Generische Paare orthogonaler Projektionen auf Hilberträumen

Anton Suppersberger

Wien, 20. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Eigenschaften von Paaren von Projektionen sind schon seit Langem Gegenstand intensiver wissenschaftlicher Untersuchungen. Siehe etwa [2, 3, 4, 5] Wir betrachten in dieser Seminararbeit sogenannte generische Paare und zeigen, dass solche Paare bereits durch eine positive Kontraktion, die im Bild von P (oder Q) operiert, festgelegt sind.

2 Begriffsbildungen

Definition 2.1. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ ein inneres Produkt auf X. Das Paar $(X, \langle .,. \rangle)$ heißt ein Prähilbertraum.*

Definition 2.2. *Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Prähilbertraum, der in der Norm $\|x\| := \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$ vollständig ist.*

Definition 2.3. *Sei X ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt Projektion falls $P^2 = P$ gilt[1].*

[1] Operatoren mit dieser Eigenschaft heißen *idempotent*

Definition 2.4. *Sei X ein Prähilbertraum. Eine Projektion P heißt orthogonale Projektion falls*

$$ran(P) \perp ker(P)$$

gilt.

Definition 2.5. *Sei X ein Vektorraum. Sei $T : X \to X$ linear und beschränkt, I der identische Operator auf X und $\lambda \in \mathbb{C}$. Falls*

$$ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

so heißt λ Eigenwert von T, $ker(T - \lambda I)$ Eigenraum zu λ und alle $x \in ker(T - \lambda I) \backslash \{0\}$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Definition 2.6. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und (P, Q) ein Paar orthogonaler Projektionen auf $\mathcal{H}$. (P, Q) heißt generisch, wenn P und Q keine gemeinsamen Eigenvektoren haben.*

Definition 2.7. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ normierte Räume. Dann bezeichnen wir den Raum der linearen und beschränkten Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

3 Generische Paare orthogonaler Projektionen

Lemma 3.1. *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und sei $P : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine Projektion. Dann hat P nur die Eigenwerte 0 und 1.*

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von P mit zugehörigem Eigenvektor x. Dann gilt $P(x) = \lambda x$. Auf diese Gleichung wenden wir wiederum P an und erhalten: $\lambda^2 x = P^2(x) = P(x) = \lambda x$. Wegen $x \neq 0$, muss $\lambda^2 = \lambda$ gelten. Die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind 0 und 1. □

3.1 Beispiel generisches Paar

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und (P, Q) ein Paar orthogonaler Projektionen auf $\mathcal{H}$. Wir betrachten folgende Unterräume von $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_{0,0} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0, Qf = 0\}$$

$$\mathcal{H}_{1,0} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = f, Qf = 0\}$$

$$\mathcal{H}_{0,1} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0, Qf = f\}$$

$$\mathcal{H}_{1,1} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = f, Qf = f\}$$

und sei $\mathcal{H}_g$ das orthogonale Komplement der direkten Summe dieser Unterräume. Somit enthalten diese Unterräume alle gemeinsamen Eigenvektoren von P und Q (siehe Lemma 3.1). Daraus folgt, dass die Einschränkung von P und Q auf $\mathcal{H}_g$ ein generisches Paar von Projektionen ist.
Weil die Räume $\mathcal{H}_{m,n}(m, n = 0, 1)$ alle invariant unter P und Q sind und weil P und Q selbstadjungiert sind, ist auch $\mathcal{H}_g$ unter P und Q invariant.

3.2 Polarzerlegung

Definition 3.2. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Falls $(Tx, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt, so nennen wir T einen positiven Operator und schreiben $T \geq 0$.*

Satz 3.3. *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \leq T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann existiert genau ein positiver Operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $S^2 = T$. Wir schreiben $S := T^{\frac{1}{2}}$ und nennen $T^{\frac{1}{2}}$ die Wurzel von T.*

Beweis. Siehe Satz 2.5.2 (i) in [1]. □

Definition 3.4. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. T heißt eine partielle Isometrie, wenn es einen Unterraum $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ gibt, sodass*

$$T|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$$

isometrisch und

$$T|_{\mathcal{X}^\perp} = 0$$

ist.

Definition 3.5. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Sei $\mathcal{K} = \overline{ran(T)} \oplus ker(T^*)$ eine orthogonale Zerlegung. Die orthogonale Projektion*

$$P_T = P_{\overline{ran(T)}} : \mathcal{K} \to \overline{ran(T)}$$

heißt die Bildprojektion von T.

Satz 3.6. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dann existiert genau ein positiver Operator $|T|$ aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und eine partielle Isometrie $V_T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sodass gilt:*

$$T = V_T|T| \quad V_T^* V_T = P_{|T|}$$

Dabei ist $P_{|T|}$ die Bildprojektion von |T|. Außerdem gilt $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$

Beweis. Siehe Satz 2.5.13 (i) und (ii) in [1]. □

Bemerkung 3.7. *Es gilt $ker(T) = ker(|T|)$*

Lemma 3.8. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und sei $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T. Falls T selbstadjungiert ist, dann ist auch V_T selbstadjungiert und V_T vertauscht mit T und mit |T|.*

Beweis.

(a) Wegen Satz 2.5.13 (iv) in [1] gilt für die Polarzerlegung von T^*, dass $T^* = V_T^*|T^*|$. Da T selbstadjungiert ist, gilt also $T = V_T^*|T|$. Wegen der Eindeutigkeit der Polarzerlegung folgt $V_T = V_T^*$.

(b)

$$V_T|T| = (V_T|T|)^* = |T|^* V_T^* = |T| V_T$$
$$V_T T = V_T V_T |T| = V_T |T| V_T = T V_T$$

□

Lemma 3.9. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und sei $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T. Wenn T injektiv ist und $ran(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, dann ist V_T unitär.*

Beweis. siehe Satz 2.5.14 (i) in [1]. □

Lemma 3.10. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und sei $T = V_T|T|$ die Polarzerlegung von T. Falls ker(|T|) = {0} und T selbstadjungiert ist, dann ist V_T unitär.*

Beweis. Wegen $ker(T) = ker(|T|) = \{0\}$ ist T injektiv. Wegen

$$\{0\} = ker(T) = ker(T^*) = ran(T)^\perp$$

ist $ran(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Daher gilt wegen Lemma 3.9, dass V_T unitär ist. □

3.3 Generische Paare

Proposition 3.11. *Sei (E, F) ein Paar von orthogonalen Projektionen in $\mathcal{H}$.*

(a) Sei $f \in \mathcal{H}$ sodass $EFf = f$. Dann gilt $Ef = f$ und Ff = f.

(b) Sei (E, F) ein generisches Paar von Projektionen, dann folgt aus $EFf = f$, dass $f = 0$.

(c) Sei (E, F) ein generisches Paar von Projektionen, dann folgt aus $Fg = \alpha Eg$ und $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, dass g = 0 ist.

Beweis.

(a) Ef = f gilt wegen

$$Ef = EEFf = E^2Ff = EFf = f$$

Sei $Ff \neq f$. Wegen $\|F\| \leq 1$ ist $\|Ff\| < \|f\|$. Daraus folgt, wegen $\|E\| \leq 1$, der Widerspruch:

$$\|f\| = \|EFf\| \leq \|Ff\| < \|f\|$$

(b) Mit der Voraussetzung $EFf = f$ folgt aus (a) $Ef = f$ und $Ff = f$. Damit hätten E und F einen gemeinsamen Eigenvektor f zum Eigenwert 1. Da laut Voraussetzung (E, F) ein generisches Paar von Projektionen ist, muss $f = 0$ sein, damit E und F keine gemeinsamen Eigenvektoren haben.

(c) Sei $h \in \mathcal{H}$ mit $Fg = h = \alpha Eg$. Das bedeutet $h \in ran(F) \cap ran(E)$ also $Fh = h$ und $Eh = h$. Da (E, F) ein generisches Paar ist und somit keine gemeinsamen Eigenvektoren hat, gilt $h = 0$. Also $Fg = \alpha Eg = \{0\}$. Das bedeutet $g \in ker(F) \cap ker(E)$, also $Fg = 0$ und $Eg = 0$. Auch hier wenden wir das Argument an, dass E und F keine gemeinsamen Eigenvektoren haben dürfen, womit $g = 0$ gilt.

$\square$

Definition 3.12. *Sei (P, Q) ein Paar von orthogonalen Projektionen in $\mathcal{H}$. Dann definieren wir:*

$$P^\perp = I - P$$

$$Q^\perp = I - Q$$

$$A = P - Q$$

$$B = I - P - Q = P^\perp - Q$$

Bemerkung 3.13. *Alle diese Operatoren sind selbstadjungiert.*

Lemma 3.14.

$$A^2 + B^2 = I$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (P - Q)^2 + (I - P - Q)^2 \\ &= P^2 - PQ - QP + Q^2 + I^2 - P - Q - P + P^2 + PQ - Q + QP + Q^2 \\ &= I \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 3.15.

$$AB + BA = 0$$

Beweis.

$$\begin{aligned} AB &= (P - Q)(I - P - Q) \\ &= P(I - P - Q) - Q(I - P - Q) \\ &= P - P^2 - PQ - Q + QP + Q^2 \\ &= QP - PQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -BA &= -((I - P - Q)(P - Q)) \\ &= -((I - P - Q)P - (I - P - Q)Q) \\ &= -(P - P^2 - QP - (Q - PQ + Q^2)) \\ &= -(-QP + PQ) \\ &= QP - PQ \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 3.16.
$$PQ = (I + A)Q$$

Beweis.
$$(I + A)Q = Q + PQ - Q^2 = PQ$$

□

Lemma 3.17.
$$QP = (I - A)P$$

Beweis.
$$(I - A)P = P - P^2 + QP = QP$$

□

Lemma 3.18.
$$PA^2 = A^2P = PQ^\perp P$$

Beweis.
$$PA^2 = P(P - Q)^2 = P^2 - P^2Q - PQP + PQ = P(I - Q)P = PQ^\perp P$$
$$A^2P = (P - Q)P = P^2 - PQP - QP^2 + QP = P(I - Q)P = PQ^\perp P$$

□

Lemma 3.19.
$$PB^2 = B^2P = PQP$$

Beweis.
$$\begin{aligned} PB^2 &= P(I - P - Q)^2 \\ &= P(I^2 - P - Q - P + P^2 + PQ - Q + QP + Q^2) \\ &= P - P^2 - PQ + PQ + PQP \\ &= PQP \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} B^2P &= (I - P - Q)^2P \\ &= (I^2 - P - Q - P + P^2 + PQ - Q + QP + Q^2)P \\ &= P - P^2 - QP + PQP + QP \\ &= PQP \end{aligned}$$

□

Lemma 3.20.
$$QA^2 = A^2Q = QP^\perp Q$$

Beweis.

$$QA^2 = Q(P-Q)^2 = QP - QPQ - QP + Q = Q(I-P)Q = QP^{\perp}Q$$
$$A^2Q = (P-Q)^2Q = PQ - PQ - QPQ + Q = Q(I-P)Q = QP^{\perp}Q$$

□

Lemma 3.21.
$$QB^2 = B^2Q = QPQ$$

Beweis.
$$\begin{aligned} QB^2 &= Q(I^2 - P - Q - P + P^2 + PQ - Q + QP + Q^2) \\ &= Q - QP - Q + QPQ + QP \\ &= QPQ \\ B^2Q &= (I^2 - P - Q - P + P^2 + PQ - Q + QP + Q^2)Q \\ &= Q - PQ - Q + QPQ + PQ \\ &= QPQ \end{aligned}$$

□

Lemma 3.22. *Sei (P,Q) ein generisches Paar orthogonaler Projektionen. Dann sind auch $(P,Q^{\perp}),(P^{\perp},Q),(P^{\perp},Q^{\perp})$ generische Paare orthogonaler Projektionen .*

Beweis. Wir zeigen, dass $(P,Q^{\perp})$ ein generisches Paar ist. Der Beweis für die anderen Paare funktioniert analog.
Seien $\mathcal{H}_{m,n}$ $(m,n=0,1)$ die Unterräume von $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}_{m,n} \coloneqq \{f \in \mathcal{H} : Pf = mf,\ Q^{\perp}f = nf\}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{H}_{m,n} = \{0\}$ $(m,n=0,1)$ gilt:

$$\{f \in \mathcal{H} : Pf = 0,\ Q^{\perp}f = 0\} = \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0,\ Qf = f\}$$
$$\{f \in \mathcal{H} : Pf = 0,\ Q^{\perp}f = f\} = \{f \in \mathcal{H} : Pf = 0,\ Qf = 0\}$$
$$\{f \in \mathcal{H} : Pf = f,\ Q^{\perp}f = 0\} = \{f \in \mathcal{H} : Pf = f,\ Qf = f\}$$
$$\{f \in \mathcal{H} : Pf = f,\ Q^{\perp}f = f\} = \{f \in \mathcal{H} : Pf = f,\ Qf = 0\}$$

Die Mengen auf der rechten Seite sind $\{0\}$, da (P,Q) ein generisches Paar ist und somit keine gemeinsamen Eigenvektoren hat. □

Lemma 3.23. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A = P - Q$. Dann ist $ran(P)$ invariant unter A^2.*

Beweis. Nach Lemma 3.18 gilt $PA^2 = A^2P$. Das bedeutet, dass $ran(A^2|_{ran(P)}) = ran(PA^2)$ ist. Somit bildet $A^2|_{ran(P)}$ nach $ran(P)$ ab. □

Definition 3.24. *Ein Vektorraum $\mathcal{V}$ heißt separabel, wenn er eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge enthält.*

Lemma 3.25. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt. Dann ist $ran(A)$ separabel.*

Beweis. siehe Satz 3.7 in [6] $\square$

Proposition 3.26. *Sei (P, Q) ein Paar von generischen Projektionen.*

(a)

$$ker(A) = ker(|A|) = ker(B) = ker(|B|) = ker(A \pm I) = ker(B \pm I) = \{0\}$$

(b) Die Einschränkung von Q auf ran(P) ist injektiv. $ran(Q|_{ran(P)})$ ist dicht in ran(Q).

(c) Wenn A kompakt ist, dann ist $\mathcal{H}$ separabel.

Beweis.

(a) Wegen Definition 3.12 gilt

$$f \in ker(A) \Leftrightarrow (P - Q)f = 0 \Leftrightarrow Pf = Qf$$

Da (P, Q) ein generisches Paar ist, gilt wegen Proposition 3.11 (c), dass $f = 0$ ist.

$$g \in ker(A + I) \Leftrightarrow (P + I - Q)g = 0 \Leftrightarrow Pg = -Q^{\perp}g$$

Da $(P, Q^{\perp})$ ein generisches Paar ist, gilt wegen Proposition 3.11 (c), dass $g = 0$ ist.

$$h \in ker(A - I) \Leftrightarrow (P - Q - I)h = 0 \Leftrightarrow (-P^{\perp} - Q)h = 0 \Leftrightarrow P^{\perp}h = -Qh$$

Da $(P^{\perp}, Q)$ ein generisches Paar ist, gilt wegen Proposition 3.11 (c), dass $h = 0$ ist.

$$f \in ker(B) \Leftrightarrow (P^{\perp} - Q)f = 0 \Leftrightarrow P^{\perp}f = Qf$$

Da $(P^{\perp}, Q)$ ein generisches Paar ist, gilt wegen Proposition 3.11 (c), dass $f = 0$ ist.

$$h \in ker(B + I) \Leftrightarrow (P^{\perp} - Q + I)h = 0 \Leftrightarrow P^{\perp}h = -Q^{\perp}h$$

Da $(P^{\perp}, Q^{\perp})$ ein generisches Paar ist, gilt wegen Proposition 3.11 (c), dass $h = 0$ ist.

$$g \in ker(B - I) \Leftrightarrow (I - P - Q - I)g = 0 \Leftrightarrow (-P - Q)g = 0 \Leftrightarrow -Pg = Qg$$

Da (P, Q) ein generisches Paar ist, gilt wegen Proposition 3.11 (c), dass $g = 0$ ist. Wegen Bemerkung 3.7 folgt die Behauptung auch für $|A|$ und $|B|$.

(b) Wir zeigen die Injektivität, indem wir $ker(Q|_{ran(P)}) = \{0\}$ zeigen. Dazu betrachten wir ein $f \in ran(P)$ mit $f \in ker(Q)$. Dann gilt wegen Lemma 3.17 $f \in ker(A - I)$ und wegen (a) gilt deshalb $f = 0$.

Wegen Lemma 3.16 gilt für ein $f \in ran(Q)$ mit $f \in ker(P)$, dass $f \in ker(A + I)$ und mit (a), $f = 0$. Also ist $ker(P|_{ran(Q)}) = \{0\}$.

Wir adjungieren nun $P|_{ran(Q)}$ als Abbildung von $ran(Q)$ nach $\mathcal{H}$ und erhalten so QP als Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $ran(Q)$. Somit ist das orthogonale Komplement vom Bildbereich von QP der Nullraum und somit der Bildbereich von QP, (dieser stimmt mit $Q(ran(P)) = ran(Q|_{ran(P)})$ überein) dicht in $ran(Q)$.

(c) Wir zeigen, dass $\mathcal{H}$ separabel ist indem wir

$$\mathcal{H} = ran(P) \oplus ker(P) = ran(P) \oplus ran(I - P) = ran(P) \oplus ran(P^{\perp}) \tag{1}$$

berücksichtigen und zeigen, dass $ran(P)$ und $ran(P^{\perp})$ separabel sind.
Um zu zeigen, dass $ran(P)$ separabel ist, zeigen wir die Existenz einer höchstens abzählbaren, dichten Teilmenge von $ran(P)$. Dazu betrachten wir $ran(A^2|_{ran(P)})$.

Wegen Lemma 3.23 ist $ran(A^2|_{ran(P)})$ eine Teilmenge von $ran(P)$.
Weil A^2 kompakt ist, wenn A kompakt ist und wegen Lemma 3.25 schließen wir, dass $ran(A^2|_{ran(P)})$ separabel ist.
Mit (a) schließen wir auf:

$$\{0\} = ker(A^2|_{ran(P)}) = ran(P) \ominus ran(A^2|_{ran(P)})$$

womit $ran(A^2|_{ran(P)})$ dicht in $ran(P)$ ist.
Der Beweis für $ran(P^{\perp})$ funktioniert analog.

□

Lemma 3.27.

$$P = \frac{1}{2}(I + A - B)$$

Beweis.

$$2P = I + P - Q - I + P + Q$$

□

Lemma 3.28.

$$Q = \frac{1}{2}(I - A - B)$$

Beweis.

$$2Q = I - P + Q - I + P + Q$$

□

Lemma 3.29.

$$P^{\perp} = \frac{1}{2}(I - A + B)$$

Beweis.

$$2P^{\perp} = I - P + Q + I - P - Q = 2I - 2P$$

□

Lemma 3.30.

$$Q^{\perp} = \frac{1}{2}(I + A + B)$$

Beweis.

$$2Q^{\perp} = I + P - Q + I - P - Q = 2I - 2Q$$

□

Wegen $ker(A) = \{0\}$ und $ker(B) = \{0\}$ sind die Operatoren V_A und V_B, aus den Polarzerlegungen von A und B, selbstadjungiert und unitär. Wir setzten für die folgende Proposition $V = V_A V_B$.

Lemma 3.31. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $0 \leq T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sei $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, der mit T vertauscht, dann vertauscht R auch mit $T^{\frac{1}{2}}$.*

Beweis. siehe Satz 2.5.2 (ii) in [1] □

Proposition 3.32. *Sei (P, Q) ein generisches Paar.*

(a) V_A *und* V_B *vertauschen mit* $|A|$ *und mit* $|B|$.

(b) $V_A V_B + V_B V_A = 0$

(c) $V^* = V^{-1} = -V$

(d) $VP = P^{\perp} V$ *und* $VQ = Q^{\perp} V$

(e) $V_B P = Q V_B$ *und* $V_A P = Q^{\perp} V_A$

Beweis.

(a) Wegen Lemma 3.8 (b) vertauschen V_A und |A|.
Wegen Lemma 3.14 und weil A und B selbstadjungiert sind, gilt

$$|B|^2 = B^2 = I - A^2 = I - |A|^2$$

Wegen

$$(I - |A|^2)V_A = IV_A - |A|^2 V_A = V_A I - V_A |A|^2 = V_A(I - |A|^2)$$

und mit Lemma 3.31 vertauscht V_A auch mit |B|.
Man zeigt analog, dass V_B mit |A| und |B| vertauscht.

(b) Wegen Lemma 3.15 und (a) gilt

$$0 = AB + BA = |A||B|(V_A V_B + V_B V_A)$$

Wegen $ker(|A|) = ker(|B|) = \{0\}$ folgt die Behauptung.

(c) V ist als Produkt zweier unitärer Operatoren selbst unitär.
Da V_A und V_B selbstadjungiert sind, erhalten wir mit (b)

$$V^* = V_B^* V_A^* = V_B V_A = -V_A V_B = -V$$

(d) Aus (a) und (b) folgt

$$VA = V_A V_B V_A |A| = |A| V_A V_B V_A = A V_B V_A = -A V_A V_B = -AV \tag{2}$$

Analog erhält man VB = -BV. Wegen Lemma 3.27, 3.28, 3.29 und Lemma 3.30 folgt

$$VP = V\frac{1}{2}(I{+}A{-}B) = \frac{1}{2}(V{+}VA{-}VB) = \frac{1}{2}(V{-}AV{+}BV) = \frac{1}{2}(I{-}A{+}B)V = P^{\perp}V$$

und

$$VQ = V\frac{1}{2}(I{-}A{-}B) = \frac{1}{2}(V{-}VA{-}VB) = \frac{1}{2}(V{+}AV{+}BV) = \frac{1}{2}(I{+}A{+}B)V = Q^{\perp}V$$

(e) Zunächst zeigen wir $V_B A = -AV_B$. Dabei verwenden wir $V_A^2 = I$ und Lemma 3.8 (b), sowie das Zwischenergebnis (2) aus (d).

Aus $VA = -AV$ erhalten wir nach Multiplikation mit V_A von rechts $VAV_A = -AVV_A$. Wir wenden Lemma 3.8 (b) an und erhalten $VV_A A = -AVV_A$. Wegen $V = V_A V_B$ gilt $V_A V_B V_A A = -AV_A V_B V_A$ und daher mit (b) $V_B A = -AV_B$.

Nun erhalten wir mit Lemma 3.27 und mit Lemma 3.28

$$\begin{aligned} V_B P &= V_B \frac{1}{2}(I + A - B) = \frac{1}{2}(V_B + V_B A - V_B B) \\ &= \frac{1}{2}(V_B - AV_B - BV_B) = \frac{1}{2}(I - A - B)V_B = QV_B \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung beweist man analog.

□

Korollar 3.33. *$ran(P)$ und $ran(P^{\perp})$ sind isomorph.*

Beweis. Wir zeigen die Isomorphie von $ran(P)$ und $ran(P^{\perp})$ unter zu Hilfenahme von $VP = P^{\perp}V$, (vgl. Proposition 3.32 (d)). Dazu definieren wir die Abbildung $\tilde{V} : ran(P) \to ran(P^{\perp})$ mit $\tilde{V} := V|_{ran(P)}$ und zeigen, dass $\tilde{V}$ ein Isomorphismus ist.

(a) $\tilde{V}$ ist linear, da V linear ist

(b) $\tilde{V}$ ist injektiv, da V injektiv ist

(c) $VP = P^{\perp}V \Leftrightarrow P^{\perp} = VPV^{-1}$ also gilt $ran(P^{\perp}) = ran(V|_{ran(P)}) = ran(\tilde{V})$, womit $\tilde{V}$ surjektiv ist.

$\square$

Definition 3.34. *Wir setzen $\mathcal{K} = ran(P)$.*

Wegen Definition 3.34 ist die Einschränkung $\tilde{V}$ von V auf $\mathcal{K}$ eine Isometrie von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}^{\perp}$ und es gilt

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \tilde{V}\mathcal{K}$$

Mit dieser Zerlegung von $\mathcal{H}$ kann der Operator P als $P = I \oplus 0$ dargestellt werden. Der Operator Q kann als Blockoperatormatrix dargestellt werden:

$$Q = \begin{pmatrix} PQP & PQP^{\perp} \\ P^{\perp}QP & P^{\perp}QP^{\perp} \end{pmatrix}$$

Wir werden zeigen, dass diese Matrix, durch einen einzigen linearen Operator, der in $\mathcal{K}$ operiert, bestimmt werden kann.

Lemma 3.35.

(a) $A^2|_{\mathcal{K}}$ *operiert in* $\mathcal{K}$*.*

(b) $A^2|_{\mathcal{K}}$ *ist positiv und selbstadjungiert.*

(c) $\|A^2|_{\mathcal{K}}\| \leq 1$

Beweis.

(a) siehe Lemma 3.23

(b) A ist selbstadjungiert, somit auch A^2 und ihre Einschränkung auf $\mathcal{K}$.

(c) Wegen Lemma 3.14 gilt für jedes $x \in \mathcal{H}$

$$0 \leq (Ax, Ax) = (A^2x, x) = (Ix, x) - (B^2x, x) = (x, x) - (Bx, Bx)$$

also

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) \leq (x, x) = \|x\|^2 \text{ und daher } \|A\| \leq 1$$

$\square$

Definition 3.36. *Sei $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ die positive Quadratwurzel von $A^2|_{\mathcal{K}}$. Sei $C : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ die positive Quadratwurzel von $I - A^2|_{\mathcal{K}}$.*

Lemma 3.37. *$\mathcal{K}$ ist invariant unter $(A^2)^{\frac{1}{2}}$ und $(B^2)^{\frac{1}{2}}$*

Beweis. Wegen Lemma 3.31 und Lemma 3.18 gilt

$$P(A^2)^{\frac{1}{2}} = (A^2)^{\frac{1}{2}}P$$

Also ist mit derselben Argumentation wie im Beweis zu Lemma 3.23 $\mathcal{K}$ invariant unter $(A^2)^{\frac{1}{2}}$.
Unter zu Hilfenahme von Lemma 3.19 funktioniert der Beweis für die Invarianz unter $(B^2)^{\frac{1}{2}}$ analog. □

Korollar 3.38.

(a) S ist die Einschränkung von $|A|$ auf $\mathcal{K}$, daher $S = |A||_{\mathcal{K}}$

(b) C ist die Einschränkung von $|B|$ auf $\mathcal{K}$, daher $C = |B||_{\mathcal{K}}$

Beweis.

(a) $|A||_{\mathcal{K}}$ ist wegen der Definition von $|A|$ positiv. Wegen Lemma 3.37 ist $\mathcal{K}$ invariant unter $|A|$ und wegen A selbstadjungiert gilt

$$|A||_{\mathcal{K}}^2 = (A^2)^{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{K}}^2 = A^2|_{\mathcal{K}}$$

(b) Wegen $B^2|_{\mathcal{K}} = I - A^2|_{\mathcal{K}}$, funktioniert der Beweis analog wie für |A|.

□

Lemma 3.39.

(a) C und S kommutieren.

(b) $C \geq 0$, $S \geq 0$, $\|S\| \leq 1$ und $\|C\| \leq 1$

(c) $C^2 + S^2 = I$

(d) $ker(C) = ker(S) = \{0\}$

Beweis.

(a) Wegen Lemma 3.23 gilt:

$$C^2S^2 = (I - A^2|_{\mathcal{K}})A^2|_{\mathcal{K}} = A^2|_{\mathcal{K}}(I - A^2|_{\mathcal{K}}) = S^2C^2$$

und wegen Lemma 3.31 gilt $CS = SC$

(b) Wurde für S in Lemma 3.35 (c) gezeigt, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Wurzel einer selbstadjungierten Kontraktion wieder eine Kontraktion ist. Der Beweis für C funktioniert analog.

(c) $C^2 + S^2 = |B|_{\mathcal{K}}^2 + |A|_{\mathcal{K}}^2 = B_{\mathcal{K}}^2 + A_{\mathcal{K}}^2 = I$

(d) siehe Proposition 3.26

$\square$

Satz 3.40. *Sei (P, Q) ein generisches Paar von orthogonalen Projektionen im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $\mathcal{K} = ran(P)$ und seien $\tilde{V}, S$ und C wie in Definition 3.36 und Korollar 3.33. Dann gilt für $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$, dass die Projektionen P und Q durch Blockoperatormatrizen in folgender Weise dargestellt werden können:*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} C^2 & CS\tilde{V}^{-1} \\ \tilde{V}CS & \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Beweis. Aus Lemma 3.19 folgt:

$$PQP = PB^2 = PB^2P = P(I - A^2)P$$

Aus Proposition 3.32 (c) und (d) folgt:

$$P^\perp QP^\perp = VPV^{-1}VQ^\perp V^{-1}VPV^{-1} = VPQ^\perp PV^{-1} = VPA^2PV^{-1}$$

Interpretiert man diese Ergebnisse als Operatoren auf $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^\perp$, so gilt, weil P auf $ran(P)$ der identische Operator ist:

$$P(I - A^2)P = C^2 \quad VPA^2PV^{-1} = \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1}$$

Wegen Proposition 3.32 und Lemma 3.38, sowie unter zu Hilfenahme von $BA = PQ - QP$ und $V_BV_A = V^{-1}$ gilt

$$PQP^\perp = BAP^\perp = |B||A|V^{-1}P^\perp = |B|_\mathcal{K}|A|_\mathcal{K}\tilde{V}^{-1}P^\perp = CS\tilde{V}^{-1}P^\perp$$

und

$$P^\perp QP = -P^\perp BA = -P^\perp V^{-1}|B||A| = \tilde{V}|B|_\mathcal{K}|A|_\mathcal{K}P = \tilde{V}CSP.$$

$\square$

Bemerkung 3.41. *Identifiziert man $\mathcal{K}^\perp$ durch den Isomorphismus $\tilde{V}$ mit $\mathcal{K}$, also $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, so kann Q folgend dargestellt werden:*

$$Q = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}$$

Korollar 3.42. *Wenn (P, Q) ein generisches Paar von Projektionen ist, dann kann man die Potenzen von A und B einfach mittels Matrixmultiplikation ermitteln.*

$$A = \begin{pmatrix} S^2 & -CS\tilde{V}^{-1} \\ -\tilde{V}CS & -\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & \tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Wenn $p \geq 0$ gerade ist gilt:

$$A^p = \begin{pmatrix} S^p & 0 \\ 0 & \tilde{V}S^p\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}$$

Wenn $p \geq 0$ ungerade ist gilt:

$$A^p = \begin{pmatrix} S^{p+1} & -CS^p\tilde{V}^{-1} \\ -\tilde{V}CS^p & -\tilde{V}S^{p+1}\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}$$

Beweis. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion für p gerade (für p ungerade funktioniert der Beweis analog): Induktionsanfang ist in Gleichung (4) definiert. Für den Induktionsschritt sei Gleichung (3.42) gegeben. Wir zeigen für gerades $p \geq 0$:

$$A^{p-1}A = \begin{pmatrix} S^p & 0 \\ 0 & \tilde{V}S^p\tilde{V}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$S^pS + CS^{p-1}\tilde{V}^{-1}\tilde{V}CS = S^{p+2} + C^2S^p = S^p(S^2 + I - S^2) = S^p$$

$$-S^pCS\tilde{V}^{-1} + CS^{p-1}\tilde{V}^{-1}\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} = -S^{p+1}C\tilde{V}^{-1} + CS^{p+1}\tilde{V}^{-1} = 0$$

$$-\tilde{V}CS^{p-1}S^2 + \tilde{V}S^p\tilde{V}^{-1}\tilde{V}CS = -\tilde{V}CS^{p+1} + \tilde{V}CS^{p+1} = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}CS^{p-1}CS\tilde{V}^{-1} + \tilde{V}S^p\tilde{V}^{-1}\tilde{V}S^2\tilde{V}^{-1} = \tilde{V}C^2S^p\tilde{V}^{-1} + \tilde{V}S^{p+2}\tilde{V}^{-1} = \\ \tilde{V}(S^p - S^{p+2})\tilde{V}^{-1} + \tilde{V}S^{p+2}\tilde{V}^{-1} = \tilde{V}S^p\tilde{V}^{-1} \end{aligned}$$

□

Satz 3.43. *Sei (P, Q) ein Paar von orthogonalen Projektionen, die nicht notwendigerweise generisch sind. Dann folgt aus $\|P - Q\| < 1$, dass $ran(P)$ und $ran(Q)$ isomorph sind.*

Beweis. siehe §105 in [8] □

Literatur

[1] G. Wittstock, Lineare Operatoren auf dem Hilbertraum, $http://www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/lehre/WS02/hilbert/Skript02_07/Vorlesung.pdf$

[2] J. Avron, R. Seiler, B. Simon, The index of a pair of projections, *J. Funct. Anal.*,120:220-237

[3] C. Davis, Separation of two linear subspaces, *Acta. Sci. Math.*, 19:172-187()1958

[4] P. Halmos,Two subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144:381-389

[5] A. Lenard, The numerical range of a pair of projections, *J. Funct. Anal.*,10:410-423

[6] J. Weidemann, Lineare Operatoren in Hilberträumen1, Teubner Verlag, Auflage 2000

[7] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger, Skriptum Funktionalanalysis

[8] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Functional Analysis, Ungar, New York, 1965