Seminararbeit

Der Primzahlsatz

Johannes Philipp Schürz

02.03.2016

Betreuung: Ao.Univ.Prof. Dr.techn. Harald Woracek

Institut für Analysis and Scientific Computing

Technische Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir einen Beweis des Primzahlsatzes präsentieren und diskutieren. Die Darstellung orientiert sich an [S] und [W]; detaillierte Referenzen werden als Fußnoten angeführt.
Der Primzahlsatz gibt eine asymtotische Aussage über die Anzahl der Primzahlen. Bezeichne mit $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen, und

$$\pi(x) = |\{p \in \mathbb{P} \colon p \leq x\}|.$$

Wir schreiben $f \sim g$, wenn $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Satz 1.1. [1] (Primzahlsatz)
Es gilt $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log(x)}$.

Der Beweis des Primzahlsatzes verwendet analytische Eigenschaften der Riemann-Zeta Funktion $\zeta(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s}$, wobei für $y \in \mathbb{R}_+$ $y^s := \exp(s \cdot \log(y) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \dfrac{(s\cdot\log(y))^k}{k!}$ definiert ist. Als gleichmäßiger Grenzwert analytischer Funktionen stellt $\zeta(s)$ eine auf zumindest $\{s \in \mathbb{C} \colon \Re(s) > 1\}$ analytische Funktion dar.

[1] [S, S. 61]

2 Grundlegendes

Diese Arbeit gliedert sich in mehrere Abschnitte. Zunächst zeigen wir einige zum Primzahlsatz äquivalente Aussagen.
Hierzu definiern wir $\theta(x) := \sum_{p\in\mathbb{P},\, p\leq x} \log(p)$ und $\psi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\leq x} \Lambda(n)$, mit

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p)\ ,\ falls\ n = p^k \\ 0\ ,\ sonst \end{cases} .$$

Satz 2.1. [2] *Es sind äquivalent:*

1. $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log(x)}$
2. $\theta(x) \sim x$
3. $\psi(x) \sim x$, *für* $x \to \infty$.

Beweis. Es gilt $\theta(x) \leq \pi(x)\log(x)$. Sei $r(x)$ definiert durch $\theta(x) = x(1 + r(x))$. Dann gilt $\pi(x) \geq \frac{x}{\log(x)}(1 + r(x))$. Für $q \in (0, 1)$ gilt $\pi(x^q) \leq x^q$ und damit:

$$\theta(x) \geq \sum_{p\in\mathbb{P},\, x^q<p\leq x} \log(p) \geq \log(x^q)(\pi(x) - \pi(x^q)) \geq q\log(x)(\pi(x) - x^q),$$

also $\pi(x) \leq \frac{x}{q\log(x)}(1 + r(x)) + x^q$.
Wenn wir $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{\log(x)}}$ setzen, erhalten wir $\pi(x) \leq \dfrac{x}{\log(x)}(1 + R(x))$, mit

$$R(x) = -1 + (1 + r(x))(1 - \frac{1}{\sqrt{\log(x)}})^{-1} + \log(x)x^{-\frac{1}{\sqrt{\log(x)}}}.$$

Da $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{\log(x)}}) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \log(x)x^{-\frac{1}{\sqrt{\log(x)}}} = 0$ ist, folgt daraus $\limsup_{x\to\infty} r(x) = \limsup_{x\to\infty} R(x)$ und $\liminf_{x\to\infty} r(x) = \liminf_{x\to\infty} R(x)$.

2. ⇒ 1.: Da $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$ gilt , folgt $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$, und damit folgt $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$.
1. ⇒ 2.: Nun gilt $\limsup_{x\to\infty} r(x) \leq 0$ und $\liminf_{x\to\infty} R(x) \geq 0$, also $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$.
2. ⇔ 3.: Es ist zu zeigen, dass $\psi(x) = \theta(x) + \mathcal{O}(\log(x)\sqrt{x})$ ist. Nun ist

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \log(x) \cdot |\{(k, p) \colon k \geq 2, p^k \leq x\}|.$$

Also genügt es zu zeigen, dass

$$|\{(k, p) \colon k \geq 2, p^k \leq x\}| = \mathcal{O}(\sqrt{x}).$$

Aus $p^k \leq x$ folgt $p \leq \sqrt[k]{x}$ und $k \leq \frac{\log(x)}{\log(p)} \leq \frac{\log(x)}{\log 2}$. Und damit folgt die Abschätzung:

$$|\{(k, p) \colon k \geq 2, p^k \leq x\}| \leq \sum_{2\leq k\leq \frac{\log(x)}{\log 2}} \sqrt[k]{x} = \sqrt{x} + \sum_{3\leq k\leq \frac{\log(x)}{\log 2}} \sqrt[k]{x} \leq \sqrt{x} + \frac{\log(x)}{\log 2}\sqrt[3]{x} = \mathcal{O}(\sqrt{x}).$$

□

[2] [W, S. 2 f.]

Lemma 2.2. [3] (Euler Produkt)
Das Produkt $\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1}$ *konvergiert auf der Halbebene* $\{s \in \mathbb{C}\colon \Re(s) > 1\}$ *lokal gleichmäßig, hat dort keine Nullstellen und stellt* $\zeta(s)$ *dar. Es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\log(\zeta(s)) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)n^{-s}.$$

Beweis. Da $\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}(p^{-s})^k = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}(p^k)^{-s}$ folgt $\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(p^k)^{-s}$. Nun hat jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Primfaktorenzerlegung. Daraus folgt

$$\prod_{p\in\mathbb{P},\, p_0\le p\le p_1}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(p^k)^{-s} = 1 + \sum_{n>1,\, n\, hat\, nur\, Primfaktoren\, p\in[p_0,p_1]} n^{-s}.$$

Man beachte, dass die hier auftretenden Reihen absolut konvergieren. Für $s = \sigma + it$ gilt

$$|\prod_{p\in\mathbb{P},\, p\in[p_0,p_1]}(1-p^{-s})^{-1} - 1| \le \sum_{n>1,\, n\, hat\, nur\, Primfaktoren\, p\in[p_0,p_1]} n^{-\sigma} \le \sum_{n\ge p_0} n^{-\sigma}.$$

Daraus folgt, dass das Euler-Produkt lokal gleichmäßig konvergiert. Mit $p_0 = 2$ und $p_1 \to \infty$ gilt $\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s}$.
Mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\log(\zeta(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\log\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\sum_{p\in\mathbb{P}}\log(1-p^{-s}) = \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log(1-p^{-s}) =$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = \sum_{p\in\mathbb{P}}\log(p)\sum_{k\in\mathbb{N}}(p^k)^{-s} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(n)n^{-s}$$

folgt das Gewünschte. □

Lemma 2.3. [4] *Sei* $c > 0$*, dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s(s(s+1))^{-1}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 1-y^{-1}\ , & falls\ y \ge 1 \\ 0\ , & sonst \end{cases}.$$

Für den Beweis siehe Anhang.

Lemma 2.4. [5] *Sei* $c > 1$ *und* $x \ge 1$*, dann gilt:*

$$x^{-1}\sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s(s+1)}(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)})\,\mathrm{d}s.$$

Beweis. Für $c > 0$ gilt nach Lemma 1.3:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)(1-\frac{n}{x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(n)\cdot\int_{c-i\infty}^{c+\infty}(\frac{x}{n})^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)}.$$

[3] [W, S. 4 f.]
[4] [S, S. 77, 206f.]
[5] [S, S. 77 f.]

Um nun die Summe mit dem Ingral vertauschen zu können, stützen wir uns auf Lebesgues Satz von der dominierenden Konvergenz. Dazu müssen wir eine konvergente Majorante finden. Für $c > 1$ gilt wegen der Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)n^{-c}$, dass $\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)\frac{x^c}{n^c} \frac{\mathrm{d}t}{|(c+it)(c+1+it)|} < \infty$, womit der Satz angewandt werden kann, und gibt

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)(1-\frac{n}{x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)n^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

Mit Lemma 1.2 folgt daher die Behauptung. □

3 Die Riemann-Zeta Funktion

Nun wollen wir die für den Primzahlsatz relevanten Eigenschaften der Riemann-Zeta Funktionen zeigen. Der folgende Satz wird in den nachfolgenden Lemmata bewiesen werden:

Satz 3.1. [6] *Die Riemann-Zeta Funktion hat folgende Eigenschaften:*

1. *$\zeta(s)$ ist analytisch im Gebiet $\Re(s) > 0$ und hat einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum 1.*
2. *$-\frac{\zeta'}{\zeta}$ ist analytisch im Gebiet $\Re(s) > 0$ mit Ausnahme der Nullstelen der Riemann-Zeta Funktion und $s = 1$, bei $s = 1$ liegt ein einfacher Pol mit Residuum 1.*
3. *$\zeta(s)$ hat keine Nullstellen auf $\Re(s) \geq 1$.*
4. *Es gibt Konstanten $\gamma_0 \geq 1$ und δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, sodass für alle s mit $\Re(s) \geq 1$, $|s-1| \geq 1$ und der Abkürzung $\tau = |t| + 2$ folgende Abschätzungen gelten:*
   - $|\zeta(\sigma + it)| \leq \gamma_0 \cdot \tau^\delta$
   - $|\zeta'(\sigma + it)| \leq \gamma_0 \cdot \tau^\delta$
   - $|\zeta(\sigma + it)|^{-1} \leq \gamma_0 \cdot \tau^\delta$.

Im folgenden Lemma wird die analytische Fortsetzung der Riemann-Zeta Funktion bewiesen:

Lemma 3.2. [7] *$\zeta(s)$ hat eine analytische Fortsetzung im Gebiet $\Re(s) > 0$, bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum 1.*

Um dieses Lemma zu beweisen, benötigen wir noch ein nützliches Werkzeug, die Partielle Summation:

Lemma 3.3. [8] *Seien komplexe Zahlen a_n und eine paarweise verschiede reelle Folge $\lambda_n \nearrow \infty$ gegeben. Weiters sei $g : [\lambda_1, x] \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\sum_{\lambda_n\leq x} a_n \cdot g(\lambda_n) = g(x) \cdot \sum_{\lambda_n\leq x} a_n - \int_{\lambda_1}^{x} (\sum_{\lambda_n\leq u} a_n) \cdot g'(u)\,\mathrm{d}u.$$

[6] [S, S. 78 f.]
[7] [S, S. 88]
[8] [S, S. 193 f.]

Für den Beweis siehe Anhang.

Beweis. (von Lemma 3.2)
Mit $a_n = 1$, $\lambda_n = n$ und $g(u) = u^{-s}$ gilt für $\Re(s) > 1$ mit Partieller Summation

$$\sum_{n\leq N} 1 \cdot n^{-s} = \lfloor N \rfloor \cdot N^{-s} + s \int_1^N \lfloor u \rfloor \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \mathcal{O}(N^{1-\Re(s)}) + s \int_1^N u^{-s}\,\mathrm{d}u + s \int_1^N (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u.$$

Mit $s \int_1^\infty u^{-s}\,\mathrm{d}u = (s-1)^{-1} + 1$ folgt nun mit dem Grenzübergang $N \to \infty$

$$\zeta(s) - (s-1)^{-1} = 1 + s \int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u.$$

Das Inegral auf der rechten Seite konvergiert absolut und lokal gleichmäßig für $\Re(s) > 0$ und stellt somit die Analytische Fortsetzung der linken Seite dar. Der einfache Pol bei $s = 1$ und dessen Residuum 1 folgt sofort aus der Darstellung. □

Folgendes Lemma beweist den 2. Punkt des Satzes 2.1:

Lemma 3.4. [9] *In einer gewissen Umgebung von $s = 1$ ist die Funktion $g(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - (s-1)^{-1}$ analytisch.*

Beweis.

$$\zeta(s) = (s-1)^{-1} + 1 + s \int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u,$$

woraus folgt

$$\zeta'(s) = -(s-1)^{-2} + \int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u + s \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u\Big).$$

Hieraus folgt, dass

$$g(s) = -\frac{-(s-1)^{-2} + \int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u + s \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u)}{(s-1)^{-1} + 1 + s\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u} - (s-1)^{-1} =$$

$$= -\frac{-(s-1)^{-1} + (s-1)\{\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u + s \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u)\}}{1 + (s-1)\{1 + s\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u\}} - (s-1)^{-1}.$$

Nun sieht man leicht, dass

$$g(s) = (s-1)^{-1}\Big(\frac{1}{1 + (s-1) + s(s-1)\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u} - 1\Big) + H(s)$$

ist, wobei $H(s)$ im Punkt $= 1$ analytisch ist. Der Term

$$\left(\frac{1}{1 + (s-1) + s(s-1)\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u} - 1\right)$$

hat eine Nullstelle bei $s = 1$. Da man bei analytischen Funktionen Nullstellen durchkürzen darf, folgt, dass $g(s)$ analytisch im Punkt $s = 1$ ist. □

[9] [S, S. 89]

Etwas schwieriger ist Nichtexistenz von Nullstellen zu beweisen:

Satz 3.5. [10] *$\zeta(s) \neq 0$ für alle s, $\Re(s) \geq 1$.*

Beweis. Dass in dem Gebiet $\Re(s) > 1$ keine Nullstellen der Riemann-Zeta Funktion existieren, folgt unmittelbar aus der Produktdarstellung. Also ist nur der Fall $\Re(s) = 1$ interessant. Für den Beweis betrachten wir das nichtnegative trigonometrische Polynom

$$3 + 4\cos(\phi) + \cos(2\phi) = 2(1 + \cos(\phi))^2 \geq 0.$$

Für $\sigma > 1$ gilt

$$\Re(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}) = \Re(-\sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)n^{-\sigma}e^{-it\log n}) = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(t\log n).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\Re(3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + 4\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} + \frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}) = \\ &= -\sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)n^{-\sigma}(3 + 4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n)) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Annahme: Sei t_1 derart, dass bei $1 + it_1$ eine k-fache Nullstelle ist. $t_1 \neq 0$, da dort ein Pol liegt. Daraus folgt, dass die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}$ einen einfachen Pol an dieser Stelle mit Residiuum k hat. Also gilt $\frac{\zeta'(\sigma+it_1)}{\zeta(\sigma+it_1)} \sim k\cdot(\sigma-1)^{-1}$ für $\sigma \searrow 1$. Weiterhin gilt $\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \sim -(\sigma-1)^{-1}$ und $\frac{\zeta'(\sigma+2it_1)}{\zeta(\sigma+2it_1)} \sim k'\cdot(\sigma-1)^{-1}$ für $\sigma \searrow 1$, mit einer k'-fachen Nullstelle der ζ Funktion an der Stelle $1 + 2it_1$. Also folgt

$$\Re(3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + 4\frac{\zeta'(\sigma+it_1)}{\zeta(\sigma+it_1)} + \frac{\zeta'(\sigma+2it_1)}{\zeta(\sigma+2it_1)}) \sim \frac{-3}{\sigma-1} + \frac{4k}{\sigma-1} + \frac{k'}{\sigma-1}$$

für $\sigma \searrow 1$. Der rechte Ausdruck strebt gegen ∞, was ein Widerspruch zu (2.1) ist. □

Die folgenden Sätze beweisen die Abschätzungen des Satzes 2.1:

Satz 3.6. [11]
Es gilt:

a) Sei $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ gegeben. Dann gilt: $|\zeta(\sigma+it) - (\sigma+it-1)^{-1}| \leq \gamma_0'\tau^\delta\cdot\log(\tau)$ für $\sigma \geq 1-\delta$ und alle t.

b) Zu jeder Konstanten $A > 0$ gibt es ein von A abhängiges γ_2, sodass gilt:

$$|\zeta(\sigma+it) - (\sigma+it-1)^{-1}| \leq \gamma_2(A)\cdot\tau^\delta\cdot\log(\tau)$$

für alle t und alle $\sigma \geq \max\{\frac{1}{2}, 1 - A\log^{-1}(\tau)\}$.

[10] [S, S. 89 f.]
[11] [S, S. 92 ff.]

Um den folgenden Satz zu beweisen, benötigen wir aber noch ein kleines Werkzeug:

Lemma 3.7. [12] (Eulersche Summenformel)
Die Funktion $g : [a, x] \to \mathbb{C}$ sei stetig und stückweise stetig differenzierbar. Zur Abkürzung bezeichne $B_0(x) := x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2}$ die angegebene periodische Funktion. Dann gilt

$$\sum_{a<n\leq x} g(n) = \int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^x B_0(u)g'(u)\,\mathrm{d}u - g(x)\cdot B_0(x) + g(a)\cdot B_0(a).$$

Für den Beweis siehe Anhang.

Beweis. (von Satz 2.6)
Für $\Re(s) > 1$ und $N \geq 2$ gilt nach der Eulerschen Summenformel

$$\zeta(s) - (s-1)^{-1} - \sum_{n\leq N} n^{-s} = \sum_{n>N} n^{-s} - (s-1)^{-1} =$$

$$= \int_N^\infty u^{-s}\,\mathrm{d}u - s\int_N^\infty B_0(u)\cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u + B_0(N)\cdot N^{-s} - (s-1)^{-1} =$$

$$= (N^{1-s}-1)(s-1)^{-1} - s\int_N^\infty B_0(u)\cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u + B_0(N)\cdot N^{-s}.$$

Da auf beiden Seiten analytischen Funktionen in s stehen, folgt, dass die Gleichheit auch für $\Re(s) > 0$ gelten muss. Um den Satz zu beweisen, genügt es nun, die rechte Seite abzuschätzen. Zunächst gilt:

$$|(N^{1-s}-1)(s-1)^{-1}| \leq 3(1+N^{1-\sigma})\cdot\log(N).$$

Diese Ungleichung ist für $|s-1|\cdot\log(N) \geq 1$ klar, für den anderen Fall folgt durch Reihenentwicklung: $|(N^{1-s}-1)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{|(s-1)\cdot\log(N)|^k}{k!} \leq e-1 < 3\cdot\log(N)$.
Nun gilt für $1-\delta \leq \sigma \leq \sqrt{2}$ unter Beachtung von $|B_0(u)| \leq \frac{1}{2}$:

$$|\zeta(s) - (s-1)^{-1}| \leq \sum_{n\leq N} n^{-(1-\delta)} + 3(N^{1-\sigma}+1)\cdot\log(N) + \frac{1}{2}|s|\sigma^{-1}N^{-\sigma} + \frac{1}{2}N^{-\sigma}.$$

Da nun $\sum_{n\leq N} n^{-(1-\delta)}$ durch $1 + \int_1^N u^{-(1-\delta)}\,\mathrm{d}u = 1 + \delta^{-1}N^\delta - \delta^{-1} \leq \delta^{-1}N$ abgeschätzt werden kann, folgt:

$$\begin{aligned}|\zeta(\sigma+it) - (\sigma+it-1)^{-1}| &\leq \delta^{-1}N + 6N^\delta\cdot\log(N) + \frac{1}{2}\tau N^{\delta-1}\cdot 2 + \frac{1}{2}N^{\delta-1}\\ &\leq \delta^{-1}N^\delta + 6N^\delta\cdot\log(N) + \frac{5}{4}\tau N^{\delta-1}. \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Wählt man nun N günstig, etwa $N = \tau$ so folgt die erste Behauptung mit $\gamma_0' = 8 + 2\delta^{-1}$ für $1-\delta \leq \sigma \leq \sqrt{2}$; für $\Re(s) \geq \sqrt{2}$ ist offenbar

$$|\zeta(\sigma+it) - (\sigma+it-1)^{-1}| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\sqrt{2}} + 2,5 < 6,5 \leq (8+2\delta^{-1})\tau^\delta\cdot\log(\tau).$$

[12] [S, S. 195 f.]

Für die zweite Behauptung setzt man $\delta = \delta(\tau) = \min\{\frac{1}{2}, A \cdot \log^{-1}(\tau)\}$. Hiermit erhällt man aus (2.2) für $\tau \geq \exp(2A)$:

$$|\zeta(\sigma + it) - (\sigma + it - 1)^{-1}| \leq \exp(\frac{A \cdot \log(N)}{\log(\tau)}) \cdot (A^{-1} \cdot \log(\tau) + 6\log(N) + 2\tau N^{-1}).$$

Setzt man wieder $N = \tau$ so erhät man:

$$|\zeta(\sigma + it) - (\sigma + it - 1)^{-1}| \leq \log(\tau) \cdot \exp(A) \cdot (A^{-1} + 6 + \frac{2}{2A}).$$

Für $\tau \leq \exp(2A)$ ist $|\zeta(\sigma + it) - (\sigma + it - 1)^{-1}|$ durch eine von A abhängige Konstante beschränkt, und die Behauptung folgt. $\square$

Satz 3.8. [13] *Sei $A > 0$ gegeben. Für $\sigma \geq \max\{\frac{1}{2}, 1 - A \cdot \log^{-1}(\tau)\}$ gilt mit einer von A abhängigen Konstanten γ_3:*

$$|\zeta'(\sigma + it) + (\sigma + it - 1)^{-2}| \leq \gamma_3(A) \cdot \log^2(\tau).$$

Beweis. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt:

$$\zeta'(s) + (s - 1)^{-2} = (2\pi i)^{-1} \int_R (z - s)^{-2} \cdot (\zeta(z) - (z - 1)^{-1})\,\mathrm{d}z,$$

wobei $R := \{s + A \cdot \log^{-1}(\tau)e^{it}; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ist. Da nach Satz 2.6 b) im Bereich $\sigma \geq 1 - 2A \cdot \log(\tau)$ für $\tau \geq e^{4A}$ die Abschätzung $|\zeta(\sigma + it) - (\sigma + it - 1)^{-1}| \leq \gamma_2 \log(\tau)$ gilt, folgt:

$$|\zeta'(\sigma + it) + (\sigma + it - 1)^{-2}| \leq (2\pi)^{-1} \cdot 2\pi A \cdot \log^{-1}(\tau) \frac{\gamma_2 \log(\tau)}{(A \cdot \log^{-1}(\tau))^2} \leq A^{-1}\gamma_2 \log^2(\tau).$$

Für $\tau \leq e^{4A}$ ist $|\zeta'(\sigma + it) + (\sigma + it - 1)^{-2}|$ beschränkt, somit folgt die Behauptung. $\square$

Satz 3.9. [14] *Mit positiven Konstanten c_3, c_4 gilt für alle $|t| \geq \frac{1}{2}$ und alle $\sigma \geq 1 - c_3 \log^{-9}(\tau)$ die Abschätzung $|\zeta(\sigma + it)| \geq c_4 \log^{-7}(\tau)$. Insbesondere hat die Riemann-Zeta Funktion dort keine Nullstellen.*

Beweis. Wir beginnen mit dem bewährten, trigonometrischen Polynom $3 + 4\cos(\phi) + \cos(2\phi) \geq 0$. Für $\Re(s) > 1$ gilt die Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1} = \exp(\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} p^{-ns}),$$

also für $\sigma > 1$:

$$|\zeta(s)| = \exp\{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} p^{-n\sigma} \cos(t \log(p))\}.$$

Hieraus folgt aus der Produktdarstellung: $|\zeta(\sigma)|^3 \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$. Also folgt für $\sigma > 1$ und $|t| \geq \frac{1}{2}$: $|\zeta(\sigma + it)| \geq |\zeta(\sigma)|^{-\frac{3}{4}} \cdot |\zeta(\sigma + 2it)|^{-\frac{1}{4}}$, und wegen Satz 2.6 b) und des einfachen Pols bei $s = 1$ folgt mit einem $1 \geq c_1 > 0$: $|\zeta(\sigma+it)| > c_1(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}(\log(\tau))^{-\frac{1}{4}}$

[13] [S, S. 94 f.]
[14] [S, S. 95 f.]

für $2 \geq \sigma > 1$, $|t| \geq \frac{1}{2}$.
Nun wollen wir auch eine Abschätzung für $\sigma < 1$ finden. Da $1 - \frac{1}{3}\log^{-1}(\tau) > \frac{1}{2}$ für $|t| \geq \frac{1}{2}$ gilt, folgt nun aus Satz 2.8 für $|t| \geq \frac{1}{2}$

$$|\zeta(\rho + it) - \zeta(\sigma + it)| = |\int_\rho^\sigma \zeta'(u + it)\,\mathrm{d}u| \leq |\sigma - \rho| \cdot c_2 \log^2(\tau)$$

für $\min(\rho, \sigma) \geq 1 - \frac{1}{3}\log^{-1}(\tau)$ mit einem $c_2 \geq 1$. Nun folgt für $|t| \geq \frac{1}{2}$, $\rho \geq 1 - \frac{1}{3}\log^{-1}(\tau)$, $2 \geq \sigma > 1$:

$$|\zeta(\rho + it)| \geq |\zeta(\sigma + it)| - c_2|\sigma - \rho| \cdot \log^2(\tau) > c_1(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}}(\log(\tau))^{\frac{1}{4}} - c_2|\sigma - \rho| \cdot \log^2(\tau).$$

Mit der Konstanten $c_3 = (\dfrac{c_1}{3c_2})^4 \leq \frac{1}{81}$ und $\sigma = 1 + c_3 \log^{-9}(\tau)$, $|\rho - 1| \leq c_3 \log^{-9}(\tau)$ $(\leq \frac{1}{3}\log^{-1}(\tau))$ folgt die untere Abschätzung

$$|\zeta(\rho + it)| > c_1 c_3^{\frac{3}{4}} \log^{-7}(\tau) - c_2 \cdot 2c_3 \log^{-7}(\tau) = \frac{1}{3}c_1^4(3c_2)^{-3}\log^{-7}(\tau) = c_2 c_3 \log^{-7}(\tau).$$

Für $2 \geq \rho \geq 1 + c_3 \log^{-9}(\tau)$ folgt:

$$|\zeta(\rho + it)| \geq c_1 c_3^{\frac{3}{4}} \log^{-7}(\tau) = c_1^4(3c_2)^{-3}\log^{-7}(\tau).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 3.10. [15] *Für* $\frac{2}{3} \leq \sigma \leq \frac{4}{3}$, $|t| \leq \frac{1}{2}$ *gilt* $|\zeta(\sigma + it)| > \frac{2}{5}$.
Für $\sigma \geq \frac{4}{3}$ *gilt* $|\zeta(\sigma + it)|^{-1} \leq \zeta(\frac{4}{3})$.

Beweis. Es gilt

$$|\zeta(s) - (s-1)^{-1}| = |\frac{1}{2} + s\int_1^\infty (\lfloor u \rfloor - u + \frac{1}{2}) \cdot u^{-(s+1)}\,\mathrm{d}u|$$
$$\leq \frac{1}{2} + |s| \int_1^\infty \frac{1}{2} u^{-(\sigma+1)}\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|s|\sigma^{-1} \leq \sigma^{-1} \cdot |s|,$$

für $\Re(s) > 0$, $s \neq 1$, also folgt: $|\zeta(s)| \geq |s-1|^{-1} - \sigma^{-1} \cdot |s|$. Für $\frac{2}{3} \leq \sigma \leq \frac{4}{3}$, $|t| \leq \frac{1}{2}$, $s \neq 1$ ist nun

$$|s-1|^{-1} - \sigma^{-1} \cdot |s| = ((\sigma-1)^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}} - (1 + (\frac{t}{\sigma})^2)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$(\frac{1}{9} + \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} - (1 + (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2})^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13} - \frac{5}{4} \geq 1{,}66 - 1{,}25 > \frac{2}{5}.$$

Für die zweite Behauptung, erkennen wir aus der Produktdarstellung der Riemann-Zeta Funktion, dass

$$|\zeta(\sigma + it)|^{-1} = \exp\{-\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} p^{-n\sigma} \cos(t \log(p))\}$$

gilt. Also folgt

$$|\zeta(\sigma + it)|^{-1} \leq \exp\{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} p^{-n\sigma}\} \leq \zeta(\frac{4}{3}),$$

für $\sigma \geq \frac{4}{3}$. Das zeigt das Gewünschte. □

[15] [S, S. 96 f.]

4 Beweis des Primzahlsatzes

Wir betrachten nun die Funktion $g(s) := -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$ [16], die auf $\Re(s) \geq 1$ analytisch ist, da sich die einfachen Pole an der Stelle $s = 1$ wegheben. Wegen Satz 2.1 gilt die Abschätzung

$$|g(\sigma + it)| \leq \max(2\gamma_0^2, \sup_{|s-1|\leq 1, \Re(s)\geq 1} |g(s)|) \cdot \tau^{2\delta}.$$

Analog zu Lemma 1.4 zeigt man für $c > 1$ die Gleichung

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} (x - n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \zeta(s)(s(s+1))^{-1} \, \mathrm{d}s.$$

Also folgt

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1)(x - n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} g(s) \, \mathrm{d}s.$$

Die folgende Identität bringt uns sehr nahe ans Ziel:

Satz 4.1. [17] *Es gilt* $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x - n) = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Beweis. Im Beweis werden wir über folgenden geschlossenen Weg integrieren:

$$I_1 := \{c + it;\ -T \leq t \leq T\} \cup I_2 := \{\sigma + iT;\ c \geq \sigma \geq 1\} \cup$$

$$I_3 := \{1 + it;\ T \geq t \geq -T\} \cup I_4 := \{\sigma - iT;\ 1 \leq \sigma \leq c\}$$

mit $c > 1$. Nach Cauchys Integralsatz gilt $\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{4} \int_{I_j} \dfrac{x^s}{s(s+1)} \cdot g(s) \, \mathrm{d}s = 0$. Nun wollen wir die Integrale über I_2 und I_4 abschätzen. Wegen $|s(s+1)| \geq T^2$ für $s \in I_2$ gilt folgende Abschätzung: $| \int_{I_2} | \leq T^{-2}\, x^c\, \gamma_1\, (T+2)^{2\delta}\, (c-1)$. Wegen $\delta < \dfrac{1}{2}$ gilt, dass die Integrale über I_2 und I_4 für $T \to \infty$ verschwinden. Da $|g(s)| \leq C \cdot \tau^{2\delta}$ ist, folgt, dass $\lim_{T\to\infty} \int_{I_3} \dfrac{x^s}{s(s+1)} \cdot g(s) \, \mathrm{d}s$ existiert, und dass weiters gilt:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \cdot g(s) \, \mathrm{d}s = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \cdot g(s) \, \mathrm{d}s = x \cdot i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(1+it)}{(1+it)(2+it)} \cdot e^{it \log x} \, \mathrm{d}t.$$

Da die Funktion $h(t) := \dfrac{g(1+it)}{(1+it)(2+it)}$ stetig und damit Borel-messbar ist, und weiters $h \in L_1(\mathbb{R})$ gilt, folgt: $\lim_{x\to\infty} \widehat{h}(x) = 0$, also $\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{g(1+it)}{(1+it)(2+it)} \cdot e^{it\log x} \, \mathrm{d}t = 0$. Also gilt insgesamt: $x^{-2} \sum_{n\leq x} (\Lambda(n) - 1) \cdot (x - n) = o(1)$ für $x \to \infty$. Nun folgt aus der Eulerschen Summenformel mit $g(u) = u - x$ leicht: $\sum_{n\leq x}(x - n) = \dfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x)$, und somit das Gewünschte. □

[16] [S, S. 79]
[17] [S, S. 79 ff.]

Durch Partielle Summation mit $a_n = \Lambda(n)$, $\lambda_n = n$ und $g(u) = x - u$ sieht man schnell, dass $\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \cdot (x-n) = \int_1^x \sum_{n\leq u} \Lambda(n)\, \mathrm{d}u$ gilt.
Die Brücke zu $\sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ liefert uns folgendes Lemma, das unter gewissen Umstanden das Differenzieren von asymtotischen Formeln rechtfertig:

Lemma 4.2. [18] *Sei $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ und $A : [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nicht nichtnegative, monoton wachsene Funktion, und das Integral $A_1(x) = \int_\alpha^x A(u)\, \mathrm{d}u$ erfüllt $A_1(x) \sim \beta \cdot x^\gamma$ für $x \to \infty$. Dann gilt $A(x) \sim \beta\gamma \cdot x^{\gamma-1}$ für $x \to \infty$.*

Beweis. Sei $0 < \epsilon < \min(\frac{1}{2}, \beta)$. Wegen der Monotonie von $A(.)$ folgt nun:

$$A(x) \leq \frac{1}{\epsilon x} \int_x^{(1+\epsilon)x} A(u)\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\epsilon x}(A_1(x + \epsilon x) - A_1(x)).$$

Für genügend großes x folgt aus den Vorraussetzungen: $|A_1 - \beta x^\gamma| \leq \epsilon^2 x^\gamma$. Also gilt weiters

$$A(x) \leq \frac{1}{\epsilon x} x^\gamma((1+\epsilon)^\gamma \cdot (\beta + \epsilon^2) - 1^\gamma \cdot (\beta - \epsilon^2)) \leq x^{\gamma-1}(\beta \frac{(1+\epsilon)^\gamma - 1}{\epsilon} + (2^\gamma + 1)\epsilon).$$

Aus dem Satz von Taylor folgt, da $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, mit $|\theta| \leq 1$:

$$(1+\epsilon)^\gamma = 1 + \gamma\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 \gamma(\gamma - 1)(1 + \theta\epsilon)^{\gamma-2}.$$

Somit gilt

$$\limsup_{x\to\infty} x^{-(\gamma-1)} \cdot A(x) \leq \beta\gamma + \beta\frac{1}{2}\gamma^2 \cdot \epsilon + (2^\gamma + 1)\epsilon,$$

und da ϵ beliebig war: $\limsup_{x\to\infty} x^{-(\gamma-1)} \cdot A(x) \leq \beta\gamma$. Analog sieht man mit der Ungleichung: $A(x) \geq \frac{1}{\epsilon x} \int_{(1-\epsilon)x}^x A(u)\, \mathrm{d}u$, dass $\liminf_{x\to\infty} x^{-(\gamma-1)} \cdot A(x) \geq \beta\gamma$ gilt. □

Es folgt:

Beweis. (von Satz 1.1)
Mit $A(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ folgt aus dem vorigen Lemma und der Vorkenntniss $\int_1^x \sum_{n\leq u} \Lambda(n)\, \mathrm{d}u \sim \frac{1}{2}x^2$ für $x \to \infty$, dass $\psi(x) \sim x$ für $x \to \infty$. Nach Lemma 2.1 ist dies äquivalent zu $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ für $x \to \infty$. □

[18] [S, S. 82 f.]

5 Zusammenhang zur Riemannschen Vermutung

Durch trickreichere Integrationswege und Abschätzungen der Riemann-Zeta Funktion kann eine Abschätzung für das Restglied hergeleitet werden. Wir wollen eine Aussage in diese Richtung - ohne Beweis - erwähnen.

Satz 5.1. [19] *Es gilt:*

- $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \log^{-1} u \, \mathrm{d}u + \mathcal{O}(x \cdot \exp(-C \log^{\frac{1}{10}} x))$ *für* $x \to \infty$

bzw. noch besser:

- $\pi(x) = \int_2^x \log^{-1} u \, \mathrm{d}u + \mathcal{O}(x \log^{-q} x)$, $q > 0$ *beliebig, für* $x \to \infty$.

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Asymptotik des Restgliedes und den Nullstellen der Riemann-Zeta Funktion:

Satz 5.2. [20] *Ist* $\rho = \sigma_0 + it_0$ *mit* $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 < 1$ *eine Nullstelle der Riemann-Zeta Funktion, dann ist die Abschätzung* $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + o(x^{\sigma_0})$ *für* $x \to \infty$ *falsch.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch: Sei $\epsilon > 0$, $\epsilon < \frac{1}{2}$ und gelte $\sum_{n \leq x}(\Lambda(n) - 1) \leq \epsilon \cdot x^{\sigma_0}$ für $x > x_0(\epsilon)$. Durch Partielle Summation erhält man für $\Re(s) > \sigma_0$:

$$|-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)| = |\lim_{N \to \infty} \sum_{n \leq N} (\Lambda(n) - 1) \cdot n^{-s}| =$$

$$= |\lim_{N \to \infty} \{\sum_{n \leq N} (\Lambda(n) - 1) \cdot N^{-s} + s \int_1^{x_0} \sum_{n \leq u} (\Lambda(n) - 1) \cdot u^{-s-1} \, \mathrm{d}u + \int_{x_0}^N \sum_{n \leq u} (\Lambda(n) - 1) \cdot u^{-s-1} \, \mathrm{d}u\}|$$

$$\leq \lim_{N \to \infty} \epsilon \cdot N^{\sigma_0 - \sigma} + |s| \cdot C(x_0) + |s| \cdot \int_1^\infty \epsilon \cdot u^{\sigma_0 - \sigma - 1} \, \mathrm{d}u \leq \frac{2\epsilon |s|}{\sigma - \sigma_0},$$

wenn σ nahe genug bei σ_0 ist. Wenn nun bei ρ eine k-fache Nullstelle ist, dann gilt $-\frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)} \sim -\frac{k}{\sigma - \sigma_0}$ für $\sigma \searrow \sigma_0$. Also insgesamt $-\frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)} - \zeta(\sigma + it_0) = -\frac{k}{\sigma - \sigma_0} + \mathcal{O}(1)$ für $\sigma \searrow \sigma_0$. Dies ist ein Widerspruch zur vorigen Abschätzung. □

[19] [S, S. 97, 102]
[20] [S, S. 103 f.]

6 Anhang

Beweis. von Lemma 1.3
Sei zunächst $y \leq 1$. Wir integrieren über den geschlossenen Weg:

$$L := \{c + it;\ -T \leq t \leq T\} \cup R := \{c + Te^{-it};\ -\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\}.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt: $\int_{L \cup R} y^s(s(s+1))^{-1}\,\mathrm{d}s = 0$. Für $s \in R$ gilt $|s(s+1)| \geq T^2$ und $|y^s| \leq 1$, somit folgt $\lim_{T\to\infty} |\int_R y^s(s(s+1))^{-1}\,\mathrm{d}s| = 0$, und damit die erste Behauptung.
Für den Fall $y > 1$ integrieren wir über:

$$L := \{c + it;\ -T \leq t \leq T\} \cup R' := \{c + Te^{it};\ \frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{3}{2}\}.$$

Für $T > c+1$ umschließt der Weg die Pole bei 0 und -1. Somit gilt nach dem Residuensatz: $\frac{1}{2\pi i}\int_{L \cup R'} y^s(s(s+1))^{-1}\,\mathrm{d}s = 1 - y^{-1}$. Die zweite Behauptung folgt, da $\lim_{T\to\infty} |\int_{R'} y^s(s(s+1))^{-1}\,\mathrm{d}s| = 0$ ist. □

Beweis. von Lemma 2.3
Sei j so gewählt, dass $\lambda_j \leq x < \lambda_{j+1}$. Dann gilt:

$$-\int_{\lambda_1}^{x} \sum_{\lambda_n \leq u} a_n \cdot g'(u)\,\mathrm{d}u = -\sum_{i=1}^{j-1}\{\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \sum_{\lambda_n \leq u} a_n \cdot g'(u)\,\mathrm{d}u\} - \int_{\lambda_j}^{x} \sum_{\lambda_n \leq u} a_n \cdot g'(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1}(\sum_{\lambda_k \leq \lambda_i} a_k) \cdot (g(\lambda_i) - g(\lambda_{i+1})) + \sum_{\lambda_k \leq \lambda_j} a_k(g(\lambda_j) - g(x)) =$$

$$= -g(x)\sum_{\lambda_n \leq x} a_n + g(\lambda_j)\sum_{\lambda_k \leq \lambda_j} a_k + \sum_{i=1}^{j-1}(\sum_{\lambda_k \leq \lambda_i} a_k) \cdot (g(\lambda_i) - g(\lambda_{i+1})) =$$

$$= -g(x)\sum_{\lambda_n \leq x} a_n + \sum_{i=2}^{j}\{\sum_{\lambda_k \leq \lambda_i} a_k \cdot g(\lambda_k) - \sum_{\lambda_k \leq \lambda_{i-1}} a_k \cdot g(\lambda_k)\} + a_1 \cdot g(\lambda_1) =$$

$$= -g(x)\sum_{\lambda_n \leq x} a_n + \sum_{\lambda_n \leq x} a_n \cdot g(\lambda_n).$$

□

Beweis. von Lemma 2.7
Wir wollen dieses Lemma mit Hilfe der Partiellen Summation beweisen. O.B.d.A. kann vorrausgesetzt werden, dass $a \geq 1$ und g auf das Intervall $[1, a)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar fortgesetzt werden kann. Mit $a_n = 1$ und $\lambda_n = n$ folgt:

$$\sum_{a<n\leq x} g(n) = \sum_{n \leq x} g(n) - \sum_{n \leq a} g(n) = \lfloor x \rfloor g(x) - \lfloor a \rfloor g(a) - \int_a^x \lfloor u \rfloor g'(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_a^x B_0(u) \cdot g'(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^x u \cdot g'(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_a^x g'(u)\,\mathrm{d}u + \lfloor x \rfloor g(x) - \lfloor a \rfloor g(a).$$

□

Literaturverzeichnis

[S] Wolgang Schwarz: *Einführung in die Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie*, Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim, 1969.

[W] Harald Woracek: *Komplexe Analysis 2*, Tu Wien, 2007. Vorlesungsskript `http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/skripten/fterg.pdf`