Technische Universität Wien   SS 09

Seminararbeit

Funktionalanalysis

Kontraktionen im Kreinraum

von

Daniel Tovornik

Inhaltsverzeichnis

1 Räume mit indefinitem inneren Produkt - der Kreinraum

Definition 1.1 (*Inneres Produkt, innerer Produkt Raum*).

Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Raum. Ein *inneres Produkt* auf $\mathcal{L}$ ist eine Abbildung

$$[.,.] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{C}$$

so dass gilt

(i). $[x+y,z] = [x,z] + [y.z], \quad x,y,z \in \mathcal{L}.$

(ii). $[\alpha x, y] = \alpha[x,y], \quad x,y \in \mathcal{L}, \alpha \in \mathbb{C}$.

(iii). $[x,y] = \overline{[y,x]}, \quad x,y \in \mathcal{L}.$

Wenn $[.,.]$ ein inneres Produkt auf $\mathcal{L}$ ist, nennt man $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ einen *inneren Produkt Raum*.

Definition 1.2 .

Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein innerer Produkt Raum. Ein Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ heißt

(i). *negativ*, wenn $[f,f]_\mathcal{L} \leq 0, \quad f \in \mathcal{M}$,

(ii). *negativ definit*, wenn $[f,f]_\mathcal{L} < 0, \quad f \in \mathcal{M} \backslash \{0\}$.

Analog sind die Begriffe *positiv* und *positiv definit* zu verstehen.

Definition 1.3 (*Orthogonalzerlegung, Fundamentalzerlegung, Fundamentalsymmetrie*).

Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein innerer Produkt Raum. Ein Paar $\mathfrak{j} := (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ von linearen Unterräumen von $\mathcal{L}$ wird *Orthogonalzerlegung* von $\mathcal{L}$ genannt, wenn

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 [\dot{+}] \mathcal{L}_2,$$

d.h. $\mathcal{L}$ ist in zwei, bezüglich dem inneren Produkt $[.,.]$, zueinander orthogonale lineare Unterräume $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ disjunkt zerteilbar.

Weiters seien die Orthogonalprojektionen $P_\mathfrak{j}^1$ und $P_\mathfrak{j}^2$ definiert durch

$$\operatorname{ran} P_\mathfrak{j}^1 = \mathcal{L}_1,\ \ker P_\mathfrak{j}^1 = \mathcal{L}_2, \quad \operatorname{ran} P_\mathfrak{j}^2 = \mathcal{L}_2,\ \ker P_\mathfrak{j}^2 = \mathcal{L}_1.$$

Ein Paar $\mathcal{J} := (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ von linearen Unterräumen von $\mathcal{L}$ wird *Fundamentalzerlegung* von $\mathcal{L}$ genannt, wenn

(i). $\mathcal{L}_+$ ein positiv definiter und $\mathcal{L}_-$ ein negativ definiter Unterraum sind.

(ii). $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ [\dot{+}] \mathcal{L}_- [\dot{+}] \mathcal{L}^\circ$.

Weiters seien die Orthogonalprojektionen $P_{\mathcal{J}}^{+}$ und $P_{\mathcal{J}}^{-}$ definiert durch

$$\operatorname{ran} P_{\mathcal{J}}^{+} = \mathcal{L}_{+},\ \ker P_{\mathcal{J}}^{+} = \mathcal{L}_{-} + \mathcal{L}^{\circ}, \quad \operatorname{ran} P_{\mathcal{J}}^{-} = \mathcal{L}_{-},\ \ker P_{\mathcal{J}}^{-} = \mathcal{L}_{+} + \mathcal{L}^{\circ}.$$

Dann wird

$$J_{\mathcal{J}} := P_{\mathcal{J}}^{+} - P_{\mathcal{J}}^{-}$$

die *Fundamentalsymmetrie* zur Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}$ genannt, und durch

$$(x, y)_{\mathcal{J}} := [J_{\mathcal{J}} x, y]$$

ist ein positiv semidefinites inneres Produkt auf $\mathcal{L}$ erklärt.

Definition 1.4 (*Winkel-Operator*).

Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein innerer Produkt Raum und $\mathfrak{j} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ eine Orthogonalzerlegung. Wenn $\mathcal{M}$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}$ ist und $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}_1 = \{0\}$, dann wird der Winkel-Operator von $\mathcal{M}$ bezüglich $\mathfrak{j}$ definiert als

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{j}}(\mathcal{M}) : \begin{cases} P_{\mathfrak{j}}^{2}\mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{L}_1 \\ x & \mapsto & P_{\mathfrak{j}}^{1} \circ (P_{\mathfrak{j}}^{2}|_{\mathcal{M}})^{-1} x \end{cases}.$$

Definition 1.5 (*intrinsically vollständig*).

Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein innerer Produkt Raum. Ein positiv definiter Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ wird *intrinsically vollständig* genannt, wenn $\langle \mathcal{M}, [.,.]|_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \rangle$ ein Hilbertraum ist. Analog heißt ein negativ definiter Unterraum intrinsically vollständig, wenn $\langle \mathcal{M}, -[.,.]|_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \rangle$ ein Hilbertraum ist.

Definition 1.6 .

Sei $\mathcal{M}$ ein intrinsically vollständiger negativ definter Unterraum, dann ist mit $|\mathcal{M}|$ der Hilbertraum $\langle \mathcal{M}, -[.,.]|_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \rangle$ gemeint.

Definition 1.7 (*Kreinraum*).

Ein innerer Produkt Raum $\langle \mathcal{K}, [.,.] \rangle$ wird *Kreinraum* genannt, wenn $\mathcal{K}$ nicht degeneriert ist und es eine Fundamentalzerlegung $(\mathcal{K}_{+}, \mathcal{K}_{-})$ gibt, deren Komponenten $\mathcal{K}_{\pm}$ intrinsically vollständig sind.

Ist $\mathcal{K}$ nicht degeneriert und sind beide Komponenten $\mathcal{K}_{+}, \mathcal{K}_{-}$ intrinsically vollständig, so folgt, dass zu jeder Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}$, das innere Produkt $(.,.)_{\mathcal{J}}$ positiv definit auf $\mathcal{K}$ ist, und $\langle \mathcal{K}, (.,.)_{\mathcal{J}} \rangle$ ein Hilbertraum ist. Fundamentalzerlegungen sind i.a. nicht eindeutig, allerdings kann gezeigt werden, dass die von ihnen induzierte Topologie eindeutig ist. Alle topologischen Eigenschaften in einem Kreinraum, wie Abgeschlossenheit oder Stetigkeit werden bezüglich dieser eindeutigen Hilbertraum Topologie verstanden.

Definition 1.8 (*Pontryaginraum*).

Ein innerer Produkt Raum $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ wird *Pontryaginraum* genannt, wenn $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ ein Kreinraum ist und $\operatorname{ind}_- \langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle < \infty$, wobei

$$\operatorname{ind}_- \langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle := \sup\{\dim \mathcal{M} \,|\, \mathcal{M} \text{ ist negativ definiter Unterraum von } \mathcal{P}\}$$

der *negative Index* von $\mathcal{P}$ genannt wird.

Definition 1.9 .

Sei $\mathcal{K}$ ein Kreinraum. Ein Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{K}$ heißt

(i). *maximal negativ*, wenn $\mathcal{M}$ negativ ist und $\mathcal{M}$ keine echte Untermenge eines anderen negativen Unterraumes ist,

(ii). *gleichmäßig negativ*, wenn für eine (und somit für alle) Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}$ von $\mathcal{K}$ ein $\delta_{\mathcal{J}} > 0$ exisitert so dass

$$[f,f]_{\mathcal{K}} \leq -\delta_{\mathcal{J}} ||f||^2_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}}, \qquad f \in \mathcal{M},$$

(iii). *maximal gleichmäßig negativ*, wenn $\mathcal{M}$ maximal negativ und gleichmäßig negativ ist.

Analog sind die Begriffe *gleichmäßig positiv* und *maximal gleichmäßig positiv* zu verstehen. Maximal negative bzw. maximal positive Unterräume sind abgeschlossen.

Definition 1.10 .

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dann ist mit $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ die Kreinraumadjungierte gemeint. Die Hilbertraumadjungierte zu $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{J}_\mathcal{H}}, \mathcal{K}_{\mathcal{J}_\mathcal{K}})$ wird mit $T^\times \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}, \mathcal{H}_{\mathcal{J}_\mathcal{H}})$ bezeichnet. Es gilt

$$T^* = J_\mathcal{H} T^\times J_\mathcal{K}.$$

Definition 1.11 (*Kontraktion*).

Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Kreinräume. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ heißt Kontraktion falls

$$[Tf, Tf]_\mathcal{K} \leq [f,f]_\mathcal{H}, \qquad f \in \mathcal{H} \tag{1}$$

gilt, und Bikontraktion falls T und T^* Kontraktionen sind.

Bemerkung 1.12 .

Für einen Kreinraum $\mathcal{K}$ ist jede Fundamentalzerlegung auch Orthogonalzerlegung und somit können mit ihr Winkel-Operatoren definiert werden. Mit Hilfe des Winkel-Operators lassen sich Eigenschaften von Unterräumen durch seine Graphendarstellung charakterisieren.

Sei $\mathcal{K}$ ein Kreinraum und $\mathcal{M}$ ein negativer Unterraum von $\mathcal{K}$. Für eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J} = (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ kann $\mathcal{M}$ dargestellt werden als

$$\Gamma(K) = \left\{ \begin{pmatrix} Kg \\ g \end{pmatrix} : g \in \operatorname{dom} K \right\},$$

wobei $K := \mathfrak{a}_{\mathcal{J}}(\mathcal{M})$ der Winkel-Operator von $\mathcal{M}$ ist.

Sei $x \in \operatorname{dom} K$, $x \neq 0$ dann gilt:

$$0 \geq [x + Kx, x + Kx]_{\mathcal{K}} = [x, x]_{\mathcal{K}_-} + [Kx, Kx]_{\mathcal{K}_+} \Rightarrow -[x, x]_{\mathcal{K}_-} \geq [Kx, Kx]_{\mathcal{K}_+}$$

und somit ist K eine Hilbertraum-Kontraktion von $\operatorname{dom} K \subseteq |\mathcal{K}_-|$ nach $\operatorname{ran} K \subseteq \mathcal{K}_+$.
Jede Hilbertraum Kontraktion mit $\operatorname{dom} K \subseteq |\mathcal{K}_-|$ und $\operatorname{ran} K \subseteq \mathcal{K}_+$ ist der Winkel-Operator eines negativen Unterraums $\mathcal{M}$ von $\mathcal{K}$. Man kann zeigen:

(i). $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen, wenn $\operatorname{dom} K$ in $|\mathcal{K}_-|$ abgeschlossen ist.

(ii). $\mathcal{M}$ ist maximal negativ genau dann, wenn $\operatorname{dom} K = |\mathcal{K}_-|$.

2 Kontraktionen und Bikontraktionen

Satz 2.1 .

Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Kreinräume und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ eine Kontraktion. Die Normen sind bezüglich gewählter Fundamentalzerlegungen für $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ auf den entsprechenden Hilberträumen zu verstehen. Sei

$$\delta = \left[||T|| + \left(1 + ||T||^2\right)^{1/2} \right]^{-1}, \qquad \text{dann gilt:}$$

(i). für alle $f \in \mathcal{H}$ mit $[f, f]_{\mathcal{H}} \leq 0$ gilt $||Tf||_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}} \geq \delta ||f||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}$.

(ii). $\ker T$ ist ein abgeschlossener gleichmäßig positiver Unterraum von $\mathcal{H}$.

Beweis . Sei $J_{\mathcal{H}}$ die gewählte Fundamentalsymmetrie von $\mathcal{H}$. Da T eine Kontraktion ist und $(1 - T^*T)^* = 1 - T^*T$ gilt, folgt aus (1) dass $1 - T^*T \geq 0$ ist, und somit ist der Operator $C = J_{\mathcal{H}}(1 - T^*T)$ nicht negativ als Operator auf $\mathcal{H}_J$. Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} C^{\times} = (J_{\mathcal{H}}(1 - T^*T))^{\times} = (J_{\mathcal{H}}(1 - J_{\mathcal{H}} T^{\times} J_{\mathcal{K}} T))^{\times} &= (1 - T^{\times} J_{\mathcal{K}} T J_{\mathcal{H}}) J_{\mathcal{H}} = \\ &= J_{\mathcal{H}}(1 - J_{\mathcal{H}} T^{\times} J_{\mathcal{K}} T) = J_{\mathcal{H}}(1 - T^*T) = C \end{aligned}$$

so erkennt man, dass C selbstadjungiert ist in $\mathcal{H}_J$.
Somit gilt

$$||f||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} - ||T||\,||Tf||_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}} \leq ||(1 - T^*T)f||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = ||Cf||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}$$

da C selbstadjungiert und positiv ist, existiert die Wurzel und wir erhalten

$$||Cf||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = ||C^{1/2}C^{1/2}f|| \leq ||C^{1/2}|| \, (C^{1/2}f, C^{1/2}f)^{1/2}_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} \leq ||C||^{1/2}(Cf, f)^{1/2}_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} \leq \\ \leq \left(1 + ||T||^2\right)^{1/2} (Cf, f)^{1/2}_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}.$$

Wenn $[f, f]_{\mathcal{H}} \leq 0$ gilt weiters

$$(Cf, f)_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = [f, f]_{\mathcal{H}} - [Tf, Tf]_{\mathcal{K}} \leq -[Tf, Tf]_{\mathcal{K}} \leq ||Tf||^2_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}}.$$

Aus der Kombination dieser zwei Ungleichungen folgt nun

$$\begin{aligned} ||f||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} - ||T|| \, ||Tf||_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}} &\leq \left(1 + ||T||^2\right)^{1/2} ||Tf||_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}}, \\ ||f||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} &\leq \delta^{-1}||Tf||_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}} \end{aligned}$$

womit (i) gezeigt ist.
Ist $g \in \ker T$, dann gilt $Cg = J_{\mathcal{H}}(1 - T^*T)g = J_{\mathcal{H}}g$ und somit

$$\begin{aligned} ||g||^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = (Jg, Jg)_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} &= ||Cg||^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} \leq ||C|| \, (Cg, g)_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = ||C|| \, [g, g]_{\mathcal{H}}, \\ & [g, g]_{\mathcal{H}} \geq ||C||^{-1}||g||^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} \end{aligned}$$

woraus (ii) folgt. ■

Korollar 2.2 .

Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Kreinräume und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ eine Kontraktion. Dann gilt:

(i). T bildet jeden abgeschlossenen negativen Unterraum von $\mathcal{H}$ injektiv auf einen abgeschlossenen negativen Unterraum von $\mathcal{K}$ ab.

(ii). T bildet jeden abgeschlossenen gleichmäßig negativen Unterraum von $\mathcal{H}$ injektiv auf einen abgeschlossenen gleichmäßig negativen Unterraum von $\mathcal{K}$ ab.

Beweis . Sei $\mathcal{M}_1$ ein abgeschlossener negativer Unterraum von $\mathcal{H}$.
Da T stetig ist folgt, dass $T\mathcal{M}_1$ abgeschlossen ist und da T Kontraktion ist, gilt für alle $f \in \mathcal{H}: \; [f, f]_{\mathcal{H}} \geq [Tf, Tf]_{\mathcal{K}}$. Somit gilt für alle $f \in \mathcal{M}_1 : \; 0 \geq [f, f]_{\mathcal{H}} \geq [Tf, Tf]_{\mathcal{K}}$ womit $T\mathcal{M}_1$ auch negativ ist.
Aus Satz 2.1 (i) folgt nun für alle $f \in \mathcal{M}_1 : \; ||Tf||_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}} \geq \delta||f||_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}$, womit T injektiv nach $T\mathcal{M}_1$ abbildet. Somit ist (i) gezeigt.
Sei nun $\mathcal{M}_2$ ein gleichmäßig negativer Unterraum von $\mathcal{H}$. Somit exisitiert $\eta > 0$ mit

$$[f, f]_{\mathcal{H}} \leq -\eta||f||^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}, \quad f \in \mathcal{M}_2.$$

Es folgt

$$[Tf, Tf]_{\mathcal{K}} \leq [f, f]_{\mathcal{H}} \leq -\eta||f||^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} = -\eta||T^{-1}Tf||^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}} \leq -\eta||(T|_{\mathcal{M}_2})^{-1}||^2||Tf||^2_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}}, \quad f \in \mathcal{M}_2,$$

also ist $T\mathcal{M}_2$ gleichmäßig negativ. ■

Betrachten wir nun zwei Kreinräume $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ mit den Fundamentalzerlegungen $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$ und $(\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$. Sei $\mathcal{L} := \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ versehen mit dem inneren Produkt

$$\left[\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{L}} = -[f,f]_{\mathcal{H}} + [g,g]_{\mathcal{K}},$$

dann ist $\mathcal{L}$ ein Kreinraum mit Fundamentalzerlegung $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-) = (\mathcal{H}_- \oplus \mathcal{K}_+, \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{K}_-)$. Betrachtet man nun eine Kontraktion $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}$

$$\left[\begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{L}} = -[f,f]_{\mathcal{H}} + [Tf,Tf]_{\mathcal{K}} \leq 0,$$

d.h. der Graph

$$\Gamma(T) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} : f \in \mathcal{H} \right\}$$

von T ist ein negativer Unterraum von $\mathcal{L}$. Da T stetig ist, ist $\Gamma(T)$ auch abgeschlossen.

Definition 2.3 (*scattering-Operator*).

Mit dem *scattering-Operator* (Potapov-Ginzburg transform) von $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ bezeichnet man den Winkel-Operator S von $\Gamma(T)$ bezüglich der Fundamentalzerlegung $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-) = (\mathcal{H}_- \oplus \mathcal{K}_+, \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{K}_-)$. Es gilt somit

$$\Gamma(T) = \left\{ \begin{pmatrix} Su \\ u \end{pmatrix} : u \in \operatorname{dom} S \right\} \subset \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-.$$

Nach Konstruktion ist der scattering-Operator eine Hilbertraum Kontraktion mit abgeschlossenem $\operatorname{dom} S \subseteq |\mathcal{L}_-|$ und $\operatorname{ran} S \subseteq \mathcal{L}_+$.
Seien die Fundamentalsymmetrien und die Projektionen zu den gegebenen Fundamentalzerlegungen von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ gegeben durch $J_{\mathcal{H}}$, $J_{\mathcal{K}}$ und

$$P_\pm : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pm, \qquad Q_\pm : \mathcal{K} \to \mathcal{K}_\pm,$$

und man betrachte T angeschrieben in Matrixform

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-). \tag{2}$$

Weiters definere man die Operatoren

$$Q_+T + P_- = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{H}_-), \tag{3}$$

und

$$P_+ + Q_-T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{K}_-). \tag{4}$$

Satz 2.4 .

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ eine Kontraktion mit scattering-Operator S. Dann gilt $\operatorname{dom} S = \operatorname{ran}(P_+ + Q_-T)$ und

$$S = (Q_+T + P_-)(P_+ + Q_-T)^{-1}\big|_{\operatorname{dom} S}. \tag{5}$$

Beweis . Wir zeigen, dass $P_+ + Q_-T$ injektiv ist und abgeschlossenes Bild hat. Für $f \in \mathcal{H}_-$ gilt

$$[T_{22}f, T_{22}f]_{\mathcal{K}_-} = [Q_-Tf, Q_-Tf]_{\mathcal{K}} \le [Tf, Tf]_{\mathcal{K}} \le [f,f]_{\mathcal{H}} = [f,f]_{\mathcal{H}_-}.$$

und somit ist nach Korollar 2.2 T_{22} eine injektive Kontraktion von $\mathcal{H}_-$ nach $\mathcal{K}_-$ mit abgeschlossenem Bild. Betrachtet man nun (4) so erkennt man, dass somit auch $P_+ + Q_-T$ injektiv ist und abgeschlossenes Bild hat.
Betrachtet man nun für alle $f \in \mathcal{H}$ die Projektionen

$$P_{\mathcal{L}_-}\begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+f \\ Q_-T(P_+ + P_-)f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_+f \\ P_-f \end{pmatrix} = (P_+ + Q_-T)f$$

und

$$P_{\mathcal{L}_+}\begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_+T(P_+ + P_-)f \\ P_-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_+f \\ P_-f \end{pmatrix} = (Q_+T + P_-)f$$

so folgt aus Definiton 1.4 (Winkel-Operator) die Aussage (5). ∎

Für den Fall, dass $\operatorname{dom} S = |\mathcal{L}_-|$ gilt, erhalten wir aus (5) für S die Darstellung:

$$\begin{aligned} S = \quad & (Q_+T + P_-)(P_+ + Q_-T)^{-1} & = \\ & \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_{22}^{-1}T_{21} & T_{22}^{-1} \end{pmatrix} & = \\ & \begin{pmatrix} T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21} & T_{12}T_{22}^{-1} \\ -T_{22}^{-1}T_{21} & T_{22}^{-1} \end{pmatrix} & \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+ \oplus |\mathcal{K}_-|, \mathcal{K}_+ \oplus |\mathcal{H}_-|). \end{aligned} \tag{6}$$

Satz 2.5 .

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ eine Kontraktion mit scattering-Operator S. Dann ist äquivalent:

(i). T ist eine Bikontraktion.

(ii). T_{22} ist invertierbar.

(iii). $\operatorname{dom} S = |\mathcal{L}_-|$.

Ist T eine Bikontraktion so ist der scattering-Operator für T^* gleich $S^\times$.

Beweis . (i) ⇒ (ii): $T_{22} = Q_-TP_-\big|_{\mathcal{H}_-}$ ist ein injektiver Operator von $\mathcal{H}_-$ nach $\mathcal{K}_-$ mit $\operatorname{ran} T_{22}$ abgeschlossen (wie in Satz 2.4). Sei $f \in \mathcal{K}_-$ und $f \perp Q_-TP_-\mathcal{H}_-$. Da $P_-\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_-$ und $f \perp \mathcal{K}_+$ folgt

$$f \perp Q_-TP_-\mathcal{H}_- \Rightarrow f \perp T\mathcal{H}_- \Rightarrow T^*f \perp \mathcal{H}_- \Rightarrow T^*f \in \mathcal{H}_+.$$

T ist eine Bikontraktion und somit gilt

$$[T^* f, T^* f]_{\mathcal{H}} \geq 0 \geq [f, f]_{\mathcal{K}} \geq [T^* f, T^* f]_{\mathcal{H}}$$

und wir erhalten $f = 0$. Somit ist $\operatorname{ran} T_{22} = \mathcal{K}_-$ also T_{22} invertierbar.
(ii)$\Rightarrow$ (iii): Wenn T_{22} invertierbar ist, ist es nach (4) auch $P_+ + Q_- T$. Aus Satz 2.4 folgt somit $\operatorname{dom} S = \operatorname{ran}(P_+ + Q_- T) = |\mathcal{L}_-|$.
(iii)$\Rightarrow$ (i): Durch Matrixmultiplikation erkennt man mit

$$\begin{aligned} P_+ T^* + Q_- &= \begin{pmatrix} T_{11}^\times & -T_{21}^\times \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_+ \oplus |\mathcal{K}_-|, \mathcal{H}_+ \oplus |\mathcal{K}_-|), \\ Q_+ + P_- T^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_{12}^\times & T_{22}^\times \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_+ \oplus |\mathcal{K}_-|, \mathcal{K}_+ \oplus |\mathcal{H}_-|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S = \begin{pmatrix} T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21} & T_{12} T_{22}^{-1} \\ -T_{22}^{-1} T_{21} & T_{22}^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow S^\times &= \begin{pmatrix} T_{11}^\times - T_{21}^\times {T_{22}^\times}^{-1} T_{12}^\times & -T_{21}^\times {T_{22}^\times}^{-1} \\ {T_{22}^\times}^{-1} T_{12}^\times & {T_{22}^\times}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= (P_+ T^* + Q_-)(Q_+ + P_- T^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Da $S^\times$ eine Kontraktion ist gilt

$$||(P_+ T^* + Q_-) g||^2_{|\mathcal{L}_-|} \leq ||(Q_+ + P_- T^*) g||^2_{\mathcal{L}_+}, g \in \mathcal{K}.$$

Da $P_+ T^* g \perp Q_- g$ erhalten wir

$$||P_+ T^* g||^2_{\mathcal{H}_+} + ||Q_- g||^2_{|\mathcal{K}_-|} \leq ||Q_+ g||^2_{\mathcal{K}_+} + ||P_- T^* g||^2_{|\mathcal{H}_-|},$$

und damit

$$||P_+ T^* g||^2_{\mathcal{H}_+} - ||P_- T^* g||^2_{|\mathcal{H}_-|} \leq ||Q_+ g||^2_{\mathcal{K}_+} - ||Q_- g||^2_{|\mathcal{K}_-|}.$$

Somit ist T^* eine Kontraktion. ■

Der Folgende Satz beleuchtet dieses Resultat nun auch von der anderen Seite.

Satz 2.6 .

Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Kreinräume mit Fundamentalzerlegungen $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ und $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$. Sei

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+ \oplus |\mathcal{K}_-|, \mathcal{K}_+ \oplus |\mathcal{H}_-|)$$

eine Kontraktion. Dann ist S scattering-Operator einer Bikontraktion $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ genau dann wenn S_{22} invertierbar ist.

Beweis . Sei S_{22} invertierbar. Dann definiere $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ durch

$$T = \begin{pmatrix} S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} & S_{12} S_{22}^{-1} \\ -S_{22}^{-1} S_{21} & S_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation ergibt sich

$$S = (Q_+T + P_-)(P_+ + Q_-T)^{-1}.$$

Da S eine Kontraktion für alle $f \in H$ ist, gilt

$$||(Q_+T + P_-)f||^2_{\mathcal{L}_+} \leq ||(P_+ + Q_-T)f||^2_{|\mathcal{L}_-|}.$$

Da $Q_+Tf \perp P_-f$ erhalten wir analog zu Satz 2.5

$$\begin{aligned} & ||Q_+Tf||^2_{\mathcal{K}_+} + ||P_-f||^2_{|\mathcal{H}_-|} \leq ||P_+f||^2_{\mathcal{H}_+} + ||Q_-Tf||^2_{|\mathcal{K}_-|} \\ \Longrightarrow \quad & ||Q_+Tf||^2_{\mathcal{K}_+} - ||Q_-Tf||^2_{|\mathcal{K}_-|} \leq ||P_+f||^2_{\mathcal{H}_+} - ||P_-f||^2_{|\mathcal{H}_-|}. \end{aligned}$$

Somit ist T eine Kontraktion und da $T_{22} = S_{22}^{-1}$ invertierbar ist, folgt aus Satz 2.5, dass T sogar Bikontraktion ist. Nach Konstruktion ist S der scattering-Operator von T. ■

Satz 2.7 .

Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Kreinräume. Wenn $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ eine Kontraktion ist, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i). T ist eine Bikontraktion.

(ii). Für ein $\alpha > 0$ ist αT^*eine Kontraktion.

(iii). T bildet einen maximal negativen Unterraum von $\mathcal{H}$ auf einen maximal negativen Unterraum von $\mathcal{K}$ ab.

(iv). T bildet jeden maximal negativen Unterraum von $\mathcal{H}$ auf einen maximal negativen Unterraum von $\mathcal{K}$ ab.

In diesem Fall bildet T jeden maximal gleichmäßig negativen Unterraum von $\mathcal{H}$ injektiv auf einen maximal gleichmäßig negativen Unterraum von $\mathcal{K}$ ab.

Beweis . Seien $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$, $(\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ Fundamentalzerlegungen von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle $\alpha = 1$.
(ii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $\mathcal{M}$ ein maximal negativer Unterraum von $\mathcal{H}$. Nach Korrolar 2.2 ist $T\mathcal{M}$ ein abgeschlossener negativer Unterraum von $\mathcal{K}$. $T\mathcal{M}$ ist genau dann ein maximal negativer Unterraum, wenn kein $f \in \mathcal{K}_-$, $f \neq 0$ orthogonal zu $T\mathcal{M}$ existiert. Sei $f \in \mathcal{K}_-$ orthogonal zu $T\mathcal{M}$, dann gilt

$$[\alpha T^* f, g]_{\mathcal{H}} = [f, \alpha T g]_{\mathcal{K}} = 0, \quad g \in \mathcal{M}.$$

Daraus folgt, dass $\alpha T^* f \in \mathcal{M}^{\perp}$, wobei $\mathcal{M}^{\perp}$ positiv ist, weil $\mathcal{M}$ maximal negativ ist. Da αT^* eine Kontraktion ist, gilt

$$[f, f]_{\mathcal{K}} \geq [\alpha T^* f, \alpha T^* f]_{\mathcal{H}} \geq 0 \geq [f, f]_{\mathcal{K}},$$

und somit ist $[f, f]_{\mathcal{K}} = 0$ und $f = 0$.
(iv) $\Rightarrow$ (iii): trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\mathcal{M}$ ein maximal negativer Unterraum von $\mathcal{H}$ so dass $T\mathcal{M}$ maximal negativ in $\mathcal{K}$ ist. Sei $\mathcal{M}$ der Graph einer Kontraktion $K \in \mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|, \mathcal{H}_+)$. Dann ist für $0 \leq s \leq 1$ auch der Graph der Kontraktion sK, $\Gamma(sK)$, ein maximal negativer Unterraum von $\mathcal{H}$. Da T eine Kontraktion ist, ist auch Q_-T eine Kontraktion (wobei Q_- die Projektion von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}_-$ ist). Somit existiert nach Satz 2.1 ein $\delta > 0$ so das für alle $f \in \mathcal{H}_-$:

$$||T_{21}sKf + T_{22}f||^2_{|\mathcal{K}_-|} = ||Q_-T(sKf + f)||^2_{\mathcal{K}_\mathcal{J}} \geq \delta ||sKf + f||^2_{\mathcal{H}_\mathcal{J}} \geq \delta ||f||^2_{|\mathcal{H}_-|} \tag{7}$$

gleichmäßig für $0 \leq s \leq 1$. Das Bild von $T_{21}K + T_{22}$ ist ganz $\mathcal{K}_-$, da $T\,\mathcal{M} = \Gamma(K)$ in einen maximal negativen Unterraum von $\mathcal{K}$ abbildet. Somit ist $T_{21}K + T_{22}$ ein invertierbarer Operator auf $\mathcal{K}_-$. Wir wissen aus (7), dass $T_{21}sK + T_{22}$ injektiv ist für $0 \leq s \leq 1$.
Da $T_{21}K + T_{22}$ invertierbar ist, können wir $T_{21}sK + T_{22}$ auch durch

$$T_{21}sK + T_{22} = (T_{21}K + T_{22})\left(1 - \left(1 - (T_{21}K + T_{22})^{-1}(T_{21}sK + T_{22})\right)\right)$$

darstellen. Betrachten wir nun den zweiten Faktor, so sehen wir, dass
für $||T_{21}K - T_{21}sK|| < ||(T_{21}K + T_{22})^{-1}||^{-1}$ die Ungleichung

$$||1 - (T_{21}K + T_{22})^{-1}(T_{21}sK + T_{22})|| \leq ||(T_{21}K + T_{22})^{-1}||\,||T_{21}K - T_{21}sK|| < 1$$

gilt. Daher exisitert eine, bezüglich der Spurtopologie von $[0, 1]$, offene Menge $G \supseteq \{1\}$ auf der der Operator $1 - (1 - (T_{21}K)^{-1}T_{21}sK)$ invertierbar ist (Neumann Reihe). Somit ist $T_{21}sK + T_{22}$ für $s \in G$ invertierbar, womit der Operator surjektiv ist. Somit kann jedes $x \in \mathcal{K}_-$ durch ein bestimmtes $y_s \in \mathcal{H}_-$ dargestellt werden als

$$x = (T_{21}sK + T_{22})y_s \quad \text{für} \quad s \in G.$$

Sei nun $(s_n) \in G$ eine Folge die gegen s' konvergiert. Da $||y_{s_n}|| \leq \delta^{-1}||x||$, existiert eine schwach konvergente Teilfolge $y_{s_{n'}} \rightharpoonup y$ mit $s_{n'} \to s'$. Somit gilt

$$x = (T_{21}s_{n'}K + T_{22})y_{s_{n'}} = T_{21}(s_{n'} - s')Ky_{s_{n'}} + (T_{21}s'K + T_{22})y_{s_{n'}}.$$

Nun konvergiert für $s_{n'} \to s'$ $T_{21}(s_{n'} - s')Ky_{s_{n'}}$ gegen 0 und wir erhalten

$$x = \lim_{s_{n'} \to s'}(T_{21}s_{n'}K + T_{22})y_{s_{n'}} = \lim_{s_{n'} \to s'}(T_{21}s'K + T_{22})y_{s_{n'}} = (T_{21}s'K + T_{22})y.$$

Somit ist G abgeschlossen. Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist und $G \neq \{\emptyset\}$ sowohl abgeschlossen als auch offen ist, folgt $G = [0, 1]$. Also ist $T_{21}sK + T_{22}$ für $0 \leq s \leq 1$ invertierbar. Im speziellen für $s = 0$ womit T_{22} invertierbar ist und nach Satz 2.5 ist T somit eine Bikontraktion.
Aus Korrolar 2.2 folgt die letzte Aussage. ■

Satz 2.8 .

Wenn $\mathcal{P}$ ein Pontryaginraum ist, ist jede Kontraktion $T \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ eine Bikontraktion.

Beweis . Sei $(\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{P}$, und $\mathcal{P}_-$ hat endliche Dimension. Sei P_- die Projektion von $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{P}_-$, dann ist auch P_-T eine Kontraktion. Nach Korrolar 2.2 ist $T_{22} = P_-TP_-\big|_{\mathcal{P}_-}$ eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}_-$ in sich selbst. Somit ist T_{22} invertierbar und T ist nach Satz 2.5 eine Bikontraktion. ■

Satz 2.9 .

Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Kreinräume, $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$, $(\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ Fundamentalzerlegungen und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ eine Kontraktion. T ist eine Bikontraktion genau dann, wenn für alle $X \in \mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|, \mathcal{H}_+)$ Kontraktion der Operator $T_{21}X + T_{22}$ ein invertierbarer Operator von $|\mathcal{H}_-|$ nach $|\mathcal{K}_-|$ ist und

$$Y = (T_{11}X + T_{12})(T_{21}X + T_{22})^{-1} \tag{8}$$

eine Kontraktion in $\mathcal{B}(|\mathcal{K}_-|, \mathcal{K}_+)$ ist.

Beweis . Da $X \in \mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|, \mathcal{H}_+)$ eine Kontraktion ist, ist

$$\Gamma(X) = \left\{ \begin{pmatrix} Xf \\ f \end{pmatrix} : f \in \mathcal{H}_- \right\}$$

ein maximal negativer Unterraum von $\mathcal{H}$. Wenn T eine Bikontraktion ist, ist auch

$$T\Gamma(X) = \left\{ \begin{pmatrix} T_{11}Xf + T_{12}f \\ T_{21}Xf + T_{22}f \end{pmatrix} : f \in \mathcal{H}_- \right\}$$

ein maximal negativer Unterraum von $\mathcal{K}$ nach Satz 2.7. Sei Q_- die Projektion von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}_-$, dann ist Q_-T eine Kontraktion und nach Korrolar 2.2 ist $T_{21}X + T_{22}$ injektiv. $Q_-T\Gamma(X) = (T_{21}X + T_{22})\mathcal{H}_- = \mathcal{K}_-$ und damit ist $T_{21}X + T_{22}$ invertierbar. Somit ist der in (8) definerte Operator wohldefinert. Da $T\Gamma(X)$ ein negativer Unterraum von $\mathcal{K}$ ist, gilt

$$||T_{11}Xf + T_{12}f||^2_{\mathcal{K}_+} \leq ||T_{21}Xf + T_{22}f||^2_{|\mathcal{K}_-|} \qquad f \in \mathcal{H}_-,$$

und somit ist Y eine Kontraktion.
Die andere Richtung ist für $X = 0$ gezeigt, weil somit T_{22} invertierbar ist und nach Satz 2.5 somit T eine Bikontraktion ist. ■

Satz 2.10 .

Sei $\mathcal{H}$ ein Kreinraum mit Fundamentalzerlegung $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$ und sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Bikontraktion. Definiere die Abbildung ϕ auf $\mathcal{C}$ der Menge aller Kontraktionen $X \in \mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|, \mathcal{H}_+)$ als

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \phi(X) & \longmapsto & (T_{11}X + T_{12})(T_{21}X + T_{22})^{-1} \end{cases},$$

dann gilt für $X \in \mathcal{C}$, $\phi(X) = X$ genau dann, wenn der Graph von X

$$\mathcal{M} = \Gamma(X) = \left\{ \begin{pmatrix} Xf \\ f \end{pmatrix} : f \in \mathcal{H}_- \right\}$$

invariant unter T ist.

Beweis . $\mathcal{M}$ ist ein maximal negativer Unterraum von $\mathcal{H}$. Wenn $\mathcal{M}$ invariant ist unter T, dann ist $T\mathcal{M} = \mathcal{M}$ und mit

$$T\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} T_{11}Xf + T_{12}f \\ T_{21}Xf + T_{22}f \end{pmatrix} : f \in \mathcal{H}_- \right\}$$

erhalten wir

$$\left.\begin{array}{r} T_{11}Xf + T_{12}f = Xf \\ T_{21}Xf + T_{22}f = f \end{array}\right\} \Longrightarrow T_{11}X + T_{12} = X(T_{21}X + T_{22}) \Longrightarrow \phi(X) = X.$$

Die andere Richtung geht analog rückwärts. ■

Bemerkung 2.11 .

Die Menge $\mathcal{C}$ aus Satz 2.10 ist kompakt und konvex bezüglich der schwachen Operator Topologie von $\mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|, \mathcal{H}_+)$.
Kompaktheit erlangt man durch ein zum Beweis vom Satz von Banach-Alaoglu ähnliches Argument, und der Tatsache, dass für alle $X \in \mathcal{C}$ X eine Hilbertraum Kontraktion ist und somit $||X|| \leq 1$.
Betrachtet man $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ und $t \in (0,1)$, so gilt:

$$||(tX_1 + (1-t)X_2)f|| \leq t||X_1 f|| + (1-t)||X_2 f|| \leq ||f||\,.$$

Somit ist $\mathcal{C}$ konvex.

Satz 2.12 .

Sei $\mathcal{H}$ ein Pontryaginraum. Wenn $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Kontraktion ist, dann existiert ein maximal negativer Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$ der unter T invariant ist.

Beweis . Da $\mathcal{H}$ Pontryaginraum ist, folgt dass T eine Bikontraktion ist. Sei nun $(X_i)_{i\in I}$ eine Folge in $\mathcal{C}$ die schwach gegen $X \in \mathcal{C}$ konvergiert. Somit konvergiert

$$\lim_i (T_{11}X_i + T_{12}) = T_{11}X + T_{12}$$

in der schwachen Operator Topologie von $\mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|, \mathcal{H}_+)$. Weiters konvergiert auch

$$\lim_i (T_{21}X_i + T_{22}) = T_{21}X + T_{22}$$

in der schwachen Operator Topologie von $\mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|)$ und da $\mathcal{H}_-$ endlichdimensional ist, auch in der starken Operator Topologie. Sei P_- die Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_-$. Nach Satz 2.1 existiert für die Kontraktion $P_-T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein $\delta > 0$, und es gilt

$$||(T_{21}X_i + T_{22})f||_{\mathcal{H}_\mathcal{J}} \geq \delta ||f||_{\mathcal{H}_\mathcal{J}}, \qquad i \in I, f \in \mathcal{H}_-.$$

Nach Satz 2.9 ist $T_{21}X_i + T_{22}$ invertierbar und es gilt $||(T_{21}X_i + T_{22})^{-1}|| \leq 1/\delta \;\; \forall i \in I$.
Somit existiert eine Folge

$$\lim_i ((T_{21}X_i + T_{22})^{-1}) = (T_{21}X + T_{22})^{-1}$$

die in der starken Operator Topologie von $\mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|)$ konvergiert und es gilt für die in Satz 2.10 definierte Funktion ϕ

$$\lim_i \phi(X_i) = (T_{11}X_i + T_{12})(T_{21}X_i + T_{22})^{-1} = (T_{11}X + T_{12})(T_{21}X + T_{22})^{-1} = \phi(X)$$

in der schwachen Operator Topologie von $\mathcal{B}(|\mathcal{H}_-|, \mathcal{H}_+)$. ϕ ist somit stetig und alle Bedingungen für den Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff sind erfüllt, nachdem jede stetige Abbildung von einer konvexen kompakten Untermenge eines lokalkonvexen Topologischen Vektorraums einen Fixpunkt hat. ■

Literatur

[1] Michael A. Dritschel and James Rovnyak, *Extension Theorems for Contraction Operators on Krein Spaces*, 1-29

[2] Harald Woracek, *Operatortheorie im Krein Raum*, Vorlesungsunterlagen 2008-2009