Analysis Seminar
Verallgemeinerte Holomorphie auf Banachräumen

Nathanael Skrepek

Wien, 25. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit behandelt den Holomorphiebegriff verallgemeinert für Funktionen von normierten Vektorräumen in normierte Vektorräume. Dabei werden nur Vektorräume über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ betrachtet. Das Ziel ist die Holomorphie-Eigenschaft einer Funktion von irgendeinem normierten Raum auf Holomorphie von Funktionen von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}$ herunterzubrechen

Als ersten werden Polynome von normierten Vektorräumen in normierte Vektorräume vorgestellt, damit später Potenzreihen eingeführt werden können und somit eine Verallgemeinerung für analytische Funktionen formuliert werden kann. Für Funktionen auf $\mathbb{C}$ ist bekanntlich holomorph äquivalent zu analytisch. Daher wird eine Verallgemeinerung für analytisch eingeführt und holomorph als analytisch definiert.

2 Polynome

2.1 Multilineare Abbildungen

2.1. Definition. Seien $E_1, E_2, \ldots, E_m, F$ $m \in \mathbb{N}$ normierte Räume, dann nennt man eine Abbildung $A : \prod_{i=1}^m E_i \to F$ m-linear, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} A(a)_i : E_i &\to F \\ x &\mapsto A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_m) \end{aligned}$$

für alle $a \in \prod_{i=1}^m E_i$ und für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ linear ist.

2.2. Definition. Für $m \in \mathbb{N}$ seien $E_1, E_2, \ldots, E_m, F$ normierte Räume. Dann bezeichnet $\mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_m; F)$ den Vektorraum, der m-linearen Abbildungen von $\prod_{i=1}^m E_i$ nach F.

Der Unterraum der beschränkten m-linearen Abbildungen wird durch $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ beschrieben, wobei $A \in \mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_m; F)$ genau dann beschränkt ist, wenn

$$\|A\| := \sup_{x_1 \neq 0, \ldots, x_m \neq 0} \frac{\|A(x_1, \ldots, x_m)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_m\|_{E_m}} = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_m\| \leq 1} \|A(x_1, \ldots, x_m)\|_F$$

endlich ist.

2.3. Bemerkung. Wie es das Symbol schon erahnen lässt, beschreibt $\|A\|$ tatsächlich eine Norm auf $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. Wie für lineare Abbildungen ist A genau dann stetig, wenn $\|A\|$ endlich ist.

Beweis $\|0\| = 0$ folgt unmittelbar aus der Definition. Wenn $A \neq 0$, dann folgt auch $\|A\| \neq 0$, nachdem es ein $(x_1, \ldots, x_m)$ gibt, sodass $A(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \sup_{\|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_m\| \leq 1} \|\lambda A(x_1, \ldots, x_m)\|_F \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{\|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_m\| \leq 1} \|A(x_1, \ldots, x_m)\|_F = |\lambda| \, \|A\| \end{aligned}$$

Für $A, B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ gilt wegen der Dreiecksungleichung für $\|.\|_F$

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \sup_{\|x_1\|\le 1,\dots,\|x_m\|\le 1} \|A(x_1,\dots,x_m)+B(x_1,\dots,x_m)\|_F \\
&\le \sup_{\|x_1\|\le 1,\dots,\|x_m\|\le 1} \|A(x_1,\dots,x_m)\|_F + \\
&\quad \sup_{\|x_1\|\le 1,\dots,\|x_m\|\le 1} \|B(x_1,\dots,x_m)\|_F \\
&= \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

Sei $\|A\|$ beschränkt: Für $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m E_i$ und eine Folge $(y_1^n, \dots, y_m^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_1^n, \dots, y_m^n) \in \prod_{i=1}^m E_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, die gegen $(0, \dots, 0)$ konvergiert bezüglich der Produktopologie (bzw. Maxiumumsnorm), gilt

$$\begin{aligned}
&\|A(x_1,\dots,x_m) - A(x_1+y_1^n,\dots,x_m+y_m^n)\|_F \\
&\quad = \|A(x_1,\dots,x_m) - A(x_1,\dots,x_m) - A(y_1^n, x_2+y_2^n,\dots,x_m+y_m^n) \\
&\qquad - A(x_1, y_2^n, x_3+y_3^n,\dots,x_m+y_m^n) - \dots - A(x_1,\dots,x_{m-1},y_m^n)\|_F \\
&\quad \le \|A(y_1^n, x_2+y_2^n,\dots,x_m+y_m^n)\|_F + \|A(x_1,y_2^n,x_3+y_3^n,\dots,x_m+y_m^n)\|_F \\
&\qquad + \dots + \|A(x_1,\dots,x_{m-1},y_m^n)\|_F \\
&\quad \le \|A\|\, \|y_1^n\|_E\, \|x_2+y_2^n\|_E \cdots \|x_m+y_m^n\|_E \\
&\qquad + \|A\|\, \|x_1\|_E\, \|y_2^n\|_E\, \|x_3+y_3^n\|_E \cdots \|x_m+y_m^n\|_E \\
&\qquad + \dots + \|A\|\, \|x_1\|_E \cdots \|x_{m-1}\|_E\, \|y_m^n\|_E
\end{aligned}$$

Für ein geeignet großes $C > 0$ erhält man

$$\le C\,\|A\| \sum_{i=1}^m \|y_i^n\|_E \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} 0.$$

Also ist A stetig bei $(x_1, \dots, x_m)$

Ist umgekehrt A stetig, dann existiert zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$, sodass $\|A(x_1, \dots, x_m)\| \le 1$ für alle $(x_1, \dots, x_m)$ mit $\max_{i=1\dots m} \|x_i\|_{E_i} \le \delta$. Diese Bedingung ist sicherlich für $(\delta\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \delta\frac{x_m}{\|x_m\|})$ erfüllt. Also gilt

$$\begin{aligned}
&\left\|A\Big(\delta\frac{x_1}{\|x_1\|_{E_1}},\dots,\delta\frac{x_m}{\|x_m\|_{E_m}}\Big)\right\|_F \le 1 \\
\text{bzw.}\quad &\left\|A\Big(\frac{x_1}{\|x_1\|_{E_1}},\dots,\frac{x_m}{\|x_m\|_{E_m}}\Big)\right\|_F \le \frac{1}{\delta^m},
\end{aligned}$$

womit $\|A\|$ beschränkt ist.

❑

2.4. Definition. Für $E_1 = E_2 = \dots = E_m$ wird der Raum der m-linearen Abbildungen von E^m nach F als $\mathcal{L}_a(^mE; F)$ geschrieben.

Weiters bezeichen wir den Unterraum, der symmetrischen m-linearen Abbildungen als $\mathcal{L}_{as}(^mE; F)$, d.h.

$$\mathcal{L}_{as}(^mE;F) = \left\{A \in \mathcal{L}_a(^mE;F) : A(x_1,\dots,x_m) = A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)})\,\forall\sigma\in S_m\right\},$$

wobei S_m für die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, m\}$ steht.

2.5. Bemerkung. Jedes $A \in \mathcal{L}_a(^mE;F)$ steht in Beziehung zu einem $A_s \in \mathcal{L}_{as}(^mE;F)$. Die symmetrische Abbildung A_s wird Symmetrisierung von A genannt und hat folgende Gestalt

$$A_s(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}).$$

Mit A ist klarerweise auch A_s beschränkt. Falls A bereits symmetrisch war, stimmt A mit A_s überein.

2.2 m-homogene Polynome

2.6. Definition. Für $m \in \mathbb{N}$ wird eine Abbildung $P : E \to F$ m-homogenes Polynom von E nach F genannt, wenn es ein $A \in \mathcal{L}_a(^mE;F)$ gibt, sodass $P(x) = Ax^m$ $(= A(x,\dots,x))$ für alle $x \in E$. Für diese Beziehung schreibt man $P = \hat{A}$.

2.7. Bemerkung. Als $\mathcal{P}_a(^mE;F)$ bezeichnen wir die Menge aller m-homogenen Polynome. Diese Menge bildet mit punktweiser Addition und punktweiser Skalarmultiplikation einen Vektorraum.

2.8. Bemerkung. Wenn $A \in \mathcal{L}_a(^mE;F)$ und A_s ist die Symmetriesierung von A, dann gilt $\hat{A} = \hat{A}_s$

Beweis

$$\hat{A}_s(x) = A_s(x,\dots,x) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x,\dots,x) = \frac{1}{m!}m!A(x,\dots,x) = \hat{A}(x)$$

❑

2.9. Proposition. *Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $A \in \mathcal{L}_{as}(^mE;F)$ und $P = \hat{A}$ gilt die Polarformel*

$$A(x_1,\dots,x_m) := \frac{1}{2^m m!}\sum_{\substack{\epsilon_i=\pm1\\ 1\leq i\leq m}} \epsilon_1\cdot\epsilon_2\cdots\epsilon_m P(\epsilon_1x_1+\cdots+\epsilon_mx_m).$$

Den Beweis findet man in [5, Theorem 1.10]

2.10. Bemerkung. Insbesondere stellt $A \mapsto \hat{A}$ eine lineare Bijektion zwischen $\mathcal{L}_{as}(^mE;F)$ und $\mathcal{P}_a(^mE;F)$ her.

2.11. Definition. Für $m \in \mathbb{N}$ wird eine Abbildung $P : E \to F$ stetiges m-homogenes Polynom von E nach F genannt, wenn es ein $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$ gibt, sodass $P = \hat{A}$.

Zusätzlich lässt sich eine Norm auf $\mathcal{P}(^mE;F)$ definieren durch

$$\|P\| := \sup_{x\in E, x\neq 0}\frac{\|P(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E,\|x\|\leq 1}\|P(x)\|$$

2.12. Proposition.

(i) Die Abbildung

$$\hat{}: \mathcal{L}(^mE;F) \to \mathcal{P}(^mE;F)$$
$$A \mapsto \hat{A}$$

ist linear, surjektiv und stetig

(ii) Die Abbildung

$$\hat{}: \mathcal{L}_s(^mE;F) \to \mathcal{P}(^mE;F)$$
$$A \mapsto \hat{A}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus und ein Homöomorphismus, wobei

$$\|\hat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{m^m}{m!}\|\hat{A}\|$$

Den Beweis findet man in [1, Proposition 1.3]

3 Holomorphe Abbildungen

3.1 Potenzreihen

3.1. Definition. Eine Potenzreihe von E nach F (beides normierte Vektorräume) um einen Punkt ξ ist eine Reihe in $x \in E$ der Gestalt

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x-\xi)^m,$$

wobei $A_m \in \mathcal{L}_s(^mE;F)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Äquivalent lässt sich das auch durch Polynome formulieren. Für $P_m = \hat{A}_m \in \mathcal{P}(^mE;F)$ erhalten wir die selbe Potenzreihe in der Form

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi).$$

Die A_m bzw. P_m werden in Bezug auf die Potenzreihe als Koeffizienten bezeichnet.

3.2. Definition. Als Konvergenzradius einer Potenzreihe um ξ bezeichnet man die größte reelle Zahl r, sodass die Reihe in $B_\rho(\xi)$ gleichmäßig konvergiert für alle ρ, $0 \leq \rho < r$.

Ist der Konvergenzradius größer als 0, dann sagt man, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert.

3.3. Satz. *Seien $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Koeffizienten von Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien R_1 und R_2 – also $A_m, B_m \in \mathcal{L}_s(^mE;F)$ – und gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x-\xi)^m = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x-\xi)^m$$

für jedes $x \in B_\rho(\xi)$ für ein $\rho > 0$, dann folgt $A_m = B_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis Angenommen es wäre nicht so, dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ und ein $(z_1, \dots, z_{m_0}) \in E^{m_0}$, sodass $A_{m_0}(z_1, \dots, z_{m_0}) \neq B_{m_0}(z_1, \dots, z_{m_0})$. Wegen der Symmetrie und der Polarformel folgt, dass es auch ein $x_0 \in E$ gibt, sodass $A_{m_0}(x_0)^{m_0} \neq B_{m_0}(x_0)^{m_0}$. Dieses x_0 kann wegen der m_0-Linearität normiert gewählt werden. Nun betrachten wir die Gleichheit

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m(\lambda x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(\lambda x_0)^m,$$

welche für alle $\lambda \in B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$, mit $r = \min\{\rho, R_1, R_2\}$ gilt. Aus der m-Linearität erhalten wir

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m A_m(x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m B_m(x_0)^m.$$

Aus $A_{m_0}(x_0)^{m_0} \neq B_{m_0}(x_0)^{m_0}$ erhalten wir einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Potenzreihen mit komplexen Variablen (siehe [3, Korollar 6.7.9]).

❑

3.4. Proposition. *Sei E ein normierter Vektorraum und F ein Banachraum, dann lässt sich der Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ durch*

$$r = \frac{1}{\limsup_{m\to\infty} \|P_m\|^{\frac{1}{m}}}$$

bestimmen.

Den Beweis findet man in [1, Proposition 2.1]

3.5. Korollar. *Für die Potenzreihe $\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x-\xi)^m = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ um ξ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Reihe konvergiert gleichmäßig.

(ii) Die Folge $(\|P_m\|^{\frac{1}{m}})_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(iii) Die Folge $(\|A_m\|^{\frac{1}{m}})_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

3.2 Holomorphie

3.6. Definition. Seien E, F normierte Vektorräume und $U \subseteq E$ offen. Eine Funktion $f : U \to F$ wird holomorph genannt, wenn es für jedes $\xi \in U$ eine Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $A_m \in \mathcal{L}_s(^mE; F), m \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl $\rho > 0$ gibt, sodass $B_\rho(\xi) \subseteq U$ und die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x-\xi)^m$ gleichmäßig für $x \in B_\rho(\xi)$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Der Raum aller holomorphen Funktionen von U nach F wird als $\mathcal{H}(U, F)$ geschrieben.

3.7. Bemerkung. Äquivalent kann man auch eine Folge $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $P_m \in \mathcal{P}(^mE; F)$ wählen, sodass $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ gleichmäßig auf einer kleinen

Kugel um ξ. Die Reihe wird auch Taylorreihe von f um den Punkt ξ genannt. Klarerweise erhält man P_m durch $\hat{A}_m$ und umgekehrt A_m durch die Polarformel angewandt auf P_m.

3.8. Definition. Für $f \in \mathcal{H}(U, F), \xi \in U$ sei $\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x-\xi)^m = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ die Taylorreihe von f um ξ. Dann definieren wir

$$d^m f(\xi) = m! \cdot A_m \in \mathcal{L}_s(^m E; F)$$
$$\hat{d}^m f(\xi) = m! \cdot \hat{A}_m = m! \cdot P_m \in \mathcal{P}(^m E; F)$$

als Differential der Ordnung m von f bei ξ. Diese Zuordnung ist wegen Satz 3.3 eindeutig. Die Taylorreihe kann jetzt geschrieben werden als

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} d^m f(\xi)(x-\xi)^m,$$
$$\text{bzw.} \quad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\xi)(x-\xi).$$

3.9. Proposition. *Seien E, F normierte Vektorräume und $U \subseteq E$ offen. $\mathcal{H}(U, F)$ ist ein Unterraum von den stetigen Funktionen von U nach F, also von $C(U; F)$.*

Beweis Für $f \in \mathcal{H}(U, F)$ wähle $\xi \in U$ beliebig und $\rho > 0$, sodass die Taylorreihe von f bei ξ gleichmäßig auf $B_\rho(\xi)$ konvergiert. Weil die Taylorreihe gleichmäßig konvergiert, folgt $\left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\xi) \right\|^{1/m} \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. Für $m = 0$ gilt $\frac{1}{0!} \hat{d}^0 f(\xi) = f(\xi)$ Also erhalten wir

$$\| f(x) - f(\xi) \| \leq \sum_{m=1}^{\infty} C^m \| x - \xi \|^m = \frac{C \| x - \xi \|}{1 - C \| x - \xi \|}$$

für $\| x - \xi \| < \rho$ und $\rho C < 1$. Wähle man ρ nötigenfalls noch kleiner, so erhält man die Stetigkeit von f bei ξ.

❑

3.10. Proposition. *Seien E, F and G normierte Vektorräume, $U \subseteq F$ offen, $f \in \mathcal{H}(U, G)$, $\mu \in \mathcal{L}(E; F)$ und $a \in F$. Dann schreiben wir μ_a für die stetige affine Abbildung von E nach F mit $\mu_a(x) = \mu(x) + a$. Falls $V = \mu_a^{-1}(U)$ nicht leer ist, so gilt $f \circ \mu_a \in \mathcal{H}(V, G)$ und für jedes $\zeta \in V$*

$$d^m(f \circ \mu_a)(\eta) = d^m f[\mu_a(\eta)] \circ \mu^m,$$
$$\hat{d}^m(f \circ \mu_a)(\eta) = \hat{d}^m f[\mu_a(\eta)] \circ \mu,$$

wobei $\mu^m : E^m \to F^m$ folgendermaßen definiert ist

$$\mu^m(x_1, \ldots, x_m) = (\mu(x_1), \ldots, \mu(x_m)), \quad (x_1, \ldots, x_m) \in E^m.$$

Beweis Man sieht einfach ein, dass für $A \in \mathcal{L}_s({}^mF;G)$ die Komposition $A \circ \mu^m$ in $\mathcal{L}_s({}^mE;G)$ liegt und $\widehat{A \circ \mu^m} = \hat{A} \circ \mu \in \mathcal{P}({}^mE;G)$ gilt. Daher folgt die zweite Gleichung aus der ersten.

Für $\xi = \mu_a(\zeta)$, $\zeta \in V$ wissen wir, dass $\sum_{m=1}^{\infty} A_m(t-\xi)^m$ gleichmäßig gegen $f(t)$ konvergiert und zwar in einer Umgebungen von $\xi = \mu_a(\zeta)$, wobei $A_m = \frac{1}{m!}d^m f(\xi)$.

$$\begin{aligned} f[\mu_a(z)] &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m[\mu_a(z) - \mu_a(\zeta)]^m = \sum_{m=1}^{\infty} A_m[\mu(z) - \mu(\zeta)]^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m[\mu(z-\zeta)]^m = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \circ \mu^m(z-\zeta)^m \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig in einer Umgebung $U_\zeta \subseteq V$. Daher folgt $f \circ \mu_a \in \mathcal{H}(V,G)$ und

$$\frac{1}{m!}d^m(f \circ \mu_a)(\eta) = \frac{1}{m!}d^m f[\mu_a(\eta)] \circ \mu^m.$$

❑

4 Cauchysche Integralformeln

4.1. Satz. *Seien E, F normierte Vektorräume, $U \subseteq E$ offen, $f \in \mathcal{H}(U,F)$, $x, \xi \in U$ und $\rho > 1$, sodass $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$. Dann gilt*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda - 1}\, d\lambda.$$

Beweis Aus [4, Satz 11.5.13] wissen wir:

Für ein nicht leeres offenes $V \subseteq \mathbb{C}$, ein $z \in V$ und ein $\delta > 0$, sodass $\bar{B}_\delta(z) \subseteq V$, gilt für jedes $g \in \mathcal{H}(V,F)$ und $\tau \in B_\delta(z)$

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - z|=\delta} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \tau}\, d\lambda.$$

Erfüllen nun ξ, x, ρ die Vorraussetzungen, so ist $V := \{\lambda \in \mathbb{C} : (1-\lambda)\xi + \lambda x \in U\} \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\bar{B}_\rho(0) \subseteq V$ und $1 \in B_\rho(0)$. Weiters setzen wir $g : V \to F$, $g(\lambda) = f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]$. Laut 3.10 (mit $\mu_\xi(\lambda) = \xi + \mu(\lambda)$ und $\mu(\lambda) = \lambda \cdot (x - \xi)$) gilt $g = f \circ \mu_\xi \in \mathcal{H}(V,F)$. Für g an der Stelle 1 erhalten wir

$$f(x) = g(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{g(\lambda)}{\lambda - 1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda - 1}\, d\lambda.$$

❑

4.2. Bemerkung. Zu jedem ξ findet man ein x bzw. zu jedem x ein ξ, sodass die Voraussetzungen aus dem Satz erfüllt sind, indem man diese in einer ausreichend kleinen Kugel um ξ bzw. x wählt.

4.3. Satz. *Seien E, F normierte Vektorräume, $U \subseteq E$ offen, $f \in \mathcal{H}(U, F)$, $\xi \in U$, $x \in E$ und $\rho > 0$, sodass $\xi + \lambda x \in U$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < \rho$. Dann gilt*

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(\xi)(x) = \frac{1}{m!} d^m f(\xi) x^m = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda.$$

Beweis Für ein nicht leeres offenes $V \subseteq \mathbb{C}$, ein $g \in \mathcal{H}(V, F)$, $0 < r_1 < r_2$, $a \in V$, sodass $\{\lambda \in \mathbb{C} : r_1 \leq |\lambda - a| \leq r_2|\} \subseteq V$, gilt bekanntlich immer

$$\int_{|\lambda-a|=r_1} g(\lambda)\, d\lambda = \int_{|\lambda-a|=r_2} g(\lambda)\, d\lambda\,.$$

Nun ist $V := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, \xi + \lambda x \in U\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $\bar{B}_\rho(0)\backslash\{0\} \subseteq V$. Die Funktion $g : V \to F$ definieren wir als $g(\lambda) = \frac{f(\xi+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}$. Wegen Proposition 3.10 gilt $g \in \mathcal{H}(V, F)$. Für $0 < \epsilon < \rho$ folgt $\{\lambda \in \mathbb{C} : \epsilon \leq |\lambda| \leq \rho\} \subseteq V$, womit für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{|\lambda|=\epsilon} \frac{f(\xi+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda = \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda\,.$$

Die Taylorreihe von f bei ξ, $\sum_{l=0}^{\infty} P_l(z-\xi)$, konvergiert gleichmäßig gegen $f(z)$ in $B_\sigma(\xi)$, für ein $\sigma > 0$. Für $x \neq 0$, wähle ϵ, $0 < \epsilon < \rho$, so klein, dass die Taylorreihe $\sum_{l=0}^{\infty} P_l(z-\xi)$ in der abgeschlossenen Kugel $\bar{B}_{\epsilon\|x\|}$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Wenn wir $z = \xi + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \epsilon$ setzen, so folgt $\|z-\xi\| = |\lambda|\,\|x\| \leq \epsilon\,\|x\|$ und weiters

$$\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda = \int_{|\lambda|=\epsilon} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(z-\xi)\frac{1}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda = \int_{|\lambda|=\epsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l P_l(x)\frac{1}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda$$

Nachdem die Reihe für $|\lambda| = \epsilon$ gleichmäßig konvergiert und wegen der Eindeutigkeit der Reihendarstellung $P_m = \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(\xi)(x)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\int_{|\lambda|=\epsilon} \frac{1}{\lambda^{m+1-l}}\, d\lambda = 2\pi i P_m(x)\\ &= 2\pi i\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(\xi)(x).\end{aligned}$$

Für $x = 0$ steht auf beiden Seiten 0.

❑

4.4. Proposition. *Sei $f \in \mathcal{H}(U, F)$, $\xi \in U$, $\rho > 1$ und $x \in U$, sodass $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$, dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(\xi)(x-\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi+\lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)}\, d\lambda.$$

Beweis Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \neq \lambda \neq 1$ gilt

$$\frac{1}{\lambda-1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\lambda^{k+1}} + \frac{1}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\frac{1}{2\pi i} f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]$ und integriert über die Kreislinie $|\lambda| = \rho$, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda - 1}\, d\lambda =$$
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{k+1}}\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)}\, d\lambda.$$

Aus Satz 4.1 wissen wir bereits, dass die linke Seite gleich $f(x)$ ist. Wenn wir die Integrale in der Summe schreiben als

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(\xi + \lambda(x-\xi)]}{\lambda^{k+1}}\, d\lambda = \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(\xi)(x-\xi),$$

erhalten wir die Aussage, wobei die letzte Gleichheit aus Satz 4.3 folgt.

❑

4.5. Korollar. *Für $f \in \mathcal{H}(U,F)$, $m \in \mathbb{N}$, $\xi \in U$ und $r > 0$, sodass $\bar{B}_r(\xi) \subseteq U$, dann gilt für $x \in B_r(\xi)$*

$$\left\| f(x) - \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \hat{d}^l f(\xi)(x-\xi)^l \right\| \leq \frac{\|x-\xi\|^{m+1}}{r^m(r - \|x-\xi\|)} \sup_{\|t-\xi\|=r} \|f(t)\|.$$

Beweis Für $x = \xi$ steht auf beiden Seiten 0. Also sei im Folgendem $x \neq \xi$ und $\rho = \frac{r}{\|x-\xi\|} > 1$. Außerdem ist $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ für $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \rho$. Daher lässt sich Proposition 4.4 anwenden:

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(\xi)(x-\xi) \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{\rho^m(\rho-1)} \sup_{|\lambda|=\rho} \|f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]\|. \end{aligned}$$

Aus $\|(1-\lambda)\xi + \lambda x - \xi\| = |\lambda|\, \|x-\xi\| = \rho\, \|x-\xi\| = r$ für $|\lambda| = \rho$ folgt

$$\sup_{|\lambda|=\rho} \|f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]\| \leq \sup_{\|t-\xi\|=r} \|f(t)\|,$$

wodurch wir insgesamt

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(\xi)(x-\xi) \right\| \leq \frac{1}{\rho^m(\rho-1)} \sup_{\|t-\xi\|=r} \|f(t)\|$$

erhalten. Wegen $\rho = \frac{r}{\|x-\xi\|}$ folgt die Aussage.

❑

5 Schwache Holomorphie

Mit dem Satz, der hier vorgestellt wird, lässt sich die Holomorphie einer Funktion immer auf die Holomorphie von Funktionen mit Zielbereich $\mathbb{C}$ zurückführen.

5.1. Definition. Eine Funktion $f : U \to F$ wird lokal beschränkt bei $x \in U$ genannt, wenn es eine Umgebung V von x gibt, sodass $f(V)$ beschränkt in F ist, also wenn $f(V) \subseteq B_r(0)$ für ein $r > 0$.

f wird lokal beschränkt in U genannt, falls f in jedem Punkt von U lokal beschränkt ist.

5.2. Lemma. Sei M ein metrischer Raum, F ein normierter Vektorraum und $f : M \to F$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist lokal beschränkt (in M)

(ii) f ist beschränkt in jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq M$

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$:

Laut (i) gibt es für jedes $x \in M$ eine offene Menge $V_x \subseteq M$ mit $f(V_x)$ ist beschränkt. Sei $K \subseteq M$ kompakt Dann ist $\{V_x : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Daher findet man aufgrund der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Wegen

$$f(K) \subseteq f(\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} f(V_{x_i})$$

und weil die endliche Vereinigung beschränkter Mengen wieder beschränkt ist, ist auch $f(K)$ beschränkt.

$(i) \Leftarrow (ii)$:

Wäre f bei ξ nicht lokal beschränkt, so gäbe es für jede Kugel $B_{\frac{1}{m}}(\xi)$ ein x_m aus dieser Kugel, sodass $\|f(x_m)\| > m$. Die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Konstruktion gegen ξ. Daher ist die Menge

$$K := \{x_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\xi\}$$

kompakt, aber $f(K)$ nicht beschränkt. Denn für jedes $r > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\|f(x_m)\| > m > r$. Das widerspricht der Vorraussetzung (ii).

❑

5.3. Satz. *Sei F ein Banachraum, E ein normierter Raum, $U \subseteq E$ offen und $\Psi \subseteq F'$ mit der Eigenschaft*

$$Y \subseteq F \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \psi(Y) \subseteq \mathbb{C} \text{ beschränkt } \forall \psi \in \Psi. \tag{1}$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) $f \in \mathcal{H}(U, F)$

(ii) $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ *für alle* $\psi \in \Psi$

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$ Nachdem f holomorph ist, lässt es sich um ξ in eine Taylorreihe entwickeln, die auf $B_\rho(\xi)$ gleichmäßig konvergiert.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} d^m f(\xi)(x - \xi)$$

Da ψ linear und stetig ist, gilt

$$\psi[f(x)] = \psi\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} d^m f(\xi)(x-\xi)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\psi \circ d^m f(\xi)\right](x-\xi),$$

wobei wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von ψ die Reihe auch gleichmäßig auf $B_\rho(\xi)$ konvergiert.

$(i) \Leftarrow (ii)$ wird in mehreren Schritten gezeigt:

a) Als erstes zeigen wir, dass Ψ punktetrennend ist:

   Angenommen nicht, dann gäbe zwei es verschiedene Punkte $x, y \in F, x \neq y$, sodass $\psi(x) = \psi(y)$ für alle $\psi \in \Psi$. Daraus folgt $\psi(x-y) = 0$ für alle $\psi \in \Psi$. Die Menge $\mathbb{C} \cdot (x-y) \subseteq F$ ist sicher unbeschränkt, wird jedoch von allen ψ auf 0 abgebildet. Das widerspricht (1).

b) Für jedes $d \geq 0$ gibt es ein $c \geq 0$, sodass für alle $y \in Y$ gilt $\|y\| \leq cd$, wobei $Y := \{y \in F : \|\psi(y)\| \leq d \|\psi\| \, \forall \psi \in \Psi\}$.

   Y ist nicht leer, da $0 \in Y$. Für jedes $\psi \in \Psi$ gilt sicher $\sup_{y \in Y} \|\psi(y)\| \leq d \|\psi\|$. Somit ist $Y \subseteq F$ laut (1) beschränkt. Daher kann $c := d^{-1} \sup_{y \in Y} \|y\| < \infty$ gewählt werden, wenn $d > 0$. Für $d = 0$ kann c beliebig gewählt werden.

c) f ist beschränkt auf jedem kompakten $K \subseteq U$:

   Nachdem $\psi \circ f$ holomorph und daher stetig ist, folgt dass $(\psi \circ f)(K) = \psi(f(K))$ beschränkt ist für alle $\psi \in \Psi$. Das ist laut (1) äquivalent zur Beschränktheit von $f(K) \subseteq F$. Wegen Lemma 5.2 ist f lokal beschränkt.

d) f ist stetig in U:

   Wähle $\xi \in U$ beliebig. Dazu gibt es ein $r > 0$, sodass $B_r(\xi) \subseteq U$. Nun folgt aus Korollar 4.5 mit $m = 0$ für $x \in B_r(\xi)$

$$\begin{aligned} |\psi \circ f(x) - \psi \circ f(\xi)| &\leq \frac{\|x-\xi\|}{r - \|x-\xi\|} \sup_{\|t-\xi\|=r} \|\psi \circ f(t)\| \\ &\leq \frac{\|x-\xi\|}{r - \|x-\xi\|} \|\psi\| \sup_{\|t-\xi\|=r} \|f(t)\| \end{aligned}$$

   Da f laut c) lokal beschränkt ist, kann man $r > 0$ gegebenfalls kleiner machen, sodass $\sup_{\|t-\xi\|=r} \|f(t)\| = d < \infty$. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} |\psi(f(x) - f(\xi))| &\leq \frac{\|x-\xi\|}{r - \|x-\xi\|} d \|\psi\| \\ \text{bzw.} \quad \left|\psi\left(\frac{r - \|x-\xi\|}{\|x-\xi\|}\left[f(x) - f(\xi)\right]\right)\right| &\leq d \|\psi\| \end{aligned}$$

   Aus b) folgt, dass es ein $c \geq 0$ gibt mit $\left\|\frac{r-\|x-\xi\|}{\|x-\xi\|}\left[f(x) - f(\xi)\right]\right\| \leq cd$. Daher:

$$\|f(x) - f(\xi)\| \leq \frac{\|x-\xi\|}{r - \|x-\xi\|} cd$$

   Also ist f bei ξ stetig.

e) f ist holomorph in U:

Wähle $\xi \in U$ wieder beliebig. Wir definieren für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $P_m : E \to F$ folgendermaßen: Für $x \in E$ wählen wir ein $\rho > 0$, sodass $\xi + \lambda x \in U$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \rho$ und setzen

$$P_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} \, d\lambda.$$

Das Integral existiert und ist unabhängig vom gewählten ρ. Sind nämlich ρ_1 und ρ_2 zwei positive reelle Zahlen, sodass $\xi + \lambda x \in U$ für $|\lambda| \leq \max\{\rho_1, \rho_2\}$ und setzt man

$$P_{m,1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho_1} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} \, d\lambda, \quad P_{m,2} := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho_2} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} \, d\lambda,$$

dann gilt wegen der Cauchyschen Integralformel (Satz 4.3) für alle $\psi \in \Psi$ $\frac{1}{m!}\hat{d}^m(\psi \circ f)(\xi)(x) = \psi(P_{m,1}(x)) = \psi(P_{m,2}(x))$. Wegen der punktetrennenden Eigenschaft von Ψ folgt die Gleichheit der Integrale.

Als nächstes zeigen wir, dass P_m stetig ist. Dazu wähle $x_0 \in E$ beliebig. Nachdem die Abbildung $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E \mapsto \xi + \lambda x \in E$ stetig bei $(0, x_0)$ ist, gibt es ein $\rho > 0$ sodass $\xi + \lambda x \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und für alle $x \in E$ mit $|\lambda| \leq \rho$ und $\|x - x_0\| \leq \rho$. Daher kann für $P_m(x)$ und $P_m(x_0)$ dasselbe ρ verwendet werden. Aus

$$\begin{aligned} \|P_m(x) - P_m(x_0)\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x) - f(\xi + \lambda x_0)}{\lambda^{m+1}} \, d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{\rho^m} \sup_{|\lambda|=\rho} \|f(\xi + \lambda x) - f(\xi + \lambda x_0)\| \end{aligned}$$

folgt wegen der Stetigkeit von f die von P_m bei x_0.

Jetzt brauchen wir noch für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $A_m \in \mathcal{L}_{as}({}^m E; F)$ mit $\hat{A}_m = P_m$. Für $m = 0$ folgt mit Satz 4.3, $\psi(P_0(x)) = \psi(f(\xi))$. Also ist $P_0 = f(\xi) \in \mathcal{P}({}^0 E; F)$. Für $m \geq 1$ definieren wir A_m mit Hilfe der Polarformel

$$A_m(x_1, \ldots, x_m) := \frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdots \epsilon_m P_m(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_m x_m)$$

Dieser Abbildung ist einfach anzusehen, dass sie symmetrisch ist. Um die m-Linearität zu zeigen, reicht es daher die Linearität in der ersten Komponente zeigen. Für jedes $\psi \in \Psi$ gilt

$$\psi[A_m(x_1 + x_1', x_2, \dots, x_m)] =$$
$$\frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le m}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdots \epsilon_m (\psi \circ P_m)(\epsilon_1 (x_1 + x_1') + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_m x_m) =$$
$$\frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le m}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdots \epsilon_m \frac{1}{m!} \hat{d}^m (\psi \circ f)(\xi)(\epsilon_1 (x_1 + x_1') + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_m x_m) =$$
$$\frac{1}{m!} d^m (\psi \circ f)(\xi)((x_1 + x_1'), x_2, \dots, x_m) =$$
$$\frac{1}{m!} d^m (\psi \circ f)(\xi)(x_1, x_2, \dots, x_m) + \frac{1}{m!} d^m (\psi \circ f)(\xi)(x_1', x_2, \dots, x_m) =$$
$$\frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le m}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdots \epsilon_m \frac{1}{m!} \hat{d}^m (\psi \circ f)(\xi)(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_m x_m) +$$
$$\frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le m}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdots \epsilon_m \frac{1}{m!} \hat{d}^m (\psi \circ f)(\xi)(\epsilon_1 x_1' + \cdots + \epsilon_m x_m) =$$
$$\psi[A_m(x_1, x_2, \dots, x_m)] + \psi[A_m(x_1', x_2, \dots, x_m)] =$$
$$\psi[A_m(x_1, x_2, \dots, x_m) + A_m(x_1', x_2, \dots, x_m)]$$

Jetzt folgt aus der punktetrennenden Eigenschaft von Ψ die Linearität von A_m. Als nächstes zeigen wir, dass $\hat{A}_m = P_m$, womit $P_m \in \mathcal{P}(^m E; F)$:

$$\begin{aligned}
\psi(\hat{A}_m(x)) &= \psi(A_m(x, \dots, x)) \\
&= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le m}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdots \epsilon_m (\psi \circ P_m)((\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_m) x) \\
&= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le m}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdots \epsilon_m \frac{1}{m!} \hat{d}^m (\psi \circ f)(\xi)((\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_m) x) \\
&= \frac{1}{m!} d^m (\psi \circ f)(\xi)(x, \dots, x) = \frac{1}{m!} \hat{d}^m (\psi \circ f)(\xi)(x) = \psi(P_m(x))
\end{aligned}$$

Aus der punktetrennenden Eigenschaft von Ψ folgt wieder, dass $\hat{A}_m = P_m$.

Als letzter Schritt bleibt noch zu zeigen, dass $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - \xi)$ in einer Umgebung von ξ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

Nachdem laut c) f lokal beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$ und ein $\sigma > 0$, sodass $\bar{B}_\sigma(\xi) \subseteq U$ und $\sup_{\|t - \xi\| \le \sigma} \|f(t)\| \le M$. Dazu wählen wir noch zwei reelle Zahlen $\rho > 1$ und $r > 0$, sodass $r\rho < \sigma$, wodurch $B_r(\xi)$ eine Teilmenge von $\bar{B}_\sigma(\xi)$ ist. Für jedes $x \in B_r(\xi)$ gilt $(1 - \lambda)\xi + \lambda x \in \bar{B}_\sigma(\xi)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \le \rho$. Daher lässt sich Proposition 4.4 auf $\psi \circ f$ anwenden:

$$(\psi \circ f)(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(\xi)(x - \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \rho} \frac{(\psi \circ f)[(1 - \lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}} \, d\lambda.$$

Aus $\frac{1}{m!}\hat{d}^m(\psi \circ f)(\xi)(x) = \psi(P_m(x)$ erhalten wir

$$\psi\left[f(x) - \sum_{k=0}^{m} P_m(x-\xi)\right] = \psi\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda\right]$$

Wegen der punktetrennenden Eigenschaft von Ψ bekommen wir

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{m} P_m(x-\xi)\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda\right\| \leq \frac{M}{\rho^m(\rho-1)}$$

für jedes $x \in B_r(\xi)$. Daher konvergiert die Reihe auf $B_r(\xi)$ gleichmäßig gegen f.

❑

5.4. Bemerkung. Wenn F ein Banachraum ist, so erfüllt $\Psi := F'$ die Vorraussetzung in Satz 5.3, d.h.

$$Y \subseteq F \,\text{beschränkt} \;\Leftrightarrow\; \psi(Y) \subseteq \mathbb{C}\,\text{beschränkt} \;\; \forall \psi \in \Psi$$

$\Rightarrow$ folgt aus der Stetigkeit der ψ.

In der Tat ist die rechte Seite ist äquivalent zu: Für alle $\psi \in \Psi$ existiert ein $r_\psi \geq 0$, sodass $|\psi(Y)| \leq r_\psi$. Wenn man $y \in Y$ als Element des Bidualraum auffasst, so erhält man

$$\sup_{y\in Y} |y(\psi)| = \sup_{y \in Y} |\psi(y)| \leq r_\psi$$

Nun folgt aus dem Satz von Banach-Steinhaus, dass $\sup_{y\in Y} \|y\| \leq C < \infty$. Also ist Y beschränkt.

6 Endliche Holomorphie

6.1. Definition. Eine Abbildung $f : U \to F$ wird endlich holomorph genannt, wenn für jeden endlichdimensionalen Unterraum S von E der nicht leeren Schnitt mit U hat, $f\big|_{S\cap U} \in \mathcal{H}(S \cap U, F)$ gilt.

Die Menge aller endlich holomorpher Abbildungen von U nach F wird mit $\mathcal{H}_f(U,F)$ bezeichnet. Für $f\big|_{S\cap U}$ wollen wir f_S schreiben.

6.2. Bemerkung. Zu jedem endlichdimensionalen Unterraum X eines topologischen Vektorraums exisitiert eine isomorphe und gleichzeitig homöomorphe Abbildung $\iota : \mathbb{C}^n \to X$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daher könnte man für endliche Holomorphie auch fordern, dass für jedes solche ι mit $\iota^{-1}(U) \neq \emptyset$ die Komposition $f \circ \iota|_{\iota^{-1}(U)}$ holomorph ist.

6.3. Bemerkung. Die Menge $\mathcal{H}_f(U,F)$ ist mit der punktweisen Addition und der punktweisen skalar Multiplikation ein komplexer Vektorraum. Außerdem folgt aus Proposition 3.10, dass $\mathcal{H}(U,F) \subseteq \mathcal{H}_f(U,F)$.

Für $f \in \mathcal{H}_f(U,F)$, S ein endlichdimensionaler Unterraum von E mit $S\cap U \neq \emptyset$ und $\xi \in S \cap U$ gilt $d^m f_S(\xi) \in \mathcal{L}_s(^m S; F)$ und $\hat{d}^m f_S(\xi) \in \mathcal{P}(S; F)$ für $m \in \mathbb{N}$.

Seien nun $S_1 \subseteq S_2$ zwei endlichdimensionale Unterräume von E mit $S_1 \cap U \neq \emptyset$ und $\xi \in S_1 \cap U$ dann gilt (siehe Proposition 3.10)

$$d^0 f_{S_2}(\xi) = d^0 f_{S_1}(\xi) = f(\xi), \quad d^m f_{S_2}(\xi)\big|_{S_1} = d^m f_{S_1}(\xi),$$
$$\hat{d}^m f_{S_2}(\xi)\big|_{S_1} = \hat{d}^m f_{S_1}(\xi) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Daher existiert eine Abbildung $\delta^m f(\xi) \in \mathcal{L}_{as}({}^m E; F)$, (bzw. ein $\hat{\delta}^m f(\xi) \in \mathcal{P}_a({}^m E; F)$), sodass $\delta^m f(\xi)\big|_S = d^m f_S(\xi)$ für alle endlichdimensionalen Unterräume S von E.

6.4. Satz. *Seien E, F normierte Vektorräume und f eine Funktion von einem offenen $U \subseteq E$ nach F. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist holomorph in U.

(ii) f ist endlich holomorph und stetig in U.

(iii) f ist endlich holomorph und lokal beschränkt in U.

Beweis Die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii)$ und $(ii) \Rightarrow (iii)$ erhält man sofort. Daher bleibt nur noch $(iii) \Rightarrow (i)$ zu beweisen.

Also sei im Folgenden $f \in \mathcal{H}_f(U, F)$ lokal beschränkt und $\xi \in U$. Für jedes $x \in E$ definieren wir eine Abbildung $t_x : \mathbb{C} \to E$ als $t_x(\lambda) = \lambda x$. Klarerweise ist $t_x \in \mathcal{L}(\mathbb{C}; E)$. Als $T_x : \mathbb{C} \to E$ definieren wir die affine Abbildung $(t_x)_\xi$ wie in Propostion 3.10, also $T_x(\lambda) = (t_x)_\xi(\lambda) = \xi + \lambda x$. Die Menge $V_x := \{\lambda \in \mathbb{C} : \xi + \lambda x \in U\}$ ist offen und enthält die 0. Wenn wir den höchstens zweidimensionalen Unterraum S_x von E der von x und ξ aufgespannt wird betrachten, dann erhalten wir $T_x(V_x) \subseteq U \cap S_x$.

$$V_x \subseteq \mathbb{C} \xrightarrow{T_x} U \cap S_x \xrightarrow{f} F$$

Nachdem S_x ein endlichdimensional ist und f in $\mathcal{H}_f(U, F)$ liegt, ist die Einschränkung von f auf S_x holomorph, also $f_{S_x} \in \mathcal{H}(U \cap S_x, F)$. Mit Proposition 3.10 erkennen wir $f_{S_x} \circ T_x \in \mathcal{H}(V_x, F)$, wobei

$$(f_{S_x} \circ T_x)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m (f_{S_x} \circ T_x)(0)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f_{S_x}[T_x(0)] \circ t_x(\lambda)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \hat{d}^m f_{S_x}(\xi)(x)$$

Für $\lambda \in \bar{B}_{r_x}(0)$ konvergiert die Reihe gleichmäßig, wenn r_x hinreichend klein gewählt wird. Wenn man die Abbildungen $\hat{\delta}^m f(\xi)$ aus Bemerkung 6.3 betrachtet, erhält man

$$f(\xi + \lambda x) = (f \circ T_x)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \hat{\delta}^m f(\xi)(x).$$

Die Reihe konvergiert wieder gleichmäßig für $\lambda \in \bar{B}_{r_x}(0)$ für ein hinreichend kleines r_x.

Nachdem f lokal beschränkt ist, gibt es ein $\rho > 0$ und ein $M > 0$, sodass $\bar{B}_\rho(\xi) \subseteq U$ und $\sup_{\|t-\xi\|\leq\rho} \|f(t)\| \leq M$. Für $x \in E$, $\|x\| \leq 1$ und $|\lambda| \leq \rho$ folgt $\xi + \lambda x \in U$. Daher ist $\bar{B}_\rho(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \rho\} \subseteq V_x$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ für jedes $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$.

Wegen $f \circ T_x \in \mathcal{H}(V_x, F)$ erhalten wir gemäß Satz 4.3

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m(f \circ T_x)(0)(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f \circ T_x(0 + \lambda \cdot 1)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda$$

für jedes $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ und $m \in \mathbb{N}$. Daher folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(\xi)(x) &= \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_{S_x}(\xi)(x) = \frac{1}{m!}\hat{d}^m(f \circ T_x)(0)(1)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda\end{aligned}$$

für jedes $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ und $m \in \mathbb{N}$, womit sich die Norm von $\hat{\delta}^m f(\xi)$ folgendermaßen abschätzen lässt:

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(\xi)\right\| \leq \frac{M}{\rho^m} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}$$

Also ist $\hat{\delta}^m f(\xi)$ stetig, d.h. $\hat{\delta}^m f(\xi) \in \mathcal{P}(^m E; F)$, für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Jetzt bleibt zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(\xi)(y - \xi)$ gleichmäßig gegen $f(y)$ konvergiert für $\|y - \xi\|$ hinreichend klein.

Also wählen wir σ und r aus $\mathbb{R}$, sodass $\sigma > 1$, $r > 0$ und $\sigma r \leq \rho$. Daraus erhalten wir $\bar{B}_r(\xi) \subseteq \bar{B}_\rho(\xi) \subseteq U$. Für ein $y \in \bar{B}_r(\xi)$ setzen wir $x = y-\xi$. Aus den vorherigen Teilen des Beweises wissen wir, dass $f \circ T_x \in \mathcal{H}(V_x, F)$. Außerdem erhält man wegen der Wahl von x, dass $\|x\| \leq r$ und daher $\xi + \lambda x \in U$, wenn $|\lambda| \leq \sigma$.

Für 0 und 1 lässt sich Proposition 4.4 auf $f \circ T_x$ mit σ anwenden, da $(1 - \zeta) \cdot 0 + \zeta \cdot 1 \in V_x$ für $|\zeta| \leq \sigma$. Wir erhalten

$$(f \circ T_{y-\xi})(1) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\hat{d}^k(f \circ T_{y-\xi})(0)(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\sigma} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda y]}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)}\, d\lambda$$

für jedes $y \in \bar{B}_r(\xi)$ und $m \in \mathbb{N}$, also

$$\left\|f(y) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(\xi)(y - \xi)\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\sigma} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda y]}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)}\, d\lambda\right\| \leq \frac{M}{\sigma^m(\sigma - 1)}$$

Nachdem $\sigma > 1$ gewählt wurde, konvergiert die Reihe gleichmäßig für jedes $y \in \bar{B}_r(\xi)$ gegen $f(y)$

❑

Literatur

[1] Jorge Alberto Barroso. *Introduction to Holomorphie*, volume 106 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science Publishers b.v., Amsterdam, 1985.

[2] Harald Woracek & Michael Kaltenbäck & Matrin Blümlinger. *Funktionalanalysis*. Wien, 2012. Vorlesungsskriptum, `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/fana.pdf`.

[3] Michael Kaltenbäck. *Analysis 1 (WS 2011/2012))*. Wien, 2011. Vorlesungsskriptum, `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_I_alt.pdf`.

[4] Michael Kaltenbäck. *Analysis 2 SS 2012*. Wien, 2012. Vorlesungsskriptum, `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_II_alt.pdf`.

[5] Jorge Mujica. *Complex analysis in Banach spaces*, volume 120 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 107.