Zusammenhang- Verschiedene Begriffe und einige erklärende Beispiele

Bernhard Stiftner

18. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem topologischen Begriff Zusammenhang. Schon in der Überschrift ist hierbei von verschiedenen Begriffen die Rede. In der Tat ist es möglich etliche ähnliche Begriffe zu definieren, die zunächst alle recht ähnlich zum Begriff “zusammenhängend“ erscheinen. Bei genauerer Betrachtung sind jedoch sehr wohl Unterschiede festzustellen, weswegen ein Titel wie “Der topologische Begriff Zusammenhang“ unpräzise erscheint. Diese Unterschiede herauszuarbeiten und durch Angabe von Beispielen zu verdeutlichen wird der zentrale Punkt dieser Arbeit sein. Grundlegendes Wissen zu topologischen Räumen wird dabei vorausgesetzt.

2 Grundlegende Definitionen und Aussagen

Die folgenden Lemmata und Defintionen sind für den Rest dieser Arbeit wesentlich und werden an dieser Stelle noch einmal zusammengefasst.

Definition 1 (Topologie)**.** Sei X ein beliebige Menge und sei ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Man nennt $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, wenn

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ für $O_i \in \mathcal{T} \quad \forall \mathrm{i} \in I$ für eine beliebige Menge I
- $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$ für $O_i \in \mathcal{T} \quad \forall \mathrm{i} \in \{1, \dots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}$

Wird X mit der Topologie $\mathcal{T}$ versehen, so schreibt man kurz $(X, \mathcal{T})$. Man nennt dies einen topologischer Raum.

Definition 2 (Disjunktion und zusammenhängender Raum)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ heißen Disjunktion von X wenn $U, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$. Ein Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt zusammenhängender Raum, wenn er keine Disjunktion besitzt.

Definition 3 (Getrennte Mengen)**.** Nicht notwendigerweise offene Mengen $M_1, M_2 \subset X$ mit $M_1, M_2 \neq \emptyset$ heißen getrennt, wenn $\overline{M_1} \cap M_2 = M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset$.

Definition 4 (Zusammenhängende Menge)**.** Sei $E \subset X$ und $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man nennt $E \subset X$ eine zusammenhängende Menge, wenn E nicht als Vereinigung getrennter Mengen geschrieben werden kann.

Es ist eine wichtige Aussage, das zwischen den Begriffen “zusammenhängender Raum“ aus Definition 2 und zusammenhängende Menge aus Definition 4 nicht unterschieden werden muss, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $E \subset X$, dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- E ist eine zusammenhängende Menge.
- E ist zusammenhängend als Raum bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{T} \cap E$.

Beweis. siehe [KAL] (Lemma 12.6.8; Seite 156) □

Über die Vereinigung von zusammenhängenden Mengen kann die folgende Aussage gemacht werden.

Lemma 6. Sei $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Mengen im topologischem Raum $(X,\mathcal{T})$ und gelte weiters $\bigcap_{i\in I} E_i \neq \emptyset$, dann ist $\bigcup_{i\in I} E_i$ eine zusammenhängende Menge.

Beweis. siehe [KAL] (Lemma 11.6.10; Seite 157) □

Die Voraussetzung, das der Durchschnitt nichtleer ist kann dabei keineswegs weggelassen werden.

Beispiel 7. Setze $(X,\mathcal{T}) = (\mathbb{R},\mathcal{E})$ und $E_1 = (0,1)$ bzw. $E_2 = (2,3)$, dann gilt $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ aber E_1 und E_2 sind zwei getrennte offene Mengen, womit $E_1 \cup E_2$ sicher nicht zusammenhängend ist.

Die Eigenschaft einer Menge zusammenhängend zu sein bleibt unter stetigen Abbildungen erhalten, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 8. Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{O})$ topologische Räume und sei

$$f : (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}) \tag{1}$$

eine stetige Abbildung. Für eine zusammenhängende Menge $E \subset X$ gilt dann: $f(E) \subset Y$ ist zusammenhängend.

Beweis. siehe [KAL] (Proposition 12.6.9; Seite 156) □

Auch für den Abschluss von zusammenhängenden Mengen in einem topologischen Raum kann eine Aussage gemacht werden, es gilt sogar noch mehr.

Lemma 9. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $E \subset X$ zusammenhängend. Sei $F \subset X$, sodass $E \subset F \subset \overline{E}$, dann ist F zusammenhängend.

Beweis. Angenommen F wäre nicht zusammenhängend dann existieren nach Lemma 5 $U, V \in \mathcal{T}$ mit U,$V \neq \emptyset$ mit $U \cap F \neq \emptyset$ und $V \cap F \neq \emptyset$ mit:

$$(F \cap U) \cup (F \cap V) = F \tag{2}$$

$$(F \cap U) \cap (F \cap V) = \emptyset \tag{3}$$

weiters gilt dann:

$$F \cap E = E = (F \cap U \cap E) \cap (F \cap V \cap E) = (E \cap U) \cap (E \cap V) = \emptyset \tag{4}$$

Somit muss entweder $E \cap U = \emptyset$ oder $E \cap V = \emptyset$, denn E ist zusammenhängend (vgl. Lemma 5). Gelte nun o.E.d.A. $E \cap V = \emptyset$. Laut Annahme muss dann aber:

$$F \cap V = (F \setminus E \cap V) \cup \underbrace{(E \cap V)}_{=\emptyset} \tag{5}$$

Somit muss $\forall x \in F \cap V$ schon $x \in \partial E \setminus E$ und $x \in V$ gelten. Andererseits ist aber $E \cap V = \emptyset$, was aber ein Widerspruch ist. Damit muss die obige Annahme falsch sein und F ist zusammenhängend. □

Bemerkung 10. Aus Lemma 9 folgt auch schon für zusammenhängendes E das $\overline{E}$ zusammenhängend ist.

Bemerkung 11. Für das Innere einer zusammenhängenden Menge $E \subset X$ gilt eine analoge Aussage nicht, auch wenn $E \neq \emptyset$ ist. Betrachte dazu die Menge

$$E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \leq 1 \right\} \tag{6}$$

$$E_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \leq 1 \right\} \tag{7}$$

$$E_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \in [-1, 1]\,, x_2 = 0 \right\} \tag{8}$$

und setze

$$E := \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup E_3 \tag{9}$$

Dann ist E zusammenhängend und es gilt

$$\mathring{E} = E_1 \cup E_2 \tag{10}$$

Das sind aber zwei getrennte offene Mengen, womit $\mathring{E}$ sicher nicht zusammenhängend ist.

2.1 Komponenten

Sei nun wieder (X, T) ein topologischer Raum. Es soll nun der Frage nachgegangen werden, welche "Art" von zusammenhängenden Mengen man um ein festes $x \in X$ legen kann. Diese Mengen werden dann in einem gewissen Sinn "maximal" sein.

Definition 12. Bezeichne $(X, \mathcal{T})$ einen topologischen Raum und für $x,y \in X$ sei

$$x \sim_1 y :\Longleftrightarrow \exists E \subset X \quad \text{zusammenhängend und} \quad x,y \in E \tag{11}$$

Satz 13 (Komponenten)**.**

(i) Die in Definition 12 festgelegte Relation $\sim_1$ ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Bezeichne für die zu $x \in X$ gehörige Äquivalenzklasse mit A^1_x, dann ist A^1_x die größte zusammenhängende Menge die x enthält, d.h. für eine zusammenhängende Menge $E \subset X$ mit $x \in E$ folgt $E \subset A^1_x$.

(iii) A^1_x ist abgeschlossen.

Beweis.

(i) $\sim_1$ ist reflexiv denn für $x \in X$ ist $\{x\}$ sicher eine zusammenhängende Menge die x enthält. Definition 12 ist klarerweise symmetrisch. Weiters $\sim_1$ ist auch transitiv denn für $x, y, z \in X$ mit $x \sim_1 y$ und $y \sim_1 z$ folgt die Existenz zweier zusammenhängender Mengen $E_1, E_2 \subset X$ mit $x, y \in E_1$ und $y, z \in E_2$. Nun ist aber $y \in E_1 \cap E_2$ womit $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Laut Lemma 6 ist dann $E_1 \cup E_2$ zusammenhängend und $x, z \in E_1 \cup E_2$. Insgesamt ist $\sim_1$ eine Äquivalenzrealtion.

(ii) Sei $x \in X$ und $x \in E \subset X$ eine beliebige zusammenhängende Menge. Für alle $y \in X$ gilt klarerweise $x \sim_1 y$ und somit $y \in A_x^1$. Daher gilt $E \subset A_x^1$. Angenommen A_x^1 wäre für ein $x \in X$ nicht zusammenhängend, dann existieren sicher Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ mit $A_x^1 \cap U \neq \emptyset$, $A_x^1 \cap V \neq \emptyset$ und $(A_x^1 \cap U) \cup (A_x^1 \cap V) = A_x^1$. Für $y_1, y_2 \in A_x^1$ und eine beliebige zusammenhängende Menge E mit $y_1, y_2 \in E$ gilt einerseits lt. obigen Ausführungen dann $E \subset A_x^1$ und deswegen auch $(E \cap U) \cup (E \cap V) = E$. Weiters gilt sowohl $E \cap U \neq \emptyset$ als auch $E \cap V \neq \emptyset$. Das ist aber ein Widerspruch, denn E ist zusammenhängend. Es muss also auch A_x^1 für $x \in X$ zusammenhängend sein.

(iii) Mit Lemma 9 ist A_x^1 abgeschlossen.

□

Bemerkung 14. Die Äquivalenzklassen der Relation aus Definition 13 werden als Komponenten bezeichnet. Hat $(X, \mathcal{T})$ nur eine Komponente so ist X klarerweise zusammenhängend in Sinn von Definition 4.

2.2 Wegkomponenten und Wegzusammenhang

Definition 15. In einem topologischem Raum $(X, \mathcal{T})$ ist für $x, y \in X$:

$$x \sim_2 y :\Longleftrightarrow \exists f : [0,1] \longrightarrow X \quad \text{stetig mit} \quad f(0) = x \quad f(1) = y \tag{12}$$

Satz 16. Die in Definition 15 definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

- **Reflexivität:** Für $x \in X$ gilt $x \sim_2 x$. Setze hierfür:

  $$f : [0,1] \longrightarrow X : t \longmapsto x \tag{13}$$

  f ist sicher stetig, da konstante Abbildungen zwischen beliebigen topologischen Räumen immer stetig sind. Klarerweise gilt $f(0) = x$ und $f(1) = 1$.

- **Symmetrie:** Für $x, y \in X$ und $x \sim_2 y$ gilt auch $y \sim_2 x$, denn aus $x \sim_2 y$ folgt die Existenz eines stetigen $f : [0,1] \longrightarrow X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$. Setze dann:

  $$h : [0,1] \longrightarrow X : t \longmapsto f(1-t) \tag{14}$$

  h ist dann als Zusammensetzung stetiger Funktionen sicher stetig und es gilt darüberhinaus $h(0) = y$ und $h(1) = x$; also insgesamt $y \sim_2 x$.

- **Transitivität:** Seien $x, y, z \in X$ und es gelte $x \sim_2 y$ sowie $y \sim_2 z$. Es existieren also $f : [0,1] \longrightarrow X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ und $g : [0,1] \longrightarrow X$ mit $g(0) = y$ und $f(1) = z$. Setze nun

$$h : [0,1] \longrightarrow X : t \longmapsto \begin{cases} f(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ g(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{15}$$

h ist wohldefiniert, denn $2t \in [0,1]$ für $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ und ebenso $2t - 1 \in [0,1]$ für $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ Klarerweise ist h auf $[0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig. Da $f\left(2\frac{1}{2}\right) = g\left(2\frac{1}{2} - 1\right)$ folgt auch die Stetigkeit an $t = \frac{1}{2}$ und damit auf $[0,1]$. Durch Einsetzen erhält man $h(0) = x$ und $h(1) = z$ und somit auch $x \sim_2 z$. Die Relation $\sim_2$ ist also auch transitiv.

Insgesamt ist $\sim_3$ eine Äquivalenzrelation. □

Definition 17. Die Äquivalenzklassen von $\sim_3$ werden als Wegkomponenten bezeichnet. Für $x \in X$ schreibe dafür A_x^2. Eine Menge $E \subset X$ heißt wegzusammenhängend wenn für alle $x, y \in X$ $x \sim_2 y$ gilt. Hat $(X, \mathcal{T})$ nur eine Wegkomponente, so wird er wegzusammenhängend genannt.

2.3 Bogenkomponenten und Bogenzusammenhang

Das folgende Konzept ist ganz ähnlich zu dem des Wegzusammenhangs.

Definition 18. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Es soll dann

$$x \sim_3 y :\Longleftrightarrow \exists f : [0,1] \longrightarrow X \text{ stetig und injektiv mit } f(0) = x \text{ mit } f(1) = y \text{ oder } x = y \tag{16}$$

Satz 19. Die in Definition 18 definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. $\sim_3$ ist per definitionem reflexiv. Die Symmetrie folgt genauso wie in Satz 16. Es bleibt die Transitivität zu zeigen.

- Betrachte hier nur den Fall $x, y, z \in X$ mit $x \neq y \neq z$; alle anderen Fälle sind trivial. Sei $x \sim_3 y$ und $y \sim_3 z$. Es existieren nun also $f, g : [0,1] \mapsto X$, jeweils stetig und injektiv mit $f(0) = x$, $f(1) = y$ bzw. $g(0) = y$, $g(1) = z$. Es muss nun ein stetiges und injektives $h : [0,1] \to X$ gefunden werden. Das ist aber nicht so einfach wie in Satz 16, denn für

$$f([0,1]) \cap g([0,1]) \neq \emptyset \tag{17}$$

wird

$$h : [0,1] \longrightarrow X : t \longmapsto \begin{cases} f(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ g(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{18}$$

im Allgemeinen nicht injektiv sein. Es müssen deswegen einige Fälle unterschieden werden.

- Sei $x \in g([0,1])$. Es existiert also ein $s \in [0,1]$ mit $g(s) = x$. Es gilt sogar $s \in (0,1)$ denn lt. Voraussetzung gilt $x \neq y \neq z$. Setze nun

$$h : [0,1] \to X : t \mapsto g((1-s)t + s), \tag{19}$$

dann gilt $h(0) = x$ und $h(1) = z$. Die Stetigkeit und die Injektivität folgen aus der Stetigkeit und Injektivität von g und der affinen Transformation.

- Sei nun $x \notin g([0,1])$ und zustätzlich $z \in f([0,1])$. Wie oben folgt die Existenz eines $m \in (0,1]$ mit $f(m) = z$. Setze nun

$$h : [0,1] \to X : t \mapsto f(ts). \tag{20}$$

Die Stetigkeit und Injektivität folgt analog zum vorherigen Punkt.

- Schließlich muss noch der Fall $x \notin g([0,1])$ und $z \notin f([0,1])$. Es müssen nun $t_1, t_2 \in [0,1]$ existieren, mit $f(t_1) = g(t_2)$. Setze nun

$$M := \{t_1 \in [0,1] : \exists t_2 \in [0,1] \text{ mit } f(t_1) = g(t_2)\} \tag{21}$$

und weiters

$$m := \inf_{t_1 \in M} M. \tag{22}$$

Es ist nun $m \in M$, denn für eine Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei für die Folgenglieder $m_n \in [0,1]$ gilt und $m_n \to m$. Es existiert nun eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei auch hier $t_n \in [0,1]$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt; es gibt also ein $s \in [0,1]$ und eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_{n_k} \to s$. Zudem gilt nun aber auch $m_{n_k} \to m$. Es ist nun:

$$f(m) = \lim_{k\to\infty} f(m_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} g(t_{n_k}) = g(s) \tag{23}$$

wobei die beiden äußeren Gleichheiten aus der Stetigkeit von f und g und die mittlere Gleichheit aus der Konstruktion der beiden Folgen $(m_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ folgen. Insgesamt gilt nun $m \in M$. Da ja $x \notin g(0,1]$ folgt aber auch $m > 0$. Es gilt nun

$$f([0,m)) \cap g([0,1]) = \emptyset. \tag{24}$$

Zusätzlich muss auch $s < 1$, denn für $s = 1$ wäre $f(m) = g(1) = z \notin f([0,1])$ lt. Voraussetzung. Setze nun:

$$h : [0,1] \longrightarrow X : t \longmapsto \begin{cases} f(2mt) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ g(2(1-s)t + 2s - 1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{25}$$

Nun ist $f(m) = g(t)$ und damit ist h auch an $t = \frac{1}{2}$ stetig. Die Wohldefiniertheit folgt wie in Satz 16. Lt. Vorausetzung gilt $z \neq f(m) = g(s)$. Deswegen, weil die affinen Transformationen injektiv sind und mit (24) folgt die Injektivität von h.

- Das waren aber schon alle Fälle und so folgt, dass $\sim_3$ eine Äquivalenzrelation ist.

□

Definition 20 (Bogenkomponenten und Bogenzusammenhang)**.** In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißen die Äquivalenzklassen von $\sim_3$ Bogenkomponenten von X. Für ein $x \in X$ werden sie mit A_x^3 bezeichnet. Eine Menge $E \subset X$ heißt bogenzusammenhängend, wenn für alle $x, y \in X$ $x \sim_3 y$ gilt. $(X, \mathcal{T})$ heißt bogenzusammenhängend, wenn er nur eine Bogenkomponente hat.

Der folgende Satz zeigt, wie die Begriffe Komponenten, Wegkomponenten und Bogenkomponenten zusammenhängend.

Satz 21. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann gilt mit den Notationen von vorher für ein $x \in \mathcal{T}$:

$$A_x^3 \subset A_x^2 \subset A_x^1 \tag{26}$$

oder in Worten: Komponenten $\subset$ Wegkomponenten $\subset$ Bogenkomponenten

Beweis. Zeige für ein festes $x \in X$ gilt: $x \sim_3 y \Rightarrow x \sim_2 y \Rightarrow x \sim_1 y$, dann folgt bereits die Aussage. Für $x = y$ ist das klar, da alle Relationen unter anderem reflexiv sind. Nimm also an $x \neq y$.

- $x \sim_3 y \Rightarrow x \sim_2 y$ ist klar, da für $x \sim_3 y$ die Existenz von speziellen (nämlich injektiven) stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ gefordet wird.
- Aus $x \sim_3 y$ folgt für $f : [0,1] \longrightarrow X$ stetig mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$, dass $x, y \in f([0,1])$. Damit ist f stetig und da [0,1] zusammenhängend ist folgt aus Lemma 8 $x \sim_1 y$

□

Bemerkung 22. Laut Definition 17 und 20 und mit den Sätzen 5 und 21 gilt in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ für beliebige Teilmengen $E \subset X$,dass aus bogenzusammenhängend wegzusammenhängend und aus wegzusammenhängend zusammenhängend folgt. Im allgeinen gilt aber nicht mal für $E = X$ eine einzige Umkehrung dieser Aussagen. Deswegen macht es auch wirklich Sinn zwischen zusammenhängend, wegzusammenhängend und bogenzusammenhängend zu unterscheiden. Erklärende Beispiele hierfür werden später angegeben.

2.4 Hyperzusammenhängend und Ultrazusammenhängend

Sei im folgenden immer X ein Raum versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$ und schreibe dafür $(X, \mathcal{T})$.

Definition 23. $(X, \mathcal{T})$ heißt hyperzusammenhängend, wenn für $U, V \in \mathcal{T}$ und $U, V \neq \emptyset$ immer

$$U \cap V \neq \emptyset \tag{27}$$

gilt.

Definition 24. $(X, \mathcal{T})$ heißt ultrazusammenhängend, wenn für abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ und $A, B \neq \emptyset$ immer

$$A \cap B \neq \emptyset \tag{28}$$

gilt.

Satz 25. Sei $(X, \mathcal{T})$ hyperzusammenhängend, dann folgt auch schon dass $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend ist.

Beweis. Wenn X nicht zusammenhängend wäre, so müsste zumindest es zwei offene Mengen $U, V \neq \emptyset$ geben mit $U \cap V = \emptyset$, das widerspricht aber der Definition von hyperzusammenhängend. □

Satz 26. Sei $(X, \mathcal{T})$ ultrazusammenhängend, dann folgt, dass $(X, \mathcal{T})$ auch wegzusammenhängend ist. Insbesondere ist $(X, \mathcal{T})$ damit auch zusammenhängend.

Beweis.

- Wähle $a, b \in X$ beliebig und o.E.d.A $a \neq b$, denn ein einpunktiger Raum ist sicher wegzusammenhängend, da $\sim_2$ reflexiv ist. Betrachte nun weiters ein beliebiges $p \in \overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}}$. Ein solches kann sicher gefunden werden, denn $(X, \mathcal{T})$ ist nach Voraussetzung ultrazusammenhängend. Setze nun

$$f : [0,1] \longrightarrow X : t \longmapsto \begin{cases} a & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ p & t = \frac{1}{2} \\ b & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{29}$$

- Sei nun $A \subset X$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist:

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & a, b, p \notin A \\ \left[0, \frac{1}{2}\right] & a, p \in A, b \notin A \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right] & b, p \in A, a \notin A \\ [0,1] & a, b, p \in A \end{cases} \tag{30}$$

  Das sind aber auch schon alle Fälle denn für $a \in A$ oder $b \in A$ folgt, da A abgeschlossen ist und wegen der der Wahl von p, dass dann auch $p \in A$. In jedem Fall ist $f^{-1}(A)$ aber abgeschlossen und somit ist, da $A \subset X$ beliebig war f stetig. Laut Konstruktion ist nun $f(0) = a$ und $f(1) = b$ und somit gilt $a \sim_2 b$. Da a und b beliebig waren folgt schon das $(X, \mathcal{T})$ wegzusammenhängend ist.

- $(X, \mathcal{T})$ ist nun wegen Satz 21 auch zusammenhängend.

□

Bemerkung 27. Die Eigenschaften hyper- und ultrazusammenhängend sind, auch wenn aus beiden zusammenhängend folgt, unabhängig voneinander. Es gibt topolgische Räume die sowohl hyper- als auch ultrazusammenhängend sind, aber auch solche die jeweils nur eine der beiden Eigenschaften haben oder gar keine der beiden Eigenschaften haben.

2.5 Lokal zusammenhängend

Definition 28. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt lokal zusammenhängend, wenn er eine Basis bestehend aus zusammenhängenden Mengen hat.

Beispiel 29. $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ mit den offenen Intervallen als Basis ist, da Intervalle zusammenhängend sind, sicher lokal zusammenhängend. $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ ist auch zusammenhängend.

Bemerkung 30. Die Eigenschaft eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$ lokal zusammenhängend zu sein, ist unabhängig von den Eigenschaften zusammenhängend, wegzusammenhängend oder gar bogenzusammenhängend zu sein. Es gibt topologische Räume die zusammenhängend, wegzusammenhängend oder bogenzusammenhängend sind, aber nicht lokal zusammenhängend. Zusätzlich ist auch ultrazusammenhängend von lokal zusammenhängend unabhängig. Für einen hyperzusammenhängenden topologischen Raum kann jedoch eine Aussage gemacht werden.

Satz 31. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein hyperzusammenhängender topologischer Raum, dann folgt, dass $(X, \mathcal{T})$ auch lokal zusammenhängend ist.

Beweis. Es kann sogar noch mehr gezeigt werden, nämlich, dass für $(X, \mathcal{T})$ hyperzusammenhängend, dann schon jedes $O \in \mathcal{T}$ zusammenhängend sein muss. Wähle dazu ein beliebiges $O \in \mathcal{T}$. Angenommen O wäre nicht zusammenhängend, dann folgt aus Definition 2 die Existenz von zwei Menge $U, V \in \mathcal{T}$ mit

$$\underbrace{(U \cap O)}_{\in \mathcal{T}, \neq \emptyset} \cap \underbrace{(V \cap O)}_{\in \mathcal{T}, \neq \emptyset} = \emptyset \tag{31}$$

Das widerspricht aber der Eigenschaft von $(X, \mathcal{T})$ hyperzusammenhängend zu sein. Somit muss $O \in \mathcal{T}$ zusammenhängend sein und da O beliebig war folgt die Gültigkeit des Satzes. □

2.6 Zusammenfassung

Die Inklusionen aus den Sätzen 21, 25, 31und 26 lassen sich nun für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ in der folgenden Skizze zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{bogenzusammenhängend} & \Longrightarrow & \text{wegzusammenhängend} & \Longrightarrow & \text{zusammenhängend} \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 & & \text{ultrazusammenhängend} & & \text{hyperzusammenhängend} \\
 & & & & \Downarrow \\
 & & & & \text{lokal zusammenhängend}
\end{array}$$

3 Einige Beispiele spezieller Topologischer Räume

In der Zusammenfassung in 2.6 sind alle Implikationen verzeichnet, wie sie für die Begriffe aus dem theoretischen Teil für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gelten. Im Allgemeinen gelten keinerlei Umkehrungen dieser Impliktionen. Für einige spziellen Implikationen soll dies nun anhand von Beispielen verdeutlicht werden. Diese Räume stammen alle aus [STE].

3.1 The Deleted Integer Topology

Mit diesem Beispiel soll gezeigt werden, dass aus lokalzusammenhängend nicht zusammenhängend folgen muss.

- Betrachte dazu den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, wobei $X := \mathcal{R} \setminus \mathbb{N}$ versehen mit der Spurtopologie der euklidischen Topologie, also $\mathcal{T} := \mathcal{E} \cap (\mathcal{R} \setminus \mathbb{N})$. Setze nun $U := (-\infty, 1)$ und $V := (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt $U \cap V = \emptyset$ mit $U, V \neq \emptyset$ und $U \cap V = X$; also ist $(X, \mathcal{T})$ nicht zusammenhängend.

- $(X, \mathcal{T})$ ist aber lokal zusammenhängend. Betrachte dazu für eine beliebige Menge $O \in \mathcal{T}$, $O \neq \emptyset$ ein beliebiges $x \in O$. Es existiert nun ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset O$ und zusätzlich $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Also gilt auch $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in \mathcal{T}$. Betrachte nun:

  $$f : ((x - \epsilon, x + \epsilon), \mathcal{E} \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)) \to ((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \mathcal{T}, (x - \epsilon, x + \epsilon)) : t \mapsto t + x \tag{32}$$

  Diese Abbildung ist stetig, da $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$. $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ ist als stetiges Bild einer Zusammenhängenden Menge zusammenhängend in $(X, \mathcal{T})$, Es gibt also eine Basis aus zusammenhängenden Mengen und damit ist $(X, \mathcal{T})$ lokal zusammenhängend.

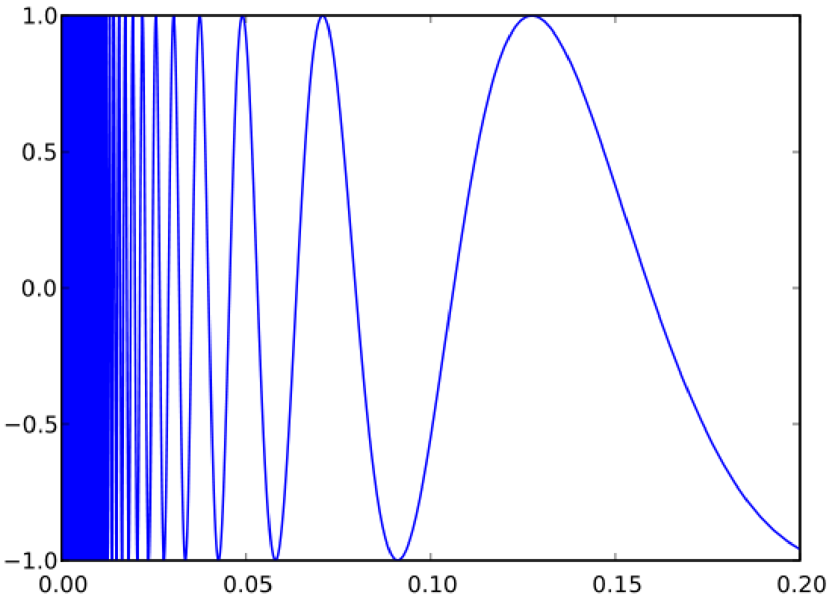

Abbildung 1: The Extended Topologist Sine Curve; Quelle: wikipedia.org

3.2 The Extended Topologist Sine Curve

In der “Deleted Integer Topology“ wurde gezeigt das für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ aus zusammenhängend nicht lokal zusammenhändend folgen muss. Es gilt aber auch nicht die Umkehrung, d.h aus zusammenhängend muss auch nicht lokal zusammenhängend folgen. Setze dazu:

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right) \right\} \quad \text{und} \quad S_1 := S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{33}$$

Es gilt $S \subset S_1 \subset \overline{S}$. und S ist als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend. Mit Lemma 9 ist auch S_1 zusammenhängend. Für die weiteren Überlegungen betrachte dann $(S_1, \mathcal{T})$ als zusammenhängenden topologischen Raum versehen mit der Spurtopologie, also $\mathcal{T} := \mathbb{E} \cap S_1$ (vgl. Lemma 5). Betrachte ferner auch noch die Abbildung 1.

- Es soll nun gezeigt werden, dass $(S_1, \mathcal{T})$ nicht lokalzusammenhängend ist. Betrachte dazu die Menge

$$\tilde{U} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \|_2 < \frac{1}{2} \right\} \cap S \in \mathcal{T}. \tag{34}$$

  Damit $(S_1, \mathcal{T})$ lokal zusammenhängend ist muss es eine Menge $\tilde{O} = O \cap S_1 \in \mathcal{T}$ geben, mit $O \in \mathbb{E}$ und $\tilde{O} \in \tilde{U}$ und zusätzlich $(0,0)^T \in \tilde{O}$.

- Setze nun

$$V_n := \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{(2n+2)\pi} \right) \times (-1, 1) \cap S_1 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{35}$$

  Nun gilt

$$V_n \in \mathcal{T} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \tilde{O} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n. \tag{36}$$

Es existiert nun ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $V_n \cap \tilde{O} \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$, denn sonst müsste es eine Teilfolge $(V_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $V_{n_k} \cap \tilde{O} = \emptyset \quad \forall n_k \in \mathbb{N}$ geben. Betrachte in diesem Fall die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $x_{n_k} = (c_{n_k}, 0) \in V_{n_k}$ für ein $c_{n_k} \in \mathbb{R}$ geeignet. Somit gilt aber nun

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

und zusätzlich $V_{n_k} \cap S_1 = \emptyset$, was aber einen Widerspruch darstellt. Es muss also ein solches $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geben.

- Beobachte nun, dass

$$\tilde{O} \cap \bigcup_{n=0}^{n_0} V_n \neq \emptyset, \quad \tilde{O} \cap \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} V_n \neq \emptyset, \tag{38}$$

$$\tilde{O} = \left(\tilde{O} \cap \bigcup_{n=0}^{n_0} V_n\right) \cap \left(\tilde{O} \cap \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} V_n\right) = \emptyset, \tag{39}$$

und

$$\tilde{O} = \left(\tilde{O} \cap \bigcup_{n=0}^{n_0} V_n\right) \cup \left(\tilde{O} \cap \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} V_n\right) = \tilde{O} \tag{40}$$

gilt.

Die Menge $\tilde{O}$ kann also als Vereinigung zweier nichtleerer offener Mengen aus $\mathcal{T}$ dargestellt werden und ist somit nicht zusammenhängend. Der Punkt $(0,0)^T \in S_1$ verfügt also über keine Umgebungsbasis bzgl. $\mathcal{T}$ zusammenhängender Mengen. Daher ist $(S_1, \mathcal{T})$ nicht lokal zusammenhängend.

Bemerkung 32. Die beiden vorangegangenen Beispiele zeigen in der Tat, dass die beiden Eigenschaften lokal zusammenhängend und zusammenhängend völlig getrennt voneinander auftreten können. Insbesondere ist das "lokal" in lokal zusammenhängend keineswegs als die "topologisch lokale" Aussage des Begriffs "Zusammenhang" zu verstehen.

Das Beispiel der "Extended Topologist's Sine Curve" eignet sich auch dazu zu zeigen, dass aus aus zusammenhängend nicht wegzusammenhängend folgen muss, doch dazu noch das folgende Lemma.

Lemma 33. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und lokal zusammenhängend und $(Y, \mathcal{O})$ Hausdorff. Es existiere weiters eine stetige und surjektive Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$, dann ist $(Y, \mathcal{O})$ lokal zusammenhängend.

Beweis. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Zeige nun dass $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist. Aus der Abgeschlossenheit von A, folgt mit der Kompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ das A kompakt ist. Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist auch $f(A)$ kompakt. Da $(Y, \mathcal{O})$ auch Hausdorff ist, ist $f(A)$ abgeschlossen. Aus der Surjektivität von f folgt nun aber auch $f(A)^c = f(A^c)$. f ist also offen. Für eine beliebige Menge $V \in (X, \mathcal{T})$ folgt nun aus der Stetigkeit die Existenz von $U \in \mathcal{T}$ mit $f(U) \subset V$, aber auch $f(U) \in \mathcal{O}$, denn f ist offen. Da $(X, \mathcal{T})$ lokal zusammenhändend ist kann man O.e.d.A O zusammenhängend wählen. Dann ist $f(U)$ auch zusammenhängend. Da $V \in \mathcal{O}$ beliebig war, ist auch $(Y, \mathcal{O})$ lokal zusammenhängend. $\square$

- Mit diesem Lemma soll nun gezeigt werden, dass $(S_1, \mathcal{T})$ auch nicht wegzusammenhängend ist. Angenommen das Gegenteil wäre der Fall. Betrachte nun die beiden Punkte $a = (0,0)^T$ und $b = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)^T$. Damit $(S_1, \mathcal{T})$ wegzusammenhängend ist, muss es nun ein stetiges $f : [0,1] \to S_1$ geben mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$. Es ist klar, dass wegen der Stetigkeit ein solches f surjektiv sein muss. $(S_1, \mathcal{T})$ ist Hausdorff denn, $\mathcal{T}$ ist Spurtopologie einer Hausdorffschen Topologie. $([0,1], \mathcal{E} \cap [0,1])$ ist aber kompakt. Mit Lemma 33 ist nun aber $(S_1, \mathcal{T})$ aber lokal zusammenhängend. Das ist aber lt. oben nicht richtig. Somit kann es kein solches f geben und $(S_1, \mathcal{T})$ ist nicht wegzusammenhängend.

Bemerkung 34.

- In der Notation von Definition 15 haben wir hier also die beiden Wegkomponenten $\{(0,0)^T\}$ und $S_1 \setminus \{(0,0)^T\}$, aber nur eine Zusammenhangskomponente im Sinn von Definition 12.
- Der vorliegende Raum ist damit auch nicht hyperzusammenhängend, denn sonst wäre er lt. Lemma 31 lokal zusammenhängend.

3.3 Die verkleinerte euklidische Topologie

Betrachte die Menge $X := [-1,1]$ und versehe sie mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \{O \in \mathcal{E} \cap X : -\frac{1}{2} \notin O, \frac{1}{2} \in O\} \cup X \cup \emptyset \tag{41}$$

wobei $\mathcal{E}$ die euklidische Topolgie bezeichnet. Es ist klar, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist und dass sicher $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$ gilt.

- Seien nun $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ und gelte $O_1, O_2 \neq \emptyset$, dann gilt $\left\{\frac{1}{2}\right\} \subset O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Da diese beiden Mengen beliebig waren, muss $(X, \mathcal{T})$ hyperzusammenhängend sein. Aus Satz 31 folgt auch, dass $(X, \mathcal{T})$ lokal zusammenhängend ist. Satz 25 impliziert, dass $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend ist.
- $(X, \mathcal{T})$ ist auch ultrazusammenhängend, denn für abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ mit $A, B \neq \emptyset$ folgt schon, dass $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \subset A \cap B \neq \emptyset$; also ist $(X, \mathcal{T})$ ultrazusammenhängend.
- $(X, \mathcal{T})$ist auch bogenzusammenhängend. Betrachte dazu für $x, y \in X$ eine injektive, stetige Abbildung

$$f : ([0,1], \mathcal{E} \cap [0,1]) \to (X, \mathcal{E} \cap X) \tag{42}$$

  mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ (z.B.: affine Abbildung). Wegen $\mathcal{T} \subset \mathcal{E} \cap [-1,1]$ ist aber f auch stetig auf $(X, \mathcal{T})$ und damit ist $(X, \mathcal{T})$ auch bogenzusammenhängend. Sowohl aus Satz 26 als auch aus Satz 21 folgt weiters, dass $(X, \mathcal{T})$ wegzusammenhängend ist.
- Insgesamt vereint $(X, \mathcal{T})$ also alle Eigenschaften des theoretischen Teils in sich.

3.4 Divisor Topology

Betrachte die Menge $X := \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$U_n := \{x \in X : x | n\} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \tag{43}$$

und

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\text{ini}}\left(\{U_n : n \in \mathbb{N}\}\right) \tag{44}$$

die initiale Topologie des Mengensystems aller Vielfachen für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dieser Raum ist wegzusammenhängend aber nicht bogenzusammenhängend. Ähnlich wie das vorherige Beispiel, vereint auch dieser Raum viele der Eigenschaften aus dem theoretischen Teil in sich.

- Es gilt nun $\forall x \in \mathbb{N}$:

  $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{nx\} \subset \overline{\{x\}}, \tag{45}$$

  denn für eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ mit $x \in A$ folgt natürlich, dass A^c offen ist, und dass $x \notin A^c$. Nun ist auch $nx \notin A^c \ \forall \in \mathbb{N}$, denn wenn nicht, dann gäbe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

  $$n_0 x \in A^c = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n} U_{n_i k} \tag{46}$$

  also existiert ein $i_0 \in I$ mit

  $$n_0 x \in A^c = \bigcap_{k=1}^{n} U_{n_{i_0} k} \tag{47}$$

  und somit gilt

  $$n_0 x \in A^c = U_{n_{i_0} k} \quad \forall k \in \{1, \dots n\} \tag{48}$$

  und da ja auch $x | n_0 x$ gilt ist somit

  $$x \in A^c = U_{n_{i_0} k} \quad \forall k \in \{1, \dots n\}. \tag{49}$$

  Insgesamt gilt nun $x \in A^c$, was aber ein Widerspruch ist. Also muss obige Annahme richtig sein.

- Für abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ mit $A, B \neq \emptyset$ und $x \in A$ und $y \in B$ gilt also:

  $$\emptyset \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{nxy\} \subset \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \subset A \cap B \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{50}$$

  Also ist $(X, \mathcal{T})$ ultrazusammenhängend und lt. Satz 26 auch wegzusammenhängend wegen Satz 21 auch zusammenhängend.

- $(X, \mathcal{T})$ ist sicher nicht bogenzusammenhängend, da X abzählbar ist. (vgl. Definition 20)

- $(X, \mathcal{T})$ ist auch hyperzusammenhängend. Da für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

  $$U_{n_1} \cap U_{n_2} \supset \{x \in X : x | n_1 n_2\} = U_{n_1 n_2} \tag{51}$$

  gilt, ist das Mengensystem $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der initialen Topologie. Seien weiters $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ beliebige offene Mengen mit $O_1, O_2 \neq \emptyset$. Es folgt die Existenz von $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $O_1 \supset U_{n_1}$ und $O_2 \supset U_{n_2}$. Nun gilt

  $$O_1 \cap O_2 \supset U_{n_1} \cap U_{n_2} \supset \{x \in X : x | n_1 n_2\} = U_{n_1 n_2} \neq \emptyset \tag{52}$$

  und damit folgt die Richtigkeit der Aussage.

- Mit Satz 31 ist $(X, \mathcal{T})$ auch lokal zusammenhängend.

Literatur

[KAL] M. KALTENBÄCK, Analysis 2. Vorlesungsskritpum, TU Wien; 2010

[STE] L. A. STEEN, J.A SEEBACH, Counterexamples in Topology, Springer, New York, 1970

[WIKI] http://en.wikipedia.org/wiki/Topologist%27s_sine_curve; Zugriff 9.Dezember 2011