\tau_B = id_B$ gewählt werden kann, d.h. falls für alle $A \in Obj(\mathscr{C})$ und $f \in Mor(\mathscr{C})$ gilt, dass $TS(A) = A$ und $TS(f) = f$, und für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$ und $g \in Mor(\mathscr{D})$ gilt, dass $ST(B) = B$ und $ST(g) = g$.

Definition 1.7. Eine *Dualität* zwischen zwei Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ (i.Z. $\mathscr{C} \sim \mathscr{D}$), ist analog zu einer Äquivalenz definiert, mit dem Unterschied dass hier S und T Cofunktoren sind, welche die Bedingungen 1. bis 6. erfüllen, wobei in 3. und 4. jeweils die Morphismen ihre Richtung ändern.

Als nächstes ein kleines Lemma, dass es gestattet, in gewissen Fällen die Überprüfung des 6. Axioms von Definition 1.6 und 1.7 zu vermeiden:

Lemma 1.8. *Erfüllen mit den Bezeichnungen von Definition 1.6 (bzw. Definition 1.7) die Funktoren (bzw. Cofunktoren) S und T die Axiome 1. und 5., so folgt aus $T(\sigma_B) = \tau_{T(B)}$ (bzw. $T(\sigma_B) = \tau_{T(B)}^{-1}$) für alle $B \in Obj(\mathscr{D})$, unmittelbar, dass S und T eine Äquivalenz (Dualität) begründen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage für Äquivalenzen. Seien $B, B' \in \mathscr{D}$ und $f : B \to B' \in Mor(\mathscr{D})$. Wir müssen das Axiom 6. beweisen. Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} & TS(T(f)) \circ \tau_{T(B)} = \tau_{T(B')} \circ T(f) & \text{wegen Axiom 5.} \\ \iff & TST(f) \circ T(\sigma_B) = T(\sigma_{B'}) \circ T(f) & \text{Voraussetzung} \\ \iff & T(ST(f) \circ \sigma_B) = T(\sigma_{B'} \circ f) & \text{da } T \text{ein Funktor ist} \\ \iff & ST(f) \circ \sigma_B = \sigma_{B'} \circ f & \text{wegen Axiom 4.} \end{array}$$

Der Beweis für Dualitäten verläuft anolog. ☐

Lemma 1.9. *Seien $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ und $\mathscr{E}$ Kategorien und $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $T : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ beide Funktoren oder Cofunktoren, sowie $F : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ und $G : \mathscr{E} \to \mathscr{D}$ beide Funktoren oder Cofunktoren. Sei weiters für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ ein Isomorphismus $\tau_C \in Mor_{\mathscr{C}}(C, TS(C))$ und für alle $D \in Obj(\mathscr{D})$ ein Isomorphismus $\sigma_D \in Mor_{\mathscr{D}}(D, GF(D))$ gegeben, sodass:*

1. *Für alle $f : C \to C' \in Mor(\mathscr{C})$ ist $TS(f) \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ f$.*
2. *Für alle $g : D \to D' \in Mor(\mathscr{D})$ ist $GF(g) \circ \sigma_D = \sigma_{D'} \circ g$.*

Für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ sei weiters

$$\eta_C := \begin{cases} T(\sigma_{S(C)}) \circ \tau_C & \textit{falls } S \textit{ und } T \textit{ Funktoren} \\ T(\sigma_{S(C)}^{-1}) \circ \tau_C & \textit{falls } S \textit{ und } T \textit{ Cofunktoren} \end{cases}$$

Dann ist η_C ein Isomorphismus und es gilt für $f \in Mor_{\mathscr{C}}(C, C')$: $TGFS(f) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ f$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für Funktoren, für Cofunktoren verläuft der Beweis analog. Dass η_C ein Isomorphismus ist, folgt, da Funktoren immer Isomorphismen auf Isomorphismen abbilden, und Verknüpfungen von Isomorphismen wieder Isomorphismen sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} TGFS(f) \circ \eta_C &= T(\sigma_{S(C')} \circ S(f) \circ \sigma_{S(C)}^{-1}) \circ \eta_C \\ &= T(\sigma_{S(C')}) \circ \tau_{C'} \circ f \circ \tau_C \circ T(\sigma_{S(C)}^{-1}) \circ T(\sigma_{S(C)}) \circ \tau_C \\ &= \eta_{C'} \circ f \end{aligned}$$

☐

Korollar 1.10. *Falls mit den Bezeichnungen von Lemma 1.9 S und T eine Äquivalenz (Dualität) begründen und F und G eine Äquivalenz begründen, dann begründen $FS : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ und $TG : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ ebenfalls eine Äquivalenz (Dualität).*

Beweis. Das letzte Lemma zeigt die Axiome 1., 2., 5., und 6 von Definition 1.6 (bzw. 1.7). Außerdem folgt die Bijektivität auf den Morphismen unmittelbar. ☐

Lemma 1.11. *Es gelten die Bezeichnungen von Definition 1.6 (bzw. Definition 1.7) und für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ sei ein Objekt $\Xi(C) \in Obj(\mathscr{D})$, mit $S(C) \cong \Xi(C)$, und ein Isomorphismus $\xi_C : S(C) \to \Xi(C)$ gegeben. Dann ist $\widetilde{S} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ definiert über $\widetilde{S}(C) = \Xi(C)$ für alle $C \in Obj(\mathscr{C})$ und $\widetilde{S}(f) = \xi_{C'} \circ S(f) \circ \xi_C^{-1}$ (bzw. $\widetilde{S}(f) = \xi_C \circ S(f) \circ \xi_{C'}^{-1}$)) für alle $f \in Mor_{\mathscr{C}}(C, C')$ ein Funktor (bzw. Cofunktor). Er induziert dann zusammen mit T ebenfalls die gegebene Äquivalenz. Insbesondere gilt:*

1. *Mit $\mu_C := T(\xi_C) \circ \tau_C$ (bzw. $\mu_C := T(\xi_C^{-1}) \circ \tau_C$) gilt: μ_C ist ein Isomorphismus und $\mu_{C'} \circ f = T\widetilde{S}(f) \circ \mu_C$ für alle $f \in Mor_{\mathscr{C}}(C, C')$.*

2. *Mit $\lambda_D := \xi_{T(D)} \circ \sigma_D$ gilt: λ_D ist ein Isomorphismus und $\lambda_{D'} \circ f = \widetilde{S}T(f) \circ \lambda_D$ für alle $f \in Mor_{\mathscr{D}}(D, D')$.*

Beweis. Man sieht leicht, dass $\widetilde{S}$ ein Funktor (bzw. Cofunktor) ist. Dass $\widetilde{S}$ bijektiv auf den Morphismen operiert, folgt, da S dies tut und die Abbildung $Mor_{\mathscr{C}}(C, C') \to Mor_{\mathscr{C}}(\Xi(C), \Xi(C')) : g \mapsto \xi_{C'} \circ g \circ \xi_C^{-1}$ (bzw. $g \mapsto \xi_C \circ S(f) \circ \xi_{C'}^{-1}$) ebenfalls isomorph ist. Also bleibt noch 1. und 2. zu beweisen, dann folgt auch die Äquivalenz (Dualität).

1. Wir beweisen die Aussage für Funktoren, für Cofunktoren ist der Beweis analog. Wie im Beweis von Lemma 1.9 folgt, dass μ_C isomorph ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} T\widetilde{S}(f) \circ \mu_C &= T(\xi_{C'} \circ S(f) \circ \xi_C^{-1}) \circ T(\xi_C) \circ \tau_C \\ &= T(\xi_{C'}) \circ \tau_{C'} \circ f \circ \tau_C^{-1} \circ \tau_C \\ &= \mu_{C'} \circ f \end{aligned}$$

2. Beweis verläuft analog. □

2 Die Kategorien RVerb und NTop

2.1 Reguläre Verbände

Definition 2.1. Ein *Verband* $(A, \leq)$ ist eine beschränkte halbgeordnete Menge (d.h. es existiert ein größtes und ein kleinstes Element), sodass für je zwei $a, b \in A$ ein Supremum und ein Infimum existiert. Wir werden das Supremum mit $\vee$, das Infimum mit $\wedge$, sowie das kleinste bzw. größte Element mit 0 bzw. 1 bezeichnen. Ist $\emptyset \neq B \subseteq A$, so bezeichnet $\bigvee B$ bzw. $\bigwedge B$ das Supremum bzw. Infimum von B, falls dieses existiert. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden definieren wir $\bigvee \emptyset := 0$ und $\bigwedge \emptyset := 1$.

- Ein Verbandshomomorphismus $f : A \to B$ ist eine Abbildung, welche kleinstes und größtes Element, sowie Infima und Suprema von je zwei Elementen erhält. Wir bezeichnen mit **Verb** die Kategorie der Verbände zusammen mit Verbandshomomorphismen.

- Ein Verband A heißt *distributiv*, falls für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Wir bezeichnen die Kategorie der distributiven Verbänden zusammen mit Verbandshomomorphismen mit **DVerb**.

- Ein Verband heißt *vollständig,* falls alle Teilmengen von A ein Supremum besitzen und die unendliche Distributivität erfüllt ist, d.h. für alle $x \in A$ und $S \subseteq A$ gilt $x \wedge \bigvee S = \bigvee \{x \wedge y : y \in S\}$. Ein *vollständiger Verbandshomomorphismus* ist ein Verbandshomomorphismus, welcher Suprema von sämtlichen Mengen erhält. Die so definierte Kategorie bezeichnen wir mit **VVerb**.

- Ist A ein vollständiger Verband, so heißt ein vollständiger Verbandshomomorphismus $p : A \to \mathbb{Z}_2$ ein *Punkt auf* A. Wir bezeichen die Menge aller Punkte auf A mit $pt(A)$.

- Ein vollständiger Verband heißt *regulär*, falls für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$ ein Punkt $p \in pt(A)$ existiert mit $p(x) \neq p(y)$. Die Kategorie der regulären Verbände zusammen mit vollständigen Verbandshomomorphismen bezeichnen wir **RVerb**.

Definition 2.2. Sei A ein Verband.

- Ein $I \subseteq A$ heißt *Ideal*, falls
  1. $0 \in I$.
  2. Für alle $a, b \in I$ ist auch $a \vee b \in I$.
  3. Für alle $a \in I$ und $b \leq a$ ist auch $b \in I$.
- Ein Ideal I heißt *echt*, falls $I \neq A$
- Ein echtes Ideal I heißt *Primideal*, falls für alle $a, b \in A$ aus $a \wedge b \in I$ folgt, dass $a \in I$ oder $b \in I$.
- Ein echtes Ideal I heißt *maximal*, falls es kein echt größeres echtes Ideal $J \supsetneq I$ gibt.
- Für $x \in A$ definieren wir die Menge $\downarrow x := \{y \in A : y \leq x\}$. Dann ist $\downarrow x$ ein Ideal, und wird *(das von x erzeugte) Hauptideal* genannt.
- Ein $x \in A$ heißt *Primelement,* falls $\downarrow x$ ein Primideal ist.

Bemerkung 2.3. Ist $I = \downarrow x$ ein Hauptideal, so ist $x = \bigvee I \in I$. Ein Ideal I ist daher genau dann ein Hauptideal, falls $\bigvee I \in I$. In diesem Fall ist $I = \downarrow (\bigvee I)$.

Lemma 2.4. Die Bedingung $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ist äquivalent zu ihrer „dualen" Bedingung $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Beweis. Sei $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ für alle $a, b, c \in A$ erfüllt. Dann folgt

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) \\ &= a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) && \text{wegen } (a \wedge b) \vee a = a \\ &= (a \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge (b \vee c) && \text{wegen } a \wedge (a \vee c) = a\end{aligned}$$

Die andere Richtung sieht man genauso. □

Lemma 2.5. *Sei A ein vollständiger Verband und $I \subseteq A$. Dann gilt: I ist Kern eines Verbandshomomorphismuses $f : A \to \mathbb{Z}_2$ genau dann, wenn I ein Primideal ist.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Wegen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ folgt $0 \in I$ und $1 \notin I$. Weiters folgt für a, $b \in I$ und $c \leq a$, dass $f(a) = f(b) = 0$ und damit $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 0$, also $a \vee b \in I$, sowie $f(c) \leq f(a) = 0$, also $c \in I$. Damit ist I ein echtes Ideal. Für $a, b \in A$ mit $a \wedge b \in I$ folgt $0 = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. In $\mathbb{Z}_2$ ist das Infimum zweier Elemente aber genau dann Null, wenn zumindest eine der beiden Null ist. Also folgt $a \in I$ oder $b \in I$.

" $\Leftarrow$ " Definiere $f := \mathbb{I}_{I^c}$. Dann ist $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Weiters ist $f(a \wedge b) = 0$ genau dann, wenn $a \wedge b \in I$ und daher genau dann, wenn $a \in I$ oder $b \in I$. Also ist $f(a \wedge b) = 0$ genau dann, wenn $f(a) = 0$ oder $f(b) = 0$ und daher $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Analog sieht man auch, dass f Suprema erhält. □

Lemma 2.6. *Sei A ein vollständiger Verband und $I \subseteq A$. Dann gilt: I ist Kern eines Punktes genau dann, wenn I ein primes Hauptideal ist.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Nach Lemma 2.5 ist I ein Primideal. Weiters folgt $p(\bigvee ker(p)) = \bigvee p(ker(p)) = 0$ und damit $\bigvee I \in I$.

" $\Leftarrow$ " Nach Lemma 2.5 ist I Kern eines Verbandshomomorphismuses $p : A \to \mathbb{Z}_2$. Nun gilt für $S \subseteq A$

$$\begin{aligned}\bigvee p(S) = 0 &\iff \forall s \in S : p(s) = 0 \\ &\iff S \subseteq ker(p) = I \\ &\iff \bigvee S \in I && \text{da } I \text{ein Hauptideal ist} \\ &\iff p(\bigvee S) = 0\end{aligned}$$

Damit erhält p sämtliche Suprema und ist daher ein vollständiger Verbandshomomorphismus. □

2.2 Nüchterne topologische Räume

Definition 2.7. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A *irreduzibel*, falls keine zwei disjunkten, nicht leeren und in der Spurtopologie offenen Teilmengen von A existieren.

Definition 2.8. Ein topologischer Raum X heißt *nüchtern*, falls jede nicht leere, irreduzible und abgeschlossene Menge der Abschluss eines eindeutigen Elementes ist. Wir bezeichnen die Kategorie der nüchternen topologischen Räume, zusammen mit stetigen Funktionen als Morphismen, mit **NTop**.

Wir beweisen zwei kurze Lemmata über die vorangehenden Definitionen.

Lemma 2.9. *$A \subseteq X$ ist genau dann irreduzibel, falls aus $B \cup C = A$ und $B, C \subseteq A$ abgeschlossen in der Spurtopologie folgt, dass $B = A$ oder $C = A$.*

Beweis. Folgt aus der Definition über Komplementbildung. □

Lemma 2.10. *Für einen topologischen Raum X gilt: $T_2 \implies$ nüchtern $\implies T_0$*

Beweis. In Hausdorffräumen sind die nicht leeren, abgeschlossenen und irreduziblen Mengen genau die einpunktigen Mengen. Diese sind gleichzeitig der Abschluss ihres (eindeutigen) Elementes. Also sind Hausdorffräume nüchtern.

Umgekehrt sind Abschlüsse von einpunktigen Mengen immer irreduzibel, da jede in der Spurtopologie offene und nicht leere Teilmenge von $\overline{\{x\}}$ den Punkt x enthält. Daher folgt für nüchterne Räume aus $x \neq y$ immer $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, womit aber x und y durch zumindest eine offene Menge getrennt werden können. Damit erfüllen nüchterne Räume immer T_0. □

3 Die Dualität

Wir leiten die Dualität **NTop** $\sim$ **RVerb** nun in drei Schritten her. Im ersten Schritt konstruieren wir einen Cofunktor Ω : **NTop** $\to$ **RVerb**. Im zweiten Schritt versehen wir für alle reguläre Verbände A die Menge $pt(A)$ mit einer Topologie, und zeigen, dass für reguläre Verbände A ein Verbandsisomorphismus $\Phi_A : A \to \Omega pt(A)$ existiert und für nüchterne Räume X ein Homöomorphismus $\Psi_X : X \to pt\Omega(X)$ existiert. Im letzten Schritt wird schließlich der Cofunktor pt : **RVerb** $\to$ **NTop** konstruiert.

Der Cofunktor Ω : Top $\to$ RVerb

Definition 3.1. Für einen topologischen Raum X bezeichne $\Omega(X)$ das System der offenen Mengen. Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann sei $\Omega(f) := f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$.

Proposition 3.2. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $(\Omega(X), \subseteq)$ ein regulärer Verband. Dabei gilt:*

1. *Ein $U \in \Omega(X)$ ist genau dann ein Primelement, falls $U \neq X$ und U^c irreduzibel ist.*
2. *Für alle $x \in X$ ist die Abbildung $U \mapsto \mathbb{I}_U(x)$ ein Punkt auf $\Omega(X)$.*

Beweis. Es ist $\emptyset \in \Omega(X)$ das kleinste Element und $X \in \Omega(X)$ das größte Element. Weiters ist die Topologie $\Omega(X)$ unter endlicher Schnitt- und beliebiger Vereinigungsbildung abgeschlossen. Da diese Operationen gerade die Infima bzw. Suprema definieren, folgt, dass $\Omega(X)$ ein Verband ist, welcher beliebige Suprema besitzt. Die unendliche Distributivität folgt nun aus elementarer Mengentheorie. Also ist $\Omega(X)$ ein vollständiger Verband.

1. " $\Rightarrow$ " Ist U ein Primelement, so folgt $X \notin \downarrow U$, also $U \neq X$. Um zu sehen, dass U^c irreduzibel ist, seien $V, W \subseteq U^c$ offen in der Spurtopologie, disjunkt und nicht leer. Dann ist $V = \tilde{V} \cap U^c$, $W = \tilde{W} \cap U^c$ mit gewissen $\tilde{V}, \tilde{W} \in \Omega(X)$. Nun folgt der Widerspruch: $\tilde{V}$, $\tilde{W} \notin \downarrow U$ aber $\tilde{V} \cap \tilde{W} \in \downarrow U$

" $\Leftarrow$ " Wegen $U \neq X$ folgt $X \notin \downarrow U$. Seien weiters $A, B \in \Omega(X)$, $A, B \notin \downarrow U$ aber $A \cap B \in \downarrow U$. Es folgt der Widerspruch $A \cap U^c \neq \emptyset \neq B \cap U^c$ und $A \cap B \cap U^c = \emptyset$ und daher U^c reduzibel.

2. Sei nun $x \in X$. Dann ist $\overline{\{x\}}$ irreduzibel und $\overline{\{x\}}^c \neq X$. Also ist nach dem ersten Beweisteil daher $\overline{\{x\}}^c \in \Omega(X)$ ein Primelement. Nach Lemma 2.6 gibt es einen Punkt p auf $\Omega(X)$, sodass

$$\begin{array}{rc} & ker(p) = \downarrow (\overline{\{x\}}^c) \\ \Longleftrightarrow & p(V) = 0 \Leftrightarrow V \subseteq \overline{\{x\}}^c \\ \Longleftrightarrow & p(V) = 0 \Leftrightarrow V \cap \overline{\{x\}} = \emptyset \\ \Longleftrightarrow & p(V) = 0 \Leftrightarrow x \notin V \\ \Longleftrightarrow & p(V) = \mathbb{I}_V(x) \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\Omega(X)$ regulär ist. Seien dazu $U, V \in \Omega(X)$ mit $U \neq V$, und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U \nsubseteq V$. Dann gibt es $x \in U \backslash V$ und $p(W) := \mathbb{I}_W(x)$ ist ein Punkt auf $\Omega(X)$. Es folgt $p(U) = 1 \neq 0 = p(V)$. ☐

Proposition 3.3. *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $\Omega(f) = f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ ein vollständiger Verbandshomomorphismus.*

Beweis. Es gilt $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$. Außerdem ist die Urbildbildung mit Schnitten und Vereinigungen verträglich, und daher erhält f^{-1} sämtlich Infima und Suprema. ☐

Damit folgt unmittelbar:

Korollar 3.4. $\Omega : \mathbf{Top} \to \mathbf{RVerb}$ *ist ein Cofunktor.*

Offenbar gilt dann auch:

Korollar 3.5. $\Omega : \mathbf{NTop} \to \mathbf{RVerb}$ *ist ein Cofunktor.*

Die Isomorphismen Φ_A und Ψ_X

Definition 3.6. Sei A ein vollständiger Verband und $a \in A$. Dann sei $\Phi_A(a) := \{p \in pt(A) \mid p(a) = 1\}$.

Lemma 3.7. *Für einen regulären Verband A ist* [1] *$\Phi_A : A \to \mathbb{P}(pt(A))$ ein injektiver vollständiger Verbandshomomorphismus. Daher ist das Bild $\Phi_A(A)$ ein regulärer Verband und $\Phi_A : A \to \Phi_A(A)$ ist ein vollständiger Verbandsisomorphismus. Insbesondere ist das System $\Phi_A(A) = \{\Phi_A(a) : a \in A\}$ eine Topologie auf $pt(A)$.*

Beweis. Da für alle Punkte $p(0) = 0$ und $p(1) = 1$ ist, folgt $\Phi_A(0)=\emptyset$ und $\Phi_A(1) = pt(A)$.

Um zu sehen, dass Φ_A beliebige Suprema erhält, sei $S \subseteq A$. Wir müssen zeigen, dass $\bigcup \Phi_A(S) = \Phi_A(\bigvee S)$.

$$\begin{aligned} p \in \bigcup \Phi_A(S) &\Longleftrightarrow \exists s \in S : \, p(s) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \bigvee \{p(s) : \, s \in S\} = 1 \\ &\Longleftrightarrow p(\bigvee S) = 1 \\ &\Longleftrightarrow p \in \Phi_A(\bigvee S) \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass Φ_A endliche Infima erhält seien $x, y \in A$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p \in \Phi_A(x) \cap \Phi_A(y) &\Longleftrightarrow p \in \Phi_A(x) \text{ und } p \in \Phi_A(y) \\ &\Longleftrightarrow p(x) = p(y) = 1 \\ &\Longleftrightarrow p(x \wedge y) = 1 \\ &\Longleftrightarrow p \in \Phi_A(x \wedge y) \end{aligned}$$

[1] $\mathbb{P}$ bezeichnet hier die Potenzmenge.

Also ist Φ_A ein vollständiger Verbandshomomorphismus. Um zu sehen, dass Φ_A injektiv ist, seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Da A regulär ist, gibt es einen Punkt p auf A mit $p(x) \neq p(y)$, also sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p(x) = 0$ und $p(y) = 1$. Damit folgt $p \in \Phi_A(y)$ und $p \notin \Phi_A(x)$, also $\Phi_A(x) \neq \Phi_A(y)$.

Das System $\Phi_A(A)$ ist als Bild eines vollständigen Verbandshomomorphismuses unter beliebigen Suprema und endlichen Infima abgeschlossen, also für sich ein vollständiger Verband. Offensichtlich ist nun $\Phi_A : A \to \Phi_A(A)$ bijektiv und daher ein vollständiger Verbandsisomorphismus. Insbesondere ist $A \cong \Phi_A(A)$, und da A regulär ist, ist auch $\Phi_A(A)$ regulär.

Die letzte Aussage folgt einfach über die Tatsache, dass in $\mathbb{P}(pt(A))$ Suprema bzw. Infima über Vereinigungen bzw. Schnitte gegeben sind. $\square$

Ab nun sei $pt(A)$ immer mit der Topologie $\Phi_A(A)$ versehen.

Definition 3.8. Sei X ein topologischer Raum. Dann sei $\Psi_X : X \to pt(\Omega(X))$, $\Psi_X(x)(U) = \mathbb{I}_U(x)$.

Satz 3.9. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist Ψ_X genau dann bijektiv, wenn X nüchtern ist. In diesem Fall ist Ψ_X ein Homöomorphismus und es gilt $\Psi_X(U) = \Phi_{\Omega(X)}(U)$ für alle $U \in \Omega(X)$.*

Beweis. Ψ_X ist injektiv genau dann, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine offene Menge U gibt, sodass U genau einen der beiden Punkte x oder y enthählt. Dies ist genau dann der Fall, wenn aus $x \neq y$ immer $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ folgt.

Ψ_X ist surjektiv genau dann, wenn aus $p \in pt\Omega(X)$ folgt $p \in \Psi_X(X)$. Nun gilt $pt\Omega(X) = \{\mathbb{I}_{\downarrow U} : U \in \Omega(X), U \text{ist Primelement}\}$ sowie $\Psi_X(X) = \{U \mapsto \mathbb{I}_U(x) : x \in X\} = \{\mathbb{I}_{\downarrow \overline{\{x\}}^c} : x \in X\}$. Also gilt $pt\Omega(X) = \Psi_X(X)$ genau dann, wenn alle Primelemente von $\Omega(X)$ von der Form $\overline{\{x\}}^c$ für ein $x \in X$ sind. Mit Lemma 3.2 ist dies äquivalent dazu, dass alle irreduziblen, abgeschlossenen und nichtleeren Mengen von der Form $\overline{\{x\}}$ sind.

Insgesamt gilt daher: Ψ_X ist bijektiv genau dann, wenn alle irreduziblen, abgeschlossenen und nicht leeren Mengen von der Form $\overline{\{x\}}$ für genau ein $x \in X$ sind, also genau dann, wenn X nüchtern ist.

Nach Satz 3.2 ist $\Omega(X)$ regulär, und damit $\Phi_{\Omega(X)} : \Omega(X) \to \Omega pt\Omega(X)$ bijektiv. Also sind alle offenen Mengen von $pt\Omega(X)$ von der Form $\Phi_{\Omega(X)}(U)$ für genau ein $U \in \Omega(X)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\Psi_X^{-1}(\Phi_{\Omega(X)}(U)) &= \Psi_X^{-1}(\{p \in pt\Omega(X) : p(U) = 1\}) \\ &= \{x \in X : \Psi_X(x)(U) = 1\} \\ &= \{x \in X : x \in U\} \\ &= U\end{aligned}$$

Insbesondere induziert die bijektive Abbildung Ψ_X auch eine Bijektion zwischen den Topologien $\Omega(X)$ und $\Omega pt\Omega(X)$ und ist daher ein Homöomorphismus. $\square$

Der Cofunktor pt

Proposition 3.10. *Sei A ein regulärer Verband. Dann ist $pt(A)$ nüchtern.*

Beweis. Nach Korollar 3.9 reicht es zu zeigen, dass $\Psi_{pt(A)}$ bijektiv ist.

Um die Surjektivität zu sehen sei $p \in pt\Omega pt(A)$. Dann ist $ker(p) \subseteq \Omega pt(A)$ ein Hauptideal und daher

$$ker(p) = \downarrow (\bigvee ker(p)).$$

Da $\bigvee ker(p) \in \Omega pt(A)$ und A regulär ist, gibt es genau ein $a \in A$, sodass $\bigvee ker(p) = \Phi_A(a)$. Als Kern eines Punktes ist $ker(p)$ auch ein Primideal, und damit $\bigvee ker(p) \in \Omega pt(A)$ ein Primelement, und, da $\Phi_A : A \to \Omega pt(A)$ ein vollständiger Verbandsisomorphismus ist, ist auch $a = \Phi_A^{-1}(\bigvee ker(p))$ ein Primelement. Also existiert (genau) ein Punkt $q \in pt(A)$, sodass $\bigvee ker(q) = \downarrow a$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\Psi_{pt(A)}(q) = p$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Psi_{pt(A)}(q) = p \iff & \quad ker(\Psi_{pt(A)}(q)) = ker(p) \\
\iff & \bigvee ker(\Psi_{pt(A)}(q)) = \bigvee(ker(p)) \\
\iff & \quad \overline{\{q\}}^c = \Phi_A(a) \\
\iff & \quad s := \Phi_A^{-1}(\overline{\{q\}}^c) = a
\end{aligned}$$

Es ist $s = \bigvee\{b \in A : \Phi_A(b) \subseteq \overline{\{q\}}^c\}$ und

$$\begin{aligned}
\Phi_A(b) \subseteq \overline{\{q\}}^c &\iff q \notin \Phi_A(b) \\
&\iff q(b) = 0 \\
&\iff b \in ker(q) \\
&\iff b \leq a
\end{aligned}$$

und daher $s = \bigvee\{b \in A : b \leq a\} = a$.

Um die Injektivität zu zeigen, seien $p, q \in pt(A)$ mit $p \neq q$. Dann existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein $a \in A$, sodass:

$$\begin{aligned}
& p(a) = 0 && \textit{und} \quad q(a) = 1 \\
\implies & p \notin \Phi(a) && \textit{und} \quad q \in \Phi(a) \\
\implies & \Phi(a) \subseteq \overline{\{p\}}^c && \textit{und} \quad \Phi(a) \nsubseteq \overline{\{q\}}^c \\
\implies & \overline{\{p\}}^c \neq \overline{\{q\}}^c \\
\implies & \Psi(p) \neq \Psi(q)
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.11. *Seien X und Y nüchterne topologische Räume und $f : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ eine Abbildung. Dann existiert genau dann eine stetige Funktion $g : X \to Y$ mit $g^{-1} = f$, falls f ein vollständiger Verbandshomomorphismus ist. In diesem Fall ist g eindeutig.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Es wurde bereits gezeigt, dass g^{-1} ein vollständiger Verbandshomomorphismus ist.

" $\Leftarrow$ " Sei $g : X \to Y$, $g(x) := \Psi_Y^{-1}(\Psi_X(x) \circ f)$ und sei $U \in \Omega(Y)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
g^{-1}(U) &= \{x \in X : \Psi_Y^{-1}(\Psi_X(x) \circ f) \in U\} \\
&= \{x \in X : \Psi_X(x) \circ f \in \Psi_Y(U)\} \\
&= \{x \in X : \Psi_X(x) \circ f \in \Phi_{\Omega(Y)}(U)\} \\
&= \{x \in X : \Psi_X(x) \circ f(U) = 1\} \\
&= \{x \in X : \mathbb{I}_{f(U)}(x) = 1\} \\
&= \{x \in X : x \in f(U)\} \\
&= f(U)
\end{aligned}$$

Also hat g die gewünschten Eigenschaften.

Um die Eindeutigkeit zu sehen, seien g, h stetig, sodass $g^{-1}(U) = h^{-1}(U) = f(U)$ für alle $U \in \Omega(Y)$, und sei $x \in X$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
& x \in g^{-1}(\overline{\{g(x)\}}) = h^{-1}(\overline{\{g(x)\}}) \\
\implies & h(x) \in \overline{\{g(x)\}} \\
\implies & \overline{\{h(x)\}} \subseteq \overline{\{g(x)\}}
\end{aligned}$$

Analog folgt auch $\overline{\{g(x)\}} \subseteq \overline{\{h(x)\}}$ und insgesamt $\overline{\{h(x)\}} = \overline{\{g(x)\}}$. Aus der Nüchternheit von Y folgt daraus $h(x) = g(x)$. □

Definition 3.12. Für einen regulären Verband A sei wie gehabt $pt(A)$ der nüchterne topologische Raum der Punkte. Ist B ein weiterer regulärer Verband und $f : A \to B$ ein vollständiger Verbandshomomorphismus, dann ist $\Phi_B \circ f \circ \Phi_A^{-1} : \Omega pt(A) \to \Omega pt(B)$ ebenfalls ein vollständiger Verbandshomomorphismus und $pt(f) : pt(B) \to pt(A)$ sei die eindeutige stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $(pt(f))^{-1} = \Phi_B \circ f \circ \Phi_A^{-1}$.

Dann folgt

Korollar 3.13. *pt : **RVerb** $\to$ **NTop** ist ein Cofunktor.*

Die Dualität

Satz 3.14. *Die Cofunktoren Ω und pt begründen eine Dualität zwischen der Kategorie der nüchternen topologischen Räume **NTop** und der Kategorie der regulären Verbänden **RVerb**. Dabei gilt:*

1. *Für alle regulären Verbände A ist $\Phi_A : A \to \Omega pt(A)$ ein vollständiger Verbandsisomorphismus. Er hat die bei einer Dualität geforderte Kommutativitätseigenschaft $\Omega pt(f) \circ \Phi_A = \Phi_B \circ f$ für alle vollständigen Verbandshomomorphismus $f : A \to B$.*

2. *Für alle nüchternen topologischen Räume X ist $\Psi_X : X \to pt\Omega(X)$ ein Homöomorphismus. Er hat die bei einer Dualität geforderte Kommutativitätseigenschaft $pt\Omega(g) \circ \Psi_X = \Psi_Y \circ g$ für alle stetigen Funktionen $g : X \to Y$.*

Beweis. 1. Dass Φ_A ein vollständiger Verbandshomomorphismus ist, wurde bereits bewiesen. Die Kommutativitätseigenschaft folgt sofort aus der Definition.

2. Dass Ψ_X ein Homöomorphismus ist, wurde ebenfalls schon bewiesen. Um die Kommutativitätseigenschaft zu beweisen, reicht es nach Lemma 1.8 zu zeigen, dass $\Omega(\Psi_X) = \Phi^{-1}_{\Omega(X)}$. Dies folgt aber sofort aus Satz 3.9.

Es bleibt die Bijektivität der Cofunktoren auf den Morphismen zu zeigen. Sind X und Y nüchterne topologische Räume, dann gibt es für jeden vollständigen Verbandshomomorphismus $f : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ genau eine stetige Funktion $g : X \to Y$ mit $\Omega(g) = g^{-1} = f$. Es folgt die Bijektivität von Ω auf den Morphismen.

Die Bijektivität von pt auf den Morphismen folgt durch folgende Überlegung: Die Morphismen in $Mor(A, B)$ stehen in bijektiver Beziehung zu den Morphismen in $Mor(\Omega pt(A), \Omega pt(B))$ über die Abbildung $\chi(f) = \Phi_B \circ f \circ \Phi_A^{-1}$. Nun gilt nach Definition 3.12 $\Omega pt(f) = \chi(f)$. Da nun $\chi : Mor(A, B) \to Mor(\Omega pt(A), \Omega pt(B))$ bijektiv, und $\Omega : Mor(pt(B), pt(A)) \to Mor(\Omega pt(A), \Omega pt(B))$ bijektiv, folgt auch die Bijektivität von $pt : Mor(A, B) \to Mor(pt(B), pt(A))$. □

Literatur

[1] Steven R Givant. *Introduction to Boolean Algebras.* Springer-Verlag, 2009.

[2] Peter Johnstone. *Stone Spaces.* Cambridge University Press, 1982.

[3] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, 1971.