Die Wallman-Shanin Kompaktifizierung

Benjamin Stadlbauer

6. April 2015

1 Einleitung

Es ist ein interessantes Problem, für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ einen kompakten topologischen Raum $(X^*, \mathcal{T}^*)$ zu finden, sodass $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einer dichten Teilmenge $(X', \mathcal{T}')$ von $(X^*, \mathcal{T}^*)$ ist. So ein Raum $(X^*, \mathcal{T}^*)$ wird eine *Kompaktifizierung* von $(X, \mathcal{T})$ genannt. Man stelle sich zum Beispiel die $\mathbb{R}^2$-Ebene vor. Dieser Raum, aufgefasst als topologischer Raum (bezüglich der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie), ist nicht kompakt. „Biegt“ man anschaulich jedoch diese Ebene zu einer Sphäre zusammen und fügt man an der Spitze der Sphäre einen Punkt ∞ hinzu, so erhält man einen neuen, kompakten topologischen Raum. Diese Art der Kompaktifizierung nennt man *Einpunktkompaktifizierung* oder *Alexandroff-Kompaktifizierung*.

Man kann leicht zeigen, dass es zu jedem topologischen Raum solch eine Kompaktifizierung gibt.

Definition 1.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, weiters sei ∞ ein Element das nicht in X enthalten ist und $\alpha(X) := X \cup \{\infty\}$. Für jeden Punkt $x \in \alpha(X)$ sei die Menge $\mathcal{U}(x)$ wie folgt definiert:

1. Fall, $x \in X$: sei $\mathcal{U}(x)$ die Menge der Umgebungen von x bzgl der Topologie $\mathcal{T}$.
2. Fall, $x = \infty$: sei $\mathcal{U}(\infty) := \{U \subseteq \alpha(X) \,|\, \infty \in U \wedge X \backslash U$ kompakt und abgeschlossen in $X\}$.

Lemma 1.2. *Durch die Mengen $\mathcal{U}(x)$ mit $x \in \alpha(X)$ wird eine Topologie auf $\alpha(X)$ so definiert, dass die $\mathcal{U}(x)$ die Umgebungsbasen der Punkte $x \in \alpha(X)$ bilden.*

Beweis. Nach [Wor03, Satz 1.2.3] ist es hinreichend nachzuprüfen, ob für alle $x \in \alpha(X)$ die Mengen $\mathcal{U}(x)$ folgende Eigenschaften besitzen:

(i). $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$.

(ii). Ist $V \in \mathcal{U}(x)$, so ist $x \in V$.

(iii). Sind $U, V \in \mathcal{U}(x)$, so existiert $W \in \mathcal{U}(x)$ mit $W \subseteq U \cap V$.

(iv). Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ so existiert $V \in \mathcal{P}(\alpha(X))$ mit $x \in V \subseteq U$ und sodass zu jedem Punkt $y \in V$ ein $W \in \mathcal{U}(y)$ existiert mit $W \subseteq V$.

Diese 4 Punkte sind für $\mathcal{U}(x)$ mit $x \in X$ trivialerweise erfüllt. Es bleibt also der Fall $\mathcal{U}(\infty)$ zu untersuchen.

(i) folgt aus $\alpha(X) \in \mathcal{U}(\infty)$.

(ii) gilt nach Definition 1.1 von $\mathcal{U}(\infty)$.

(iii) folgt aus der Tatsache, dass die Vereinigung zweier kompakter und abgeschlossener Mengen wieder kompakt und abgeschossen ist.

(iv) Für jedes $y \in U$ gibt es ein $W \in \mathcal{U}(y)$ mit $W \subseteq U$: Wenn $y = \infty$ so wähle $W = U$. Wenn $y \neq \infty$ so wähle ein (in $(X, \mathcal{T})$) offenes $W \subseteq U \cap X$ - so ein W existiert, da $U \cap X$ nach Definition 1.1 in $(X, \mathcal{T})$ offen ist. Also können wir $V := U$ wählen.

$\square$

Satz 1.3. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Es existiert eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$.*

Beweis. Sei der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ nicht kompakt. Weiters sei $\infty \notin X$ und $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine (bezüglich der Topologie nach Definition 1.1 und Lemma 1.2) offene Überdeckung von $X \cup \{\infty\} =: \alpha(X)$. Es gilt $\exists j \in \mathcal{I} : \infty \in U_j$ Man betrachte nun $(U_i \cap X)_{i \in \mathcal{I} \setminus \{j\}}$. Diese Familie ist eine offene Überdeckung von der nach Definition 1.1 (in $(X, \mathcal{T})$) kompakten Menge $X \setminus U_j$. Also existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \setminus \{j\}$ sodass

$$\cup_{i \in \mathcal{J}} U_i \supseteq X \cap (\cup_{i \in \mathcal{J}} U_i) \supseteq X \setminus U_j.$$

Somit gilt letztendlich

$$\cup_{i \in \mathcal{J} \cup \{j\}} U_i \supseteq \alpha(X).$$

Wir haben also, ausgehen von einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$, die endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i \in \mathcal{J} \cup \{j\}}$ von $\alpha(X)$ gefunden.
Da wir vorausgesetzt haben, dass $(X, \mathcal{T})$ nicht kompakt ist, gilt

$$\forall U \in \mathcal{U}(\infty) : U \cap X \neq \emptyset.$$

Also ist $\infty \in \overline{X}$ und damit liegt X dicht in $\alpha(X)$.

$\square$

2 Vorbereitung

Wir bereiten uns jetzt auf die eigentliche Konstruktion der Wallman-Shanin Kompaktifizierung vor. Im gesamten Artikel wird vorausgesetzt, dass Begriffe wie Filter, Häufungspunkt, Basis, Stetigkeit, etc. bekannt sind, siehe [Wor03, Kapitel 1]. Wir sagen, das Mengensystem erfüllt f.i.p., wenn es die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt. Zunächst werden wir ein paar neue Begriffe definieren.

Definition 2.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathscr{B}$ einen abgeschlossene Basis wenn gilt

$$\forall O \in \mathcal{T} \, \exists \{B_i \,|\, i \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathscr{B} : O^c = \bigcap \{B_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}\,.$$

Also analog zur klassischen Basis eines topologischen Raumes, wo sich jede offene Menge als die Vereinigung von Basiselementen einer klassischen Basis darstellen lässt, kann jede abgeschlossene Menge als der Schnitt von Basiselementen einer abgeschlossenen Basis dargestellt werden. Wir erweitern unseren neuen Begriff.

Definition 2.2. Wir nennen eine abgeschlossene Basis $\mathscr{B}$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ eine T_1-Basis, wenn gilt

(i). $\emptyset \in \mathscr{B}$

(ii). $B_1 \in \mathscr{B}, B_2 \in \mathscr{B} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathscr{B} \wedge B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$

(iii). Wenn für einen Punkt $x \in X$ gilt $x \notin B \in \mathscr{B}$ dann existiert ein $B' \in \mathscr{B}$ sodass $x \in B' \wedge B \cap B' = \emptyset$

Falls für eine T_1-Basis $\mathscr{B}$ noch zusätzlich folgende Eigenschaft erfüllt sein sollte

(iv). Für je zwei Mengen $B_1 \in \mathscr{B}$ und $B_2 \in \mathscr{B}$ mit der Eigenschaft $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ existieren $B_1' \in \mathscr{B}$ und $B_2' \in \mathscr{B}$ sodass $B_1 \cap B_1' = B_2 \cap B_2' = \emptyset \wedge B_1' \cup B_2' = X$,

so nennen wir $\mathscr{B}$ eine *normale* Basis.

Und nun verallgemeinern wir den Begriff eines Filters.

Definition 2.3. Sei X eine Menge und $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der Eigenschaft $\forall B, C \in \mathscr{B} : B \cap C \in \mathscr{B}$. Erfüllt ein Mengensystem $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$ folgende Eigenschaften

(i). $\emptyset \notin \mathscr{F}$,

(ii). $(B \in \mathscr{F} \wedge C \in \mathscr{B} \wedge C \supseteq B) \Rightarrow C \in \mathscr{F}$, (iii). $(B \in \mathscr{F} \wedge C \in \mathscr{F}) \Rightarrow B \cap C \in \mathscr{F}$,

so nennen wir $\mathscr{F}$ einen *$\mathscr{B}$-Filter*. Ein maximales Element in der Menge aller $\mathscr{B}$-Filter heißt *maximalen $\mathscr{B}$-Filter*.

Jetzt benötigen wir einige Lemmata.

Lemma 2.4. *Sei wieder X eine Menge und $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem wie in Definition 2.3. Sei $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ ein Mengensystem das f.i.p. erfüllt, so existiert ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter $\mathscr{F}$ mit der Eigenschaft $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{B}'$.*

Beweis. Hier verweise ich auf den Beweis von [Wor03, Lemma 1.4.3 (i)]. Der Beweis hier verläuft analog mit dem einzigen Unterschied, dass nicht Filter sondern $\mathscr{B}$-Filter betrachtet werden.

□

Lemma 2.5. *Es gelten wieder die selben Voraussetzungen wie in Definition 2.3. Folgende Aussagen sind für einen $\mathscr{B}$-Filter $\mathscr{F}$ äquivalent*

(i). Der $\mathscr{B}$-Filter $\mathscr{F}$ ist maximal (nach Definition 2.3 (iv)).

(ii). Für alle $B \in \mathscr{B}$ gilt: $(\forall F \in \mathscr{F} : B \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow B \in \mathscr{F}$

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\mathscr{F}$ ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter und sei $B \in \mathscr{B}$ mit $\forall F \in \mathscr{F} : B \cap F \neq \emptyset$. Das Mengensystem $\mathscr{F}' := \mathscr{F} \cup \{B\}$ erfüllt f.i.p. Nach Lemma 2.4 existiert ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter $\mathscr{G} \supseteq \mathscr{F}' \supseteq \mathscr{F}$. Nachdem $\mathscr{F}$ maximal ist folgt $\mathscr{F} = \mathscr{G}$ woraus unmittelbar $B \in \mathscr{F}$ folgt.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $\mathscr{F}$ kein maximaler $\mathscr{B}$-Filter. Wähle einen maximalen $\mathscr{B}$-Filter $\mathscr{F}_1$. Es gilt $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F} \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B} : B \notin \mathscr{F} \wedge B \in \mathscr{F}_1$. Für dieses B gilt natürlich $\forall F \in \mathscr{F} : B \cap F \neq \emptyset$ (sonst wäre B auch nicht in $\mathscr{F}_1$ enthalten).

□

Lemma 2.6. *Sei $\mathscr{B}$ eine abgeschlossene Basis eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Dann gilt*

(i). $X \in \mathscr{B}$,

(ii). Ist $B_1 \in \mathscr{B} \wedge B_2 \in \mathscr{B} \wedge p \notin B_1 \cup B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathscr{B} : p \notin B_3 \wedge B_3 \supseteq B_1 \cup B_2$,

(iii). $\bigcap \mathscr{B} = \emptyset$

Umgekehrt gilt: Falls auf einer Menge X ein Mengensystem $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gegeben ist, das die Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt, so gibt es auf X eine eindeutige Topologie sodass $\mathscr{B}$ abgeschlossene Basis bzgl. dieser Topologie ist.

Beweis. Hier verweise ich wieder auf den Beweis von [Wor03, Satz 1.2.5]. Das Lemma 2.2 ist die duale Aussage zu diesem Satz. Der Beweis für dieses Lemma ergibt sich salopp gesagt einfach durch „Komplementbildung“.

□

Lemma 2.7. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn folgendes gilt. Es existiert eine abgeschlossene Basis $\mathscr{B}$ sodass gilt:*

$$\forall \mathscr{G} \subseteq \mathscr{B} : \mathscr{G} \text{ erfüllt f.i.p.} \Rightarrow \bigcap \mathscr{G} \neq \emptyset \tag{1}$$

Beweis. Die Aussage (1) lässt sich wie folgt umformulieren:

$$\forall \mathscr{G} \subseteq \mathscr{B} : \bigcap \mathscr{G} = \emptyset \Rightarrow \left(\exists \mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G} : |\mathscr{G}'| < \infty \wedge \bigcap \mathscr{G}' = \emptyset \right)$$

Sei $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von X. Es gilt also

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = X \text{ bzw. } \bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i^c = \emptyset.$$

Nachdem $\mathscr{B} = (B_i)_{i \in \mathcal{J}}$ eine abgeschlossene Basis ist gilt

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i^c = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \bigcap_{j \in \mathcal{J}_i} B_j = \emptyset; \quad \forall i \in \mathcal{I} : \mathcal{J}_i \subseteq \mathcal{J}.$$

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}$ und für jedes $i \in \mathcal{L}$ ein endliche Menge $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{J}_i$ sodass

$$\bigcap_{i \in \mathcal{L}} \bigcap_{j \in \mathcal{K}_i} B_j = \emptyset \text{ und somit auch } \bigcap_{i \in \mathcal{L}} \bigcap_{j \in \mathcal{J}_i} B_j = \emptyset.$$

Dies können wir wieder wie folgt umschreiben:

$$\bigcap_{i \in \mathcal{L}} U_i^c = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{i \in \mathcal{L}} U_i = X$$

Wir haben also eine endliche Teilüberdeckung gefunden.
Nun sei $\mathscr{B} := \{U^c \,|\, U \in \mathscr{U}\}$, wobei $\mathscr{U}$ die klassische Basis des topologischen Raumes ist. Man sieht sofort, dass $\mathscr{B}$ eine abgeschlossene Basis ist. Sei $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{B}$ mit

$$\bigcap \mathscr{G} = \cap_{B \in \mathscr{G}} B = \emptyset \Rightarrow \cup_{B \in \mathscr{G}} B^c = X.$$

Es existiert also ein $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$ mit $|\mathscr{G}'| < \infty$ mit

$$\cup_{B \in \mathscr{G}'} B^c = X \Rightarrow \cap_{B \in \mathscr{G}'} B = \bigcap \mathscr{G}' = \emptyset.$$

□

Das folgende Lemma benötigen wir für das Finden von Homöomorphismen.

Lemma 2.8. *Seien X_1, X_2 zwei topologische Räume. Weiters sei $\mathcal{B}$ eine Menge und die Abbildungen $\psi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X_1)$ und $\psi_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X_2)$ sodass $\psi_1(\mathcal{B})$ bzw. $\psi_2(\mathcal{B})$ eine abgeschlossene Basis in X_1 bzw. X_2 bildet. Des Weiteren sei $f : X_1 \to X_2$ eine bijektive Funktion mit der Eigenschaft $\forall B \in \mathcal{B} : \psi_1(B) = f^{-1}(\psi_2(B))$. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $A \subseteq X_2$ eine abgeschlossene Menge. Es gibt also gewisse $(B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ sodass $A = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_2(B_i)$. Wir betrachten

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_2(B_i)\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}\left(\psi_2(B_i)\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_1(B_i).$$

Die Menge $f^{-1}(A)$ ist also also Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen. Dies ist äquivalent dazu, dass f stetig ist.
Sei $B \subseteq X_1$ eine abgeschlossene Menge. Es gibt also wieder gewisse $(B_i)_{i\in\mathcal{I}}$, sodass $B = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_1(B_i)$. Betrachte

$$f\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_1(B_i)\right) = f\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(\psi_2(B_i))\right) = f\left(f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_2(B_i)\right)\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \psi_2(B_i).$$

Die Menge $f(B)$ ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen. Das heißt, dass die Abbildung f abgeschlossen ist. Daher ist f in beide Richtungen stetig und somit ein Homöomorphismus.

$\square$

Lemma 2.9. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum mit der abgeschlossenen Basis $\mathscr{B}$ wobei gilt $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B} : B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$. Weiters sei A eine abgeschlossene und O eine offene Menge mit $A \subseteq O$. Dann existiert ein $B \in \mathscr{B}$ sodass $A \cap B = \emptyset \wedge B \supseteq O^c$.*

Beweis. Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt. Nachdem O offen ist gibt es $(B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ sodass

$$O = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i^c \supseteq A.$$

Von dieser offenen Überdeckung von A gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$O \supseteq \bigcup_{i\in\mathcal{J}} B_i^c \supseteq A \text{ mit } \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } |\mathcal{J}| < \infty.$$

Daraus folgt direkt

$$A \cap \bigcap_{i\in\mathcal{J}} B_i = \emptyset \text{ und } \bigcap_{i\in\mathcal{J}} B_i \supseteq O^c.$$

Letztendlich gilt auch $\bigcap_{i\in\mathcal{J}} B_i \in \mathscr{B}$.

$\square$

3 Konstruktion

Nun wenden wir uns der eigentlichen Konstruktion der Wallman-Shanin Kompaktifizierung zu.
Definition 3.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum der T_1 erfüllt und $\mathscr{B}$ eine T_1-Basis von $(X, \mathcal{T})$. Weiters sei $\sigma(X, \mathscr{B})$ die Menge der maximalen $\mathscr{B}$-Filter. Für $B \in \mathscr{B}$ sei

$$\tilde{B} := \{\mathscr{F} \in \sigma(X, \mathscr{B}) \,|\, B \in \mathscr{F}\} \text{ und } \tilde{\mathscr{B}} := \left\{\tilde{B} \,|\, B \in \mathscr{B}\right\}.$$

Wir nennen $\sigma(X, \mathscr{B})$ die *Shanin* oder *Wallman-Shanin Kompaktifizierung* von X bezüglich $\mathscr{B}$. Wenn $\mathscr{B}$ die Menge der abgeschlossenen Mengen in $(X, \mathcal{T})$ ist, so heißt $\omega(X) := \sigma(X, \mathscr{B})$ die *Wallman Kompaktifizierung* von X.

Lemma 3.2. *Für alle $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ gilt: $\tilde{B_1} \cup \tilde{B_2} = (B_1 \cup B_2)\tilde{} \wedge \tilde{B_1} \cap \tilde{B_2} = (B_1 \cap B_2)\tilde{}$*

Beweis. Seien B_1 und B_2 aus $\mathscr{B}$ beliebig. Die Implikation $\tilde{B_1} \cup \tilde{B_2} \subseteq (B_1 \cup B_2)\tilde{}$ ist klar. Sei also $\mathscr{F} \notin \tilde{B_1} \cup \tilde{B_2}$. Es gilt also $B_1 \notin \mathscr{F}$ und $B_2 \notin \mathscr{F}$. Nach Lemma 2.5 gilt

$$\exists F_1, F_2 \in \mathscr{F} : F_1 \cap B_1 = \emptyset \wedge F_2 \cap B_2 = \emptyset.$$

Und nach nochmaliger Anwendung von Lemma 2.5 und $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$ und

$$(F_1 \cap F_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset$$

gilt $B_1 \cup B_2 \notin \mathscr{F}$ und damit $\tilde{B_1} \cup \tilde{B_2} = (B_1 \cup B_2)\tilde{}$.
Die Beziehung $\tilde{B_1} \cap \tilde{B_2} = (B_1 \cap B_2)\tilde{}$ folgt direkt aus Definition 2.3 Punkt (ii) und (iii).

□

Es folgt nun die, in mehrere Teile aufgeteilte, Konstruktion der Kompaktifizierung. In jedem Satz in diesem Abschnitt gelten die in Definition 3.1 genannten Voraussetzungen.

Satz 3.3. *Das Mengensystem $\mathscr{B}$ erfüllt die Bedinungen (i)-(iii) von Lemma 2.6 und ist damit eine abgeschlossene Basis einer eindeutigen Topologie auf $\sigma(X, \mathscr{B})$.*

Beweis.

(i). $\sigma(X, \mathscr{B}) = \tilde{X} \in \tilde{\mathscr{B}}$

(ii). [1] $\tilde{B_1}, \tilde{B_2} \in \tilde{\mathscr{B}} \Rightarrow \tilde{B_1} \cup \tilde{B_2} = (B_1 \cup B_2)\tilde{} \in \tilde{\mathscr{B}}$

(iii). $\emptyset = \tilde{\emptyset} \in \tilde{\mathscr{B}}$

□

[1]hier wird gezeigt, dass sogar eine stärkere Aussage, als in Lemma 2.6 benötigt wird, gilt.

Satz 3.4. *Der topologische Raum $\sigma(X, \mathscr{B})$ erfüllt T_1.*

Beweis. Seien zwei Punkte $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \sigma(X, \mathscr{B})$ mit $\mathscr{F} \neq \mathscr{G}$ gegeben. Daraus folgt mit Lemma 2.5, dass es Mengen $F, G \in \mathscr{B}$ geben muss, sodass $F \in \mathscr{F}, G \in \mathscr{G}, F \cap G = \emptyset$. Somit erhalten wir $\mathscr{F} \in \tilde{F} \wedge \mathscr{G} \notin \tilde{F}$, und $\mathscr{G} \in \tilde{G} \wedge \mathscr{F} \notin \tilde{G}$.

□

Satz 3.5. *Der Raum $\sigma(X, \mathscr{B})$ ist eine Kompaktifizierung von X.*

Beweis. Zunächst definieren wir uns die passende Einbettung.

$$\begin{aligned} \phi : X &\to \sigma(X, \mathscr{B}) \\ x &\mapsto \{B \,|\, B \in \mathscr{B} \wedge x \in B\} =: \mathscr{F}_x. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\mathscr{F}_x$ tatsächlich ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter ist. Sei also ein $x \in X$ gegeben.

(i). $\emptyset \notin \mathscr{F}_x$.

(ii). Sei $B \in \mathscr{F}_x$ und $C \in \mathscr{B}, C \supseteq B$. Es folgt aus $x \in B \subseteq C$, dass $C \in \mathscr{F}_x$.

(iii). Wenn $B, C \in \mathscr{F}_x$ dann $x \in B \cap C \Rightarrow B \cap C \in \mathscr{F}_x$.

Sei ein $C \in \mathscr{B}$ gegeben mit

$$\forall B \in \mathscr{F}_x : C \cap B \neq \emptyset. \tag{2}$$

Angenommen $x \notin C$. Nach Definition 2.2 Punkt (iii) existiert ein $C' \in \mathscr{B}$ sodass $C' \cap C = \emptyset \wedge x \in C'$. Widerspruch zu (2). Nach Lemma 2.5 ist $\mathscr{F}_x$ ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter.

Jetzt zeigen wir, dass ϕ ein Homöomorphismus ist. Zunächst behaupten wir ϕ ist injektiv.
Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Nachdem X T_1 erfüllt existiert eine abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ mit $x \notin A \ni y$. O.B.d.A können wir ein $B \in \mathscr{B}, B \subseteq A$ wählen, sodass $x \notin B \ni y$. Wir erhalten $B \notin \mathscr{F}_x$ und $B \in \mathscr{F}_y$. Und somit $\mathscr{F}_x \notin \tilde{B} \wedge \mathscr{F}_y \in \tilde{B} \Rightarrow \mathscr{F}_x \neq \mathscr{F}_y$.
Des Weiteren behaupten wir folgendes:

$$\forall B \in \mathscr{B} : \phi(X) \cap \tilde{B} = \{\mathscr{F}_x \,|\, x \in B\} = \phi(B) \tag{3}$$

Die zweite Gleichheit in (3) ist klar. Zur ersten Gleichheit:
Wir betrachten ein $x \in X$ und damit das entsprechende $\mathscr{F}_x$. Zusätzlich gilt $B \in \mathscr{F}_x$. Wäre nun $x \notin B$ dann würde aus Definition 2.2 Punkt (iii) folgen, dass es ein $B' \in \mathscr{B}$ gäbe, sodass $B' \cap B = \emptyset$ und $B' \in \mathscr{F}_x$ woraus nach Definition 2.3 Punkt (iii) $\emptyset \in \mathscr{F}_x$ folgen würde - Widerspruch. Es gilt also

$$\phi(X) \cap \tilde{B} \subseteq \{\mathscr{F}_x \,|\, x \in B\}.$$

Umgekehrt sei ein $\mathscr{F}_x$ mit $B \in \mathscr{F}_x$ gegeben. Es folgt direkt, dass $\mathscr{F}_x \in \phi(X) \cap \tilde{B}$ und damit

$$\phi(X) \cap \tilde{B} \supseteq \{\mathscr{F}_x \,|\, x \in B\}$$

gilt.
Bildet man die Spurtopologie auf $\phi(X)$ bezüglich des topologischen Raumes $\sigma(X, \mathscr{B})$ so erhalten wir einen topologischen Raum den wir X_2 nennen. Weiters definieren wir uns die Abbildung

$$\begin{aligned}\psi_2 : \mathscr{B} &\to \mathcal{P}(X_2)\\ B &\mapsto \phi(B).\end{aligned}$$

Nach (3) bildet das System $\psi_2(\mathscr{B})$ auf X_2 nun eine abgeschlossene Basis. Nun bezeichnen wir noch den ursprünglichen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit X_1 und definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}\psi_1 : \mathscr{B} &\to \mathcal{P}(X_1)\\ B &\mapsto B.\end{aligned}$$

Die Abbildung $f : X_1 \to X_2 : x \mapsto \mathscr{F}_x$ ist bijektiv und erfüllt für alle $B \in \mathscr{B}$ die Eigenschaft $\psi_1(B) = B = \phi^{-1}(\phi(B)) = f^{-1}(\psi_2(B))$. Nach Lemma 2.8 ist f ein Homöomorphismus.

Jetzt zeigen wir, dass das Bild $\phi(X)$ in $\sigma(X, \mathscr{B})$ dicht liegt. Behauptung: $\forall B \in \mathscr{B}$ gilt

$$\overline{\phi(B)}^{\sigma} \overset{(a)}{=} \bigcap \left\{ \tilde{D} \,|\, D \in \mathscr{B} \wedge \phi(B) \subseteq \tilde{D} \right\} \overset{(b)}{=} \bigcap \left\{ \tilde{D} \,|\, D \in \mathscr{B} \wedge B \subseteq D \right\} \overset{(c)}{=} \tilde{B}$$

wobei mit $\overline{\phi(B)}^{\sigma}$ der Abschluss von $\phi(B)$ in $\sigma(X, \mathscr{B})$ gemeint ist.

(a) ist klar, nachdem $\tilde{\mathscr{B}}$ abgeschlossene Basis ist.

(b) für alle $D \in \mathscr{B}$ gilt: $\phi(B) \subseteq \tilde{D} \Leftrightarrow \forall \mathscr{F}_x \in \phi(B) : D \in \mathscr{F}_x \Leftrightarrow B \subseteq D$

(c) $\mathscr{F} \in \bigcap \left\{ \tilde{D} \,|\, D \in \mathscr{B} \wedge B \subseteq D \right\} \Leftrightarrow \forall D \in \mathscr{B}, D \supseteq B : D \in \mathscr{F} \Rightarrow B \in \mathscr{F}$ und $\mathscr{F} \in \tilde{B} \Rightarrow \forall D \in \mathscr{B}, D \supseteq B : D \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \mathscr{F} \in \bigcap \left\{ \tilde{D} \,|\, D \in \mathscr{B} \wedge B \subseteq D \right\}$

Es gilt also für alle $B \in \mathscr{B}$, dass $\overline{\phi(B)}^{\sigma} = \tilde{B}$. Insbesondere $\overline{\phi(X)}^{\sigma} = \tilde{X} = \sigma(X, \mathscr{B})$. Das Bild von X unter ϕ ist also dicht.
Es fehlt nur noch zu zeigen, dass $\sigma(X, \mathscr{B})$ kompakt ist. Sei dazu ein System $\tilde{\mathscr{B}}' \subseteq \tilde{\mathscr{B}}$ gegeben und nehmen wir an es erfüllt f.i.p. Mit Lemma 3.2 sieht man, dass auch das System $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ f.i.p. erfüllt. Nach Lemma 2.4 existiert ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter mit der Eigenschaft $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{B}'$ wobei

$$\mathscr{F} \supseteq \mathscr{B}' \Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{B}' : B \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{B}' : \mathscr{F} \in \tilde{B} \Leftrightarrow \mathscr{F} \in \bigcap \tilde{\mathscr{B}}' \Rightarrow \bigcap \tilde{\mathscr{B}}' \neq \emptyset$$

gilt. Nach Lemma 2.7 ist also $\sigma(X, \mathscr{B})$ kompakt. Somit ist $\sigma(X, \mathscr{B})$ eine T_1-Kompaktifizierung des Raumes $(X, \mathcal{T})$ mit der Einbettung ϕ.

□

Satz 3.6. *Die Kompaktifizierung $\sigma(X, \mathscr{B})$ erfüllt T_2 genau dann wenn $\mathscr{B}$ eine normale Basis ist (siehe Definition 2.2).*

Beweis. „$\Leftarrow$ “ : Seien $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ verschiedene Punkte (maximale $\mathscr{B}$-Filter) aus $\sigma(X, \mathscr{B})$.

Somit existieren nach Lemma 2.5 $B_1 \in \mathscr{F}_1, B_2 \in \mathscr{F}_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Nachdem $\mathscr{B}$ eine normale Basis ist existieren $B_1', B_2' \in \mathscr{B}$ mit

$$B_1 \cap B_1' = \emptyset \quad B_2 \cap B_2' = \emptyset \quad B_1' \cup B_2' = X.$$

Wir erhalten nun $\mathscr{F}_1 \in \sigma(X, \mathscr{B}) \backslash \tilde{B_1'}$ und $\mathscr{F}_2 \in \sigma(X, \mathscr{B}) \backslash \tilde{B_2'}$. Wir haben also für die Punkte $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ Umgebungen gefunden. Nachdem $B_1 \cup B_2 = X \Leftrightarrow \tilde{B_1} \cup \tilde{B_2'} = \sigma(X, \mathscr{B})$ sind diese zwei Umgebungen disjunkt.
„$\Rightarrow$ “ : Wenn $\sigma(X, \mathscr{B})$ T_2 erfüllt so folgt, dass $\sigma(X, \mathscr{B})$ sogar normal ist. Seien $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ gegeben. Also gilt $\tilde{B_1} \cap \tilde{B_2} = \emptyset$. Nach Voraussetzung existieren $U_1, U_2 \subseteq \sigma(X, \mathscr{B})$ sodass

$$\tilde{B_1} \subseteq U_1 \text{ und } \tilde{B_2} \subseteq U_2 \text{ und } U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Nach Lemma 2.9 existieren $\tilde{C_1}, \tilde{C_2} \in \tilde{\mathscr{B}}$ sodass

$$\tilde{C_1} \cap \tilde{B_1} = \tilde{C_2} \cap \tilde{B_2} = \emptyset \text{ und } \tilde{C_1} \supseteq \ U_1^c \wedge \tilde{C_2} \supseteq U_2^c.$$

Daraus ergibt sich $\tilde{C_1} \cup \tilde{C_2} = \sigma(X, \mathscr{B}) \Leftrightarrow C_1 \cup C_2 = X$ und $C_1 \cap B_1 = C_2 \cap B_2 = \emptyset$.

□

4 Eindeutigkeit

Bei einem gegebenen topologischen Raum, der T_1 erfüllt, ist die Wallman-Shanin Kompaktifizierung $\sigma(X, \mathscr{B})$ weitgehend eindeutig.

Satz 4.1. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum der T_1 erfüllt, $\mathscr{B}$ eine T_1-Basis und $\sigma(X, \mathscr{B})$ seine Kompaktifizierung nach Definition 3.1. Weiters sei $\sigma'(X, \mathscr{B})$ eine weitere Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$, bezüglich dem Homöomorphismus ϕ', die T_1 erfüllt. Darüber hinaus sei $\left\{\overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \mid B \in \mathscr{B}\right\}$ eine abgeschlossene Basis von $\sigma'(X, \mathscr{B})$ mit der Eigenschaft*

$$\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B} : \overline{\phi'(B_1)}^{\sigma'} \cap \overline{\phi'(B_2)}^{\sigma'} = \overline{\phi'(B_1 \cap B_2)}^{\sigma'}, \tag{4}$$

so existiert ein Homöomorphismus $\Phi : \sigma(X, \mathscr{B}) \to \sigma'(X, \mathscr{B})$ mit der Eigenschaft $\Phi \circ \phi = \phi'$.

Beweis. Sei ein $x \in \sigma(X, \mathscr{B})$ gegeben. Wir zeigen zunächst mit Hilfe von [Wor03, Lemma 1.4.6], dass $\left\{\overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \mid F \in x\right\}$ Filterbasis ist.

(i). $\emptyset \notin \mathscr{F} \Leftarrow \emptyset \notin x$

(ii). $\overline{\phi'(A)}^{\sigma'}, \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \in \mathscr{F} \Rightarrow A, B \in x \Rightarrow A \cap B \in x \Rightarrow \overline{\phi'(A \cap B)}^{\sigma'} \in \mathscr{F}$

Nach [Wor03, Satz 4.1.1] besitzt der, durch die Basis $\mathscr{F}$ erzeugte Filter $[\mathscr{F}]$ einen Häufungspunkt y. Es gilt also insbesondere

$$y \in \bigcap \left\{ \overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \mid F \in x \right\} =: Z_1.$$

Weiters folgt aus T_1

$$\{y\} = \bigcap \left\{ \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \mid y \in \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \wedge B \in \mathscr{B} \right\} =: Z_2.$$

Behauptung: $Z_1 = Z_2$
Sei $B \in \mathscr{B}$ mit $y \in \overline{\phi'(B)}^{\sigma'}$. Weiters sei $F \in x$ sodass $\overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \cap \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \neq \emptyset$. Es folgt $F \cap B \neq \emptyset$ und nachdem x ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter ist folgt mit Lemma 2.5, dass $B \in x$. Also $Z_1 = Z_2$. Wir erhalten somit

$$\{y\} = \bigcap \left\{ \overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \mid F \in x \right\}$$

Jetzt zeigen wir, dass der Filter $[\mathscr{F}]$ gegen den Punkt y konvergiert. Sei $U \subseteq \sigma'(X, \mathscr{B})$ eine Umgebung von y. Nach Lemma 2.9 existiert ein $B \in \mathscr{B}$ sodass $y \in \sigma'(X, \mathscr{B}) \backslash \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \subseteq U$. Daraus können wir mit Hilfe von Lemma 2.5 schließen, dass

$$\exists F \in x : \overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \cap \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} = \emptyset \text{ bzw. } \overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \subseteq \sigma'(X, \mathscr{B}) \backslash \overline{\phi'(B)}^{\sigma'}$$

und damit

$$\overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \subseteq U$$

Wir definieren uns jetzt folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \Phi : \sigma(X, \mathscr{B}) &\to \sigma'(X, \mathscr{B}) \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

wobei der Punkt y den Grenzwert des im Raum $\sigma'(X, \mathscr{B})$ durch x definierten Filters repräsentiert.

Jetzt werden wir zeigen, dass die Abbildung Φ injektiv ist. Seien dazu x und x' zwei verschiedene Punkte aus $\sigma(X, \mathscr{B})$. Nach Lemma 2.5 existieren zwei Mengen $F, F' \in \mathscr{B}$ mit $F \in x$ und $F' \in x'$ sodass $F \cap F' = \emptyset$. So erhalten wir $\overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \cap \overline{\phi'(F')}^{\sigma'} = \emptyset$ und unmittelbar auch $\Phi(x) \neq \Phi(x')$.

Die Abbildung Φ ist auch surjektiv: Für ein $y \in \sigma'(X, \mathscr{B})$ definieren wir uns das Mengensystem

$$\mathscr{F} := \left\{ B \in \mathscr{B} \mid y \in \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \right\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathscr{F}$ ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter ist.

(i). $\emptyset \notin \mathscr{F}$ trivial

(ii). Sei $B \in \mathscr{F}$ und $C \in \mathscr{B}, C \supseteq B \Rightarrow y \in \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \subseteq \overline{\phi'(C)}^{\sigma'} \Rightarrow \overline{\phi'(C)}^{\sigma'} \in \mathscr{F}$

(iii). Seien $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow y \in \overline{\phi'(A)}^{\sigma'} \cap \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \overset{(4)}{=} \overline{\phi'(A \cap B)}^{\sigma'} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$

Sei $C \in \mathscr{B}$ mit $\forall F \in \mathscr{F} : C \cap F \neq \emptyset$. Daraus folgt $\forall F \in \mathscr{F} : \overline{\phi'(C)}^{\sigma'} \cap \overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \neq \emptyset$. Betrachte die Menge

$$L := \left\{ \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \,|\, y \in \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \wedge B \in \mathscr{B} \right\} \cup \left\{ \overline{\phi'(C)}^{\sigma'} \right\}.$$

Das Mengensystem L erfüllt offensichtlich f.i.p. Nach Lemma 2.7 gilt also

$$\bigcap L = \{y\} \cap \overline{\phi'(C)}^{\sigma'} \neq \emptyset$$

woraus direkt $y \in \overline{\phi'(C)}^{\sigma'}$ und damit $C \in \mathscr{F}$ folgt. Nach Lemma 2.5 ist $\mathscr{F}$ also ein maximaler $\mathscr{B}$-Filter. Es gilt offensichtlich $\Phi(\mathscr{F}) = y$.

Jetzt zeigen wir, dass für alle $B \in \mathscr{B}$

$$\Phi^{-1}(\overline{\phi'(B)}^{\sigma'}) = \tilde{B} \tag{5}$$

gilt. Sei ein Filter $x \in \tilde{B}$ also $B \in x$. Daraus folgt $\Phi(x) \in \overline{\phi'(B)}^{\sigma'}$ also $\Phi^{-1}(\overline{\phi'(B)}^{\sigma'}) \supseteq \tilde{B}$.

Nun sei ein Filter $x \in \sigma(X, \mathscr{B})$ mit $x \notin \tilde{B}$ gegeben. Nach Lemma 2.5 folgt also, dass ein $F \in x$ mit $F \cap B = \emptyset$ existiert. Es folgt $\Phi(x) \in \overline{\phi'(F)}^{\sigma'} \subseteq \sigma'(X, \mathscr{B}) \backslash \overline{\phi'(B)}^{\sigma'}$ und damit auch die Behauptung.

Zum Schluss zeigen wir, dass Φ ein Homöomorphismus ist. Hierfür wollen wir das Lemma 2.8 anwenden. Wir vergeben folgendermaßen die Rollen:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \mathscr{B} \\ X_1 := \sigma(X, \mathscr{B}) &\text{ und } X_2 := \sigma'(X, \mathscr{B}) \\ \psi_1 &:= \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X_1) : B \mapsto \tilde{B} \\ \psi_2 &:= \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X_2) : B \mapsto \overline{\phi'(B)}^{\sigma'} \\ f &:= \Phi. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.8 ist Φ unser gesuchter Homöomorphismus. Die Eigenschaft $\Phi \circ \phi = \phi'$ folgt direkt aus (5) und der Tatsache, dass Φ bijektiv ist.

$\square$

Literatur

[Wor03] Harald Woracek. Allgemeine topologie. http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/topo.pdf, 2003.