

Seminararbeit aus Analysis  
**Jordanscher Kurvensatz**

*Žofia Tršťanová*

0725556

29. Januar 2010

In dieser Seminararbeit definieren wir:

- Norm:  $|x| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$  ,  $x \in (x_1, x_2)$
- Einheitskreis:  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  versehen mit der von  $\mathbb{R}^2$  erzeugten Topologie
- $S^1$  ist der Rand von  $\mathbb{I}^2$ ,  $\mathbb{I}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  versehen mit der von  $\mathbb{R}^2$  erzeugten Topologie. Es ist in der Form von einem Quadrat, was aber homöomorph zu einem Kreis ist.
- Für eine Funktion  $f$ , die nach  $\mathbb{R}^2$  abbildet, definieren wir mit  $f_i$  die  $i$ -te Koordinate von  $f$ .
- Ein Graph ist eine Menge von Punkten, in der die benachbarten Punkten mit den Linien verbunden sind. Die Punkte nennt man Ecken, die Linien nennt man Kanten. Genauer: Ein Graph  $G$  ist ein Tupel  $(V, E)$ , wobei  $V$  eine Menge von Knoten und  $E$  eine Menge von Kanten bezeichnet. Dabei ist  $E$  in ungerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten eine Teilmenge aller 2-elementigen Teilmengen von  $V$  und in gerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten eine Teilmenge des kartesischen Produktes  $V \times V$ .

Hier verwenden wir manchmal anstatt von „Graph“ die Bezeichnung „Weg“.

## Hex

Hex ist ein strategisches Spiel. Es gibt mehrere Versionen von diesem Spiel (Anzahl und Art der Felder). Das Spiel ist für zwei Spieler geeignet. Das Spielbrett besteht meistens aus  $11 \times 11$  Felder, Hexagons, wobei je zwei gegenüberliegenden Seiten des Bretts einem Spieler gehören. Man spielt üblicherweise mit bunten Steinen (zwei Farben, jede gehört einem Spieler), hier verwenden wir als Bezeichnung der Spieler die Zeichen X und O.

Die Spieler setzen abwechselnd einen Stein ihrer jeweiligen Farbe auf ein noch unbesetztes Feld. Um zu gewinnen, muss der Spieler die ihm gehörigen Seiten mit einer Kette seiner Steine verbinden, wobei die gleichfarbigen Steine in der Kette (direkt oder indirekt) zueinander benachbart sein müssen.

**Satz 1** *Jedes Spiel hat einen Gewinner. Alternativ: falls das ganze Hex-Brett mit Steinen von beiden Spielern vollbesetzt ist, dann gibt es entweder einen X-Weg, der die X-Seiten verbindet, oder einen O-Weg, der die O-Seiten verbindet.*

### **Beweis:**

Sei das Hex-Brett ganz mit X's und O's besetzt (Bild 1) . Wir betrachten das Hex-Brett als einen Graphen  $\Gamma$ , wobei die Ecken der Hexagons die Ecken von dem Graphen sind. Die Ränder von den Hexagonen sind die Kanten von dem Graphen, die die Ecken verbinden. Wir zeichnen zusätzliche Linien auf die vier Randecken des ganzen Hex-Bretts, also haben wir zusätzliche Ecken  $u, u', v, v'$ , zu denen nur eine Kante geht. Wir bemerken, dass es die

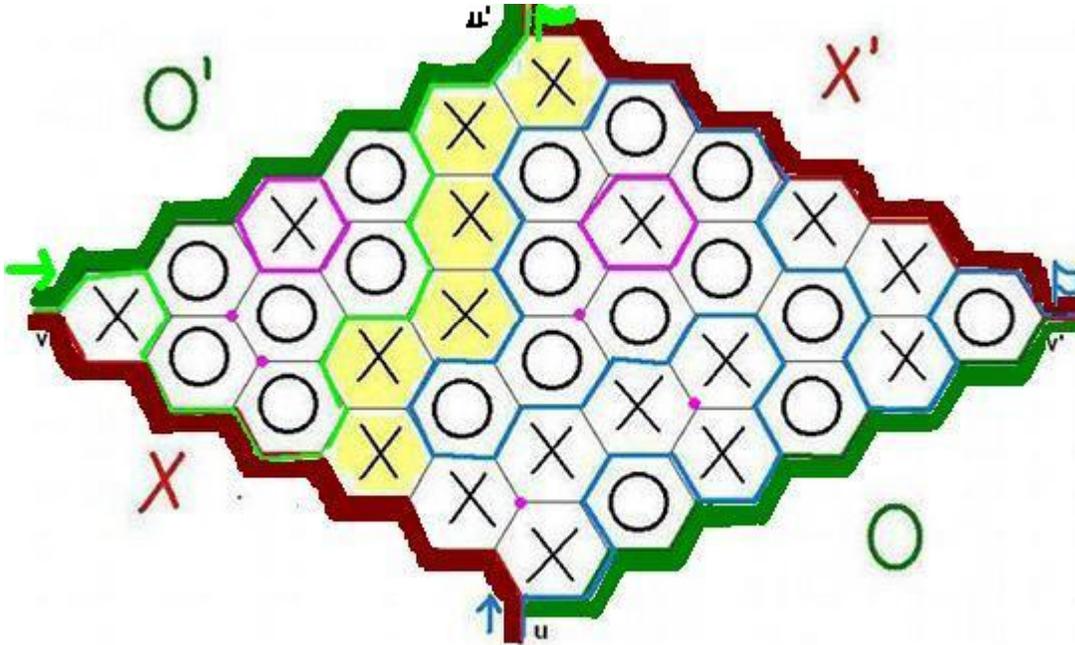


Abbildung 1: Hex: gelb: die Gewinnmenge, hell grün: Weg von  $v$  zu  $u'$ , blau: Weg von  $u$  zu  $v'$ , violett: isolierte Ecken und Kreise, dunkel grün und rot: die zu dem Spieler  $X$  und zu dem Spieler  $O$  gehörigen Randlinien

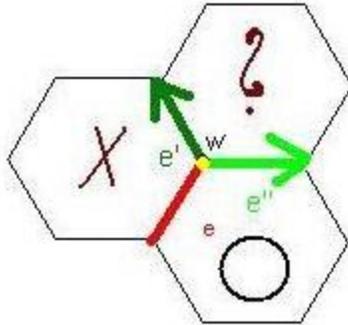


Abbildung 2: das Algorithmus sichert einen eindeutigen Weg

einigen Ecken in  $\Gamma$  sind, zu denen nur eine Kante geht. Somit entstehen vier Randlinien von dem Spielbrett, zwei gehören einem Spieler, zwei anderem (auf dem Bild 1 rot und dunkel grün).

Wir wollen die Gewinnmenge finden. Dazu verwenden wir ein Lemma aus der Graphentheorie.

**Lemma 1** *Sei ein endlicher Graph gegeben, in dem jede Ecke mit höchstens zwei Kanten verbunden ist. Dann ist dieser Graph eine disjunkte Vereinigung von drei Arten von Teilgraphen:*

- (a) *isolierte Ecke*
- (b) *einfacher geschlossener Weg (Kreis)*
- (c) *einfacher Weg*

Wir erzeugen mit Hilfe eines einfachen Algorithmus einen Teilgraph  $\Theta$  auf  $\Gamma$ , der die Gewinnmenge begrenzt. Wir beginnen auf einer der vier Ecken  $u, u', v, v'$ . Den Graphen führen wir nach einem einfachem Prinzip weiter: immer wenn man zu einer Ecke kommt (wo sich drei Kanten treffen), soll man genau die Kante folgen, die zwischen einem Hexagon mit X und einem Hexagon mit O liegt. Im Fall, dass wir auf dem Rand des Bretts sind, d.h. auf der eine Randlinie berührenden Kante, wird das dritte fehlende Hexagon anhängig davon mit X oder O bezeichnet, welchem Spieler das Gebiet hinter der Randlinie gehört. Dieser Teilgraph separiert die X- und O-Regionen des Bretts.

Wir haben eine endliche Anzahl der Hexagons, also  $\Gamma$  ist ein endlicher Graph. Die einzigen Ecken zu denen nur eine Kante geht sind  $u, u', v, v'$ . Die restlichen Ecken sind mit zwei Kanten verbunden. Somit sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt und wir können es auf den Graphen  $\Gamma$  anwenden. Weil wir mit dem Teilgraphen  $\Theta$  auf einer von den zusätzlichen Ecken  $u, u', v, v'$  angefangen haben, kann es nicht passieren, dass dieser Weg in einem Kreis durchlaufen würde, weil er ein „offener Anfang“ hat, das heißt, dass zu der Angangsecke nur

eine Kante geht. Also es ist kein geschlossener Weg. Die Ecken  $u, u', v, v'$  können auch nicht isoliert bleiben, weil die Kante, die von  $u, u', v$  oder  $v'$  zum nächsten Punkt geht, die X und O Regionen teilt und somit dem Algorithmus genügt. Somit folgt aus dem Lemma, dass  $\Theta$  ein einfacher Weg sein muss. Er muss auf einem von den drei restlichen zusätzlichen Ecken enden, weil es die einzigen Ecken mit nur einer Kante sind.

Lassen wir eine Kante  $e$  zu einer Ecke  $w$  gehen (Bild 2). Die Ecke  $w$  gehört zu drei Hexagons. Die Kante  $e$  ist der Rand von zwei von denen. Nach obigem Prinzip bedeutet es, dass ein Hexagon mit O und der andere mit X markiert sein muss. Das dritte Hexagon, das eigentlich bestimmt, wo der Graph weitergehen wird, kann entweder X oder O sein. In beiden Fällen können wir den Graphen mit der Kante  $e'$  oder  $e''$ , das unseren Regeln genügt, fortsetzen. Dieses sichert die Eindeutigkeit. Um das noch besser zu erklären, nehmen wir an, dass gleichzeitig  $e'$  und auch  $e''$  zugelassen werden. Zwei Hexagone sind bereits bekannt. Um  $e'$  zu folgen, müsste das dritte Hexagon mit O bezeichnet werden (siehe Bild 2). Um  $e''$  zu folgen, bräuchten wir, dass das dritte Hexagon mit X bezeichnet ist. Das dritte Hexagon kann nicht gleichzeitig auch mit X und O bezeichnet werden. Dies impliziert die Eindeutigkeit des Teilgraphen (der Weg kann somit keinen Knoten haben). Somit haben wir einen eindeutigen endlichen Weg, das heißt es wird nie zweimal die selbe Ecke getroffen. Da die Ecke  $u, u', v$ , oder  $v'$  mit der X- oder mit der O-Randlinie benachbart ist, wird die Gewinnmenge von unserem Weg von einer Seite begrenzt.

□

## Äquivalenz vom Hexbrett und Fixpunktsatz von Brouwer

Wir verwenden in diesem Abschnitt ein anderes aber äquivalentes Modell von dem Hexbrett (Bild 3, Bild 4).

Das Spiel wird jetzt auf einem Quadrat gespielt (es ist das gewöhnliche Bild von  $\mathbb{I}^2$ ). Die Anzahl der Ecken in dem neuen „Quadratmodell“ entspricht der Anzahl der Hexagons in dem Hexbrett. Jeder Spieler besetzt mit seinen Steinen die Ecken und wenn er zwei benachbarten Ecken hat, gehört ihm auch die Kante dazwischen. Wieder ist das Ziel zwei gegenüberliegenden Seiten zu verbinden.

Auf dem Bild 4 ist ein Hexbrett der Größe 6. Die Ränder sind mit Buchstaben N,S,E,W (north, south, east, west) bezeichnet. Der „horizontale“ Spieler versucht die Ränder E und W zu verbinden, der „vertikale“ Spieler versucht S und N zu verbinden.

*Notation:*

- $\mathbb{Z}^n$  ist die Menge der Gitterpunkte von  $\mathbb{R}^n$
- $x \in \mathbb{R}^n, |x| := \max_i x_i$
- $x \leq y :\Leftrightarrow$  für alle  $i: x_i \leq y_i$

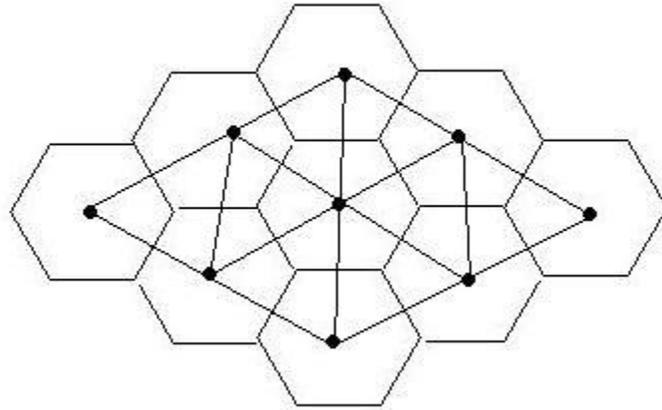


Abbildung 3: Wie man eine andere Version vom Hex bekommt

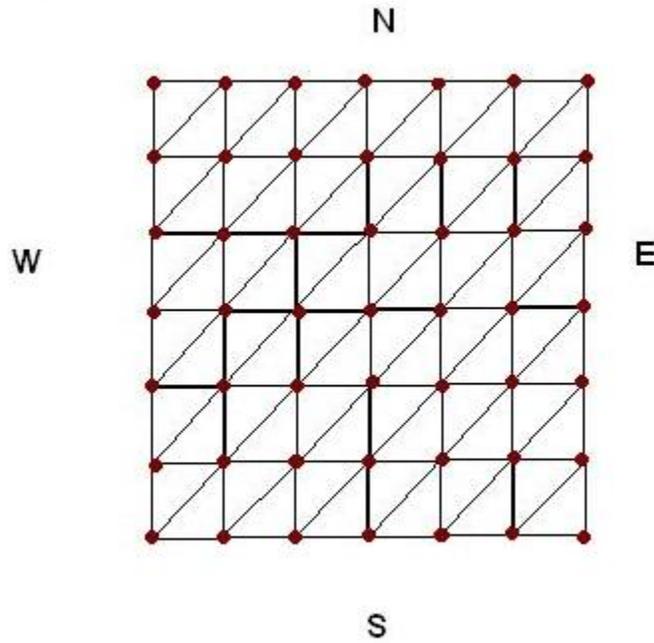


Abbildung 4: ein Hexspiel, wo man auf den Ecken spielt

- $x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$
- $x$  und  $y$  sind *vergleichbar*, falls  $x \leq y$  oder  $y \leq x$
- zweidimensionales Hexbrett der Größe  $k$  ist eine Teilmenge  $B_k = \{z \in \mathbb{Z}^2 : (1,1) \leq z \leq (k,k)\}$
- Die Teilmengen  $W, E, S, N$  von der Menge  $B_k$  sind definiert als:  
 $W := \{z \in \mathbb{Z}^2 : z \in \{1\} \times \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{Z}\}$   
 $E := \{z \in \mathbb{Z}^2 : z \in \{k\} \times \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{Z}\}$   
 $S := \{z \in \mathbb{Z}^2 : z \in \{1, 2, \dots, k\} \times \{1\}, k \in \mathbb{Z}\}$   
 $N := \{z \in \mathbb{Z}^2 : z \in \{1, 2, \dots, k\} \times \{k\}, k \in \mathbb{Z}\}$
- $z$  und  $z'$  sind *benachbart* in  $B_k$  (mit dem Abstand einer Kante), falls  $|z - z'| = 1$  und  $z$  und  $z'$  vergleichbar sind
- eine Teilmenge von  $B_k$  heißt *zusammenhängend*, falls sie nur aus paarweise benachbarten Ecken besteht

**Satz 2 (Hextheorem)** *Seien die Mengen  $H$  und  $V$  eine Partition von der Menge  $B_k$ . Dann enthält entweder  $H$  eine zusammenhängende Menge, die  $E$  und  $W$  verbindet, oder  $V$  enthält eine zusammenhängende Menge, die  $N$  und  $S$  verbindet.*

**Satz 3 (Fixpunktsatz von Brouwer)** *Sei  $f$  eine stetige Abbildung von dem Einheitskreis  $\mathbb{I}^2$  in sich selbst. Dann existiert  $x \in \mathbb{I}^2$ , sodass  $f(x) = x$ .*

**Satz 4** *Hextheorem ist äquivalent zum Fixpunktsatz von Brouwer.*

### Beweis von Satz 4

- *Hex  $\Rightarrow$  Brouwer*  
 Sei  $f : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2$  mit  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ . Wegen der Kompaktheit von  $\mathbb{I}^2$  reicht es zu zeigen, dass

$$\text{für alle } \epsilon > 0 \exists x \in \mathbb{I}^2 \text{ sodass } |f(x) - x| < \epsilon \quad (1)$$

Um zu zeigen, dass (1) zum Fixpunkt führt, wähle für alle  $n \in \mathbb{N}$   $x_n \in \mathbb{I}^2$  sodass  $|f(x_n) - x_n| < \frac{1}{n}$ . Wegen der Kompaktheit von  $\mathbb{I}^2$  existiert eine konvergente Teilfolge, die gegen den Fixpunkt konvergiert.

Wegen der gleichmäßiger Stetigkeit von  $f$  gilt:

Für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  sodass  $\delta < \epsilon$  und  $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$

Wir betrachten ein Hexbrett  $B_k$  mit  $\frac{1}{k} < \delta$ . Wir unterteilen  $B_k$  in vier Teilmengen:

$$H^+ := \{x \in B_k : f_1(x/k) - x_1/k > \epsilon\}$$

$$H^- := \{x \in B_k : x_1/k - f_1(x/k) > \epsilon\}$$

$$V^+ := \{x \in B_k : f_2(x/k) - x_2/k > \epsilon\}$$

$$V^- := \{x \in B_k : x_2/k - f_2(x/k) > \epsilon\}$$

Das heißt, dass die Ecke  $x$  zu  $H^+, H^-, V^+, V^-$  gehört, falls  $x/k$  wenigstens um  $\epsilon$  Einheiten nach links, rechts, oben, oder unten bewegt wurde. Falls diese vier Teilmengen das ganze  $B_k$  nicht bedecken können, muss es  $x \in B_k$  geben, sodass  $|f(x/k) - x/k| < \epsilon$ . Damit hätten wir (1) gezeigt.

**Definition:** Zwei Teilmengen  $C$  und  $D$  von  $B_k$  heißen *berührend*, falls es ein  $c \in C$  und  $d \in D$  gibt, sodass  $c$  und  $d$  benachbart sind.

Behauptung: Die disjunkten Mengen  $H^+$  und  $H^-$  ( $V^+$  und  $V^-$ ) sind *nicht berührend*. Wir zeigen das durch Widerspruch. Angenommen es existiert ein  $x \in H^+$  und ein  $x' \in H^-$ , sodass sie benachbart sind.

Dann gilt:

$$f_1(x/k) - x_1/k > \epsilon \tag{2}$$

$$x'_1/k - f_1(x'/k) > \epsilon \tag{3}$$

Addieren von (2) und (3) ergibt:

$$f_1(x/k) - f_1(x'/k) + x'_1/k - x_1/k > 2\epsilon \tag{4}$$

Da  $x$  und  $x'$  benachbart sind, gilt:

$$|x_1/k - x'_1/k| < \delta < \epsilon \Rightarrow x_1/k - x'_1/k > -\epsilon \tag{5}$$

Und weiter aus (4) und (5) folgt, dass

$$f_1(x/k) - f_1(x'/k) > \epsilon$$

Nun widerspricht das der Wahl von  $\epsilon$ . Analog sind  $V^+$  und  $V^-$  nicht berührend.

Jetzt wählen wir  $H = H^+ \cup H^-$  und  $V = V^+ \cup V^-$ . Sei  $Q$  eine zusammenhängende Menge aus  $H$ . Wegen des oben gezeigten muss  $Q$  ganz entweder in  $H^+$  oder in  $H^-$  liegen. Aus der Definition von der Menge  $H^+$  folgt, dass  $H^+ \cap E = \emptyset$ , weil die erste Koordinate von den Punkten aus  $H^+$  nie gleich 1 wird. Analog wird  $H^- \cap W = \emptyset$ , da

die erste Koordinate gleich -1 sein müsste. Daraus folgt: Q kann E und W nicht verbinden, das heißt Q kann nicht gleichzeitig die Punkte aus der Menge E und aus der Menge W enthalten. Genauso betrachten wir V. V kann auch N und S nicht verbinden. Wegen dem Hextheorem heißt das, dass H und V die Menge  $B_k$  nicht bedecken kann, H und V sind keine Partition von  $B_k$ . Wählt man  $x \in B_k - (H^+ \cup H^- \cup V^+ \cup V^-)$ , dann folgt  $|f(x) - x| < \epsilon$ . Somit ist (1) gezeigt.

• *Brouwer  $\Rightarrow$  Hex*

Wir verwenden die Tatsache, dass das Hexbrett eine Triangulation von  $k \times k$  Quadrat  $\mathbb{I}_k^2$  in  $\mathbb{R}^2$  gibt. Jeder Punkt  $(x_1, x_2)$  von  $\mathbb{I}^2$  ist eindeutig darstellbar als eine konvexe Kombination von einer Menge von (höchstens 3) Ecken, die paarweise benachbart sind. Wir können jede Abbildung  $f$  von  $B_k$  in  $\mathbb{R}^2$  zu einer stückweise-linearen Abbildung  $\hat{f}$  auf  $\mathbb{I}_k^2$  fortsetzen. Falls

$$x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i, \text{ wobei } \lambda_i \text{ nichtnegative Zahlen mit } \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \text{ sind und } z_i \in B_k,$$

dann definieren wir

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i f(z_i) \tag{6}$$

Wir setzen voraus, dass  $B_k$  in zwei Mengen H und V zerfällt und wir definieren wieder vier Mengen: sei  $\hat{W}$  eine zusammenhängende Menge von Ecken, die wenigstens eine Ecke aus W und sonst nur die Ecken aus der Menge H enthält und sei  $\hat{E} = H - \hat{W}$ . Sei  $\hat{S}$  die Menge der Ecken, die wenigstens eine Ecke aus S und sonst nur die Ecken aus der Menge V enthält und sei  $\hat{N} = V - \hat{S}$ . Um das anschaulicher zu machen, können wir sagen, dass die Menge  $\hat{W}$  aus Ecken besteht, die einen „Weg“ aus Ecken, die aus H sind und W erreichen, bilden. Aus der Definition ist klar, dass  $\hat{W}$  und  $\hat{E}$  (bzw  $\hat{N}$  und  $\hat{S}$ ) nicht berührend sind. Wir erzielen in diesem Beweis einen Widerspruch, in dem wir annehmen, dass  $\hat{W} \cap E = \emptyset$  und dass  $\hat{S} \cap N = \emptyset$ . Anders gesagt, dass es keinen „H-Weg“ von E nach W und keinen „V-Weg“ von N nach S gibt.

Seien  $e_1$  und  $e_2$  die Einheitsvektoren von  $\mathbb{R}^2$ . Wir definieren eine Abbildung  $f$  von  $B_k$  in sich selbst:

$$f(z) = \begin{cases} z + e_1, & z \in \hat{W} \\ z - e_1, & z \in \hat{E} \\ z + e_2, & z \in \hat{S} \\ z - e_2, & z \in \hat{N} \end{cases}$$

Wir müssen zeigen, dass  $f(z)$  wirklich in  $B_k$  liegt. Nur falls  $z \in E$ , ist  $z + e_1$  nicht in  $B_k$ . Aber wegen der Annahme, dass es keinen H-Weg von  $W$  zu  $E$  gibt, sehen wir, dass  $\hat{W}$  die Menge  $E$  nicht treffen kann. Mit den anderen Fällen verfährt man analog.

Wir setzen jetzt einfach  $f$  zu einer Abbildung auf  $\mathbb{I}_k^2$  fort und erhalten einen Widerspruch, in dem wir zeigen, dass  $\hat{f}$  keinen Fixpunkt hat. Das ist die Folge von einer einfachen algebraischen Aussage:

**Lemma 2** *Seien  $z_1, z_2, z_3$  Ecken von irgendeinem Dreieck in  $\mathbb{R}^2$  und sei  $\hat{\rho}$  eine Fortsetzung von der Abbildung  $\rho$  wie in (6), wobei  $\rho(z_i) = z_i + v_i$  und  $v_i, i=1,2,3$  gegebene Vektoren sind.  $\hat{\rho}$  hat einen Fixpunkt dann und nur dann wenn  $0$  in der konvexen Hülle von  $v_1, v_2, v_3$  liegt.*

**Beweis**

Sei  $x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i$ . Dann gilt  $\hat{\rho}(x) = \lambda_1(z_1 + v_1) + \lambda_2(z_2 + v_2) + \lambda_3(z_3 + v_3)$  und somit ist  $x$  genau dann ein Fixpunkt, wenn  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ .

■

Wir wenden das Lemma auf die Funktion  $f$  an. Wieder ist die entscheidende Tatsache, dass  $\hat{W}$  und  $\hat{E}$  (bzw  $\hat{S}$  und  $\hat{N}$ ) nicht berührend sind. Das impliziert, dass falls man drei Ecken von einem beliebigen Dreieck betrachtet, kann es nie passieren, dass eine von diesen drei Ecken um  $+e_i$  und eine andere von dem Dreieck um  $-e_i$  verschoben wird. Das bedeutet, dass diese drei Ecken mit Vektoren von dem selben Quadrant von  $\mathbb{R}^2$  verschoben werden und somit diese Vektoren nicht  $0$  in ihrer Hülle haben. Also hätten wir eine fixpunktfreie Abbildung gezeigt, was dem Fixpunktsatz von Brouwer widerspricht.

□

## Jordanscher Kurvensatz

**Definition: *Jordan-Kurve*** Eine Jordan-Kurve  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$  ist eine stetige, injektive Abbildung von einem kompakten Intervall  $[a,b]$  nach  $\mathbb{C}$ . Eine geschlossene Jordan Kurve ist eine homöomorphe Einbettung des Kreises  $S^1$  in  $\mathbb{C}$ . In diesem Fall gilt  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Lemma 3** *Seien  $h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^2$  und  $v : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^2$  zwei Wege mit  $h_1(1) = 1, h_1(-1) = -1, v_2(-1) = -1, v_2(1) = 1$ . Dann existieren  $s, t \in \mathbb{I}$  sodass  $h(s) = v(t)$ .*

**Beweis:**

Angenommen  $h(s) \neq v(t)$  für alle  $s, t \in \mathbb{I}$ . Dann gilt:  $|h(s) - v(t)| > 0$  für alle  $s, t$ . Definiere  $f : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2$  durch

$$f(s, t) := \left( \frac{v_1(t) - h_1(s)}{|h(s) - v(t)|}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{|h(s) - v(t)|} \right)$$

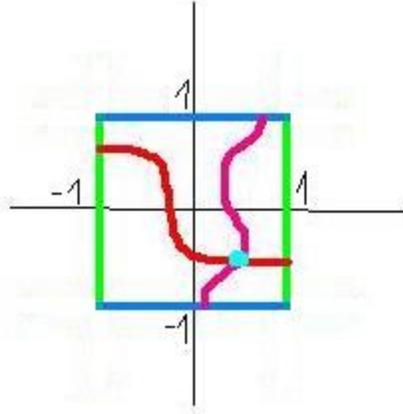


Abbildung 5: Bild zu Lemma 1

Laut dem Fixpunktsatz von Brouwer hat  $f$  einen Fixpunkt,  $f(s_0, t_0) = (s_0, t_0)$ .

Weiters gilt  $f(\mathbb{I}^2) \subset S^1$ , also entweder  $s_0 = \pm 1$  oder  $t_0 = \pm 1$ . Wir gehen alle Fälle durch:

- $s_0 = 1$ : wir untersuchen, ob in diesem Fall die erste Koordinate von  $f(1, t_0)$  gleich 1 ist.

$$\frac{\overbrace{v_1(t_0) - h_1(1)}^{\in[-1,1]}}{\underbrace{|h(1) - v(t_0)|}_{>0}} = \frac{\overbrace{v_1(t_0) - 1}^{\leq 0}}{\underbrace{|h(1) - v(t_0)|}_{>0}} \leq 0 \neq 1$$

- $s_0 = -1$ :

$$\frac{\overbrace{v_1(t_0) - h_1(-1)}^{\in[-1,1]}}{\underbrace{|h(-1) - v(t_0)|}_{>0}} = \frac{\overbrace{v_1(t_0) - (-1)}^{\geq 0}}{\underbrace{|h(-1) - v(t_0)|}_{>0}} \geq 0 \neq -1$$

- $t_0 = 1$ : wir untersuchen, ob in diesem Fall die zweite Koordinate von  $f(s_0, 1)$  gleich 1 ist.

$$\frac{\overbrace{h_2(s_0) - v_2(1)}^{\in[-1,1]}}{\underbrace{|h(s_0) - v(1)|}_{>0}} = \frac{\overbrace{h_2(s_0) - 1}^{\leq 0}}{\underbrace{|h(s_0) - v(1)|}_{>0}} \leq 0 \neq 1$$

- $t_0 = -1$ :

$$\frac{\overbrace{h_2(s_0) - v_2(-1)}^{\in[-1,1]}}{\underbrace{|h(s_0) - v(-1)|}_{>0}} = \frac{\overbrace{h_2(s_0) - (-1)}^{\geq 0}}{\underbrace{|h(s_0) - v(-1)|}_{>0}} \geq 0 \neq -1$$

Dieser Widerspruch impliziert  $h(s) = v(t)$  für ein  $s$  und  $t$  aus  $\mathbb{I}$ .

□

**Definition:**  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, falls für jedes Paar von Punkten  $x, y$  aus diesem Raum  $X$  ein Weg von  $x$  nach  $y$  existiert, d.h. eine stetige Abbildung  $p: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $p(0)=x, p(1)=y$ .  $X$  heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis bestehend aus wegzusammenhängenden Mengen besitzt.

**Bemerkung:** Ein lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend genau dann wenn er zusammenhängend ist.

### Satz 5 Jordanscher Kurvensatz

Das Komplement von einer Jordankurve  $J$  in  $\mathbb{R}^2$  besteht aus zwei Gebieten, wobei beide  $J$  als Rand haben.  $\mathbb{R}^2 - J$  hat genau eine beschränkte Komponente und jede Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  ist wegzusammenhängend und offen.

**Beweis:** Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten:

**1.Schritt:** Wir zeigen zuerst, dass jede Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  offen und wegzusammenhängend ist. Sei  $x \in U$ , wobei  $U$  eine Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  ist. Weil  $J$  kompakt ist, ist  $J$  in  $\mathbb{R}^2$  auch abgeschlossen, daraus folgt, dass  $\mathbb{R}^2 - J$  offen ist und deswegen es existiert eine Umgebung, Kugel  $D$  um  $x$ , die disjunkt von  $J$  ist. Dann muss  $D \cup U$  zusammenhängend sein und weil  $U$  eine Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  ist, haben wir  $D \subset U$ . Also  $U$  ist offen. Aus der Tatsache, dass  $\mathbb{R}^2$  lokal wegzusammenhängend ist, folgt, dass jede offene zusammenhängende Menge, wie auch  $U$ , wegzusammenhängend ist.

**2.Schritt:** In diesem Schritt wollen wir die Existenz eines unbeschränkten Gebiets von  $\mathbb{R}^2 - J$  erklären. Wir wählen einen beliebigen festen Punkt  $p$  in  $\mathbb{R}^2$ . Wegen der Kompaktheit von  $J$  existiert ein Punkt  $t$  aus  $J$ , sodass der Abstand von  $p$  und  $t$  maximal ist, d.h. es existiert ein  $m$ , sodass  $m = \max\{\|p - t\|_2 : t \in J\}$ . Wir definieren eine Gerade  $g$ , sodass  $p \in g$  und  $t \in g$  gilt und weiter definieren wir einen Punkt  $u \in g$ , sodass  $\|u - t\|_2 = m$  und  $\|u - p\|_2 = 2m$ . Dieser Punkt liegt sicher nicht auf  $J$ . Die Menge der Punkten  $\{x \in g : \|x - p\|_2 > 2m\}$  liegt in  $\mathbb{R}^2 - J$  und ist unbeschränkt. Somit ist die Existenz einer unbeschränkten Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  bewiesen.

**3.Schritt:** In diesem Schritt wollen wir zeigen, dass  $\mathbb{R}^2 - J$  mindestens eine beschränkte Komponente hat. Zuerst geben wir die Notation an und definieren ein Punkt  $x$  in  $\mathbb{R}^2 - J$ . Dann überprüfen wir, dass die Komponente  $U$ , die  $x$  enthält, beschränkt ist.

Mit der Kompaktheit von  $J$  existieren Punkte  $a, b \in J$  mit dem größten Abstand  $\|a - b\|_2$ . Wir wählen ein Koordinatensystem, sodass  $a = (-1, 0)$  und  $b = (1, 0)$ . Dann liegt  $J$  im Viereck  $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$  und die einzigen Punkte von  $J$ , die auf dem Rand  $\Gamma := \partial R = \{-1\} \times [-2, 2] \cup \{1\} \times [-2, 2] \cup [-1, 1] \times \{2\} \cup [-1, 1] \times \{-2\}$  liegen, sind  $a$  und  $b$ .

Sei  $c = (0, 2)$  und  $d = (0, -2)$ . Die Strecke  $cd$  trifft  $J$  nach Lemma 3. Sei  $m$  ein Punkt von  $cd \cap J$ , der die maximale zweite Koordinate hat.  $a$  und  $b$  teilen  $J$  in zwei Kurven. Wir nennen  $J_c$  den Weg von  $a$  zu  $b$  in  $J$ , der durch  $m$  geht. Der andere wird  $J_d$  genannt. Sei  $l$  ein Punkt von  $cd \cap J_c$  ( $l=m$  auch möglich) mit der kleinsten zweiten Koordinate. Die Strecke  $ld$  trifft  $J_d$ , sonst würden die zwei Wege  $J_d$  und  $c\bar{m} + \tilde{m}l + \bar{l}d$  ( $\tilde{m}l$  ist ein Teilbogen von  $J_c$  vom Punkt  $m$  bis zum Punkt  $l$ ,  $c\bar{m}$  ist eine Strecke, die die Punkte  $c$  und  $m$  verbindet, analog  $\bar{l}d$ ) dem Lemma 3 widersprechen.

Sei  $k$  der Punkt von  $ld \cap J_d$  mit der größten zweiten Koordinate und  $j$  sei der Punkt von  $ld \cap J_d$  mit der kleinsten Koordinate. Sei  $x$  der Mittelpunkt von  $\bar{k}l$ . Wir zeigen, dass die Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$ , die  $x$  enthält, beschränkt ist.

**Angenommen  $U$  ist unbeschränkt.** Weil  $U$  wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg  $\alpha$  in  $U$  von  $x$  zu einem äußeren Punkt von  $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ . Sei  $w$  der erste Punkt, in dem  $\alpha$  den Rand  $\Gamma$  von  $R$  trifft. Wir bezeichnen mit  $\alpha_w$  den Teil von  $\alpha$ , der von  $x$  zu  $w$  geht. Weil  $\alpha \subset U \Rightarrow w \neq a, b$ . Falls  $w$  in der unteren Hälfte von  $\Gamma$  ist, finden wir einen Weg  $\hat{w}d$  in  $\Gamma$  von  $w$  zu  $d$  ( $\hat{w}d$  ist der kürzeste Weg von  $w$  zu  $d$ ), sodass er weder  $a$  noch  $b$  enthält. Jetzt betrachten wir den Weg  $c\bar{m} + \tilde{m}l + \bar{l}x + \alpha_w + \hat{w}d$ . Dieser Weg trifft nicht  $J_d$ , was aber dem Lemma 3 widerspricht. Ähnlich, falls  $w$  in der oberen Hälfte von  $\Gamma$  ist, sind  $\bar{d}x + \alpha_w + \hat{w}c$  und  $J_c$  disjunkt. Dieser Widerspruch zeigt, dass  $U$  die beschränkte Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  sein muss.

**4.Schritt:** Für diesen Schritt brauchen wir auch den Fortsetzungssatz von Tietze:

Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann normal, wenn zu jeder auf einer abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  definierten, stetigen Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  existiert und  $F|_A = f$  gilt.

Bemerkung: Ein normaler Raum ist ein topologischer Raum, in dem zwei beliebige disjunkte abgeschlossene Mengen disjunkte Umgebungen haben.

Wir wissen aus obigen Schritten, dass  $\mathbb{R}^2 - J$  nicht zusammenhängend ist. Jetzt zeigen wir, dass dann  $J$  der Rand von jeder Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  ist.

$\mathbb{R}^2 - J$  hat also mindestens zwei Komponenten. Sei  $U$  eine beliebige Komponente. Sei  $W$  eine andere Komponente, disjunkt von  $U$  und offen. Dann besitzt  $W$  keine Punkte von dem Abschluss  $\bar{U}$  und deswegen keinen Punkt von dem Rand von  $\bar{U} \cap U^c$  von  $U$ . Also  $\bar{U} \cap U^c \subset J$ . Angenommen  $\bar{U} \cap U^c \neq J$ . Dann es existiert eine Kurve  $A \subset J$ , sodass  $\bar{U} \cap U^c \subset A$ . Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

Wegen des 3. Schrittes hat  $\mathbb{R}^2 - J$  mindestens eine beschränkte Komponente. Sei  $o$  ein Punkt in der beschränkten Komponente. Sei  $D$  ein Kreis um  $o$ , sodass  $J \subset D$ . Dann ist der Rand  $S$  von  $D$  in unbeschränkter Komponente von  $\mathbb{R}^2 - J$  enthalten.

Falls  $A$  homöomorph zum Intervall  $[0, 1]$  ist, können wir wegen des Fortsetzungssatzes von Tietze die identische Abbildung  $i : A \rightarrow A$  auf  $r : D \rightarrow A$  stetig fortsetzen.

Wir definieren Abbildung  $q : D \rightarrow D - \{o\}$  abhängig davon ob  $U$  beschränkt (7) oder nicht (8):

$$q(z) = \begin{cases} r(z), & z \in \bar{U} \\ z, & z \in U^c \end{cases} \quad (7)$$

$$q(z) = \begin{cases} z, & z \in \bar{U} \\ r(z), & z \in U^c \end{cases} \quad (8)$$

Wir haben  $\bar{U} \cap U^c \subset A$  und auf  $A$  ist  $r$  Identität. Also  $q$  ist wohldefiniert und stetig. Falls  $z \in S$ , dann  $q(z) = z$ .

Sei  $p : D - \{o\} \rightarrow S$  eine Projektion ( $p \circ p = p$ ) und  $t : S \rightarrow S$  eine Abbildung, die um  $180^\circ$  dreht. Dann hat die Zusammensetzung von  $t \circ p \circ q : D \rightarrow S \subset D$  keinen Fixpunkt was aber dem Fixpunktsatz von Brouwer widerspricht.

**Bemerkung:** Dieser Beweis enthält die Tatsache, dass kein Bogen  $\mathbb{R}^2$  separieren kann.

**5.Schritt:** Zum Schluss nehmen wir an, dass es **eine andere beschränkte Komponente  $W$  ( $W \neq U$ ) von  $\mathbb{R}^2 - J$  gibt**. Es gilt  $W \subset R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ . Wir bezeichnen mit  $\beta$  den Weg  $\bar{c}\bar{m} + \bar{m}\bar{l} + \bar{l}\bar{k} + \bar{k}\bar{j} + \bar{j}\bar{d}$ , wobei  $\bar{k}\bar{j}$  ein Weg in  $J_d$  von  $k$  zu  $j$  ist. Es ist einfach zu sehen, dass  $\beta[0, 1] \cap W = \emptyset$ . Weil  $a$  und  $b$  nicht in  $\beta$  sind, gibt es Umgebungen  $V_a, V_b$  von  $a$  und  $b$ , sodass  $\beta[0, 1] \cap V_a = \beta[0, 1] \cap V_b = \emptyset$ . Mit dem 4. Schritt sind  $a$  und  $b$  im Abschluss  $\bar{W}$ . Es existiert  $a_1 \in W \cap V_a$  und  $b_1 \in W \cap V_b$ . Sei  $a_1\tilde{b}_1$  ein Weg in  $W$  von  $a_1$  zu  $b_1$ . Sei  $f := a\bar{a}_1 + a_1\tilde{b}_1 + b_1\bar{b}$ . Dann gilt  $f[0, 1] \cap \beta = \emptyset$ . Das widerspricht dem Lemma 3. Somit ist der Satz bewiesen.

□

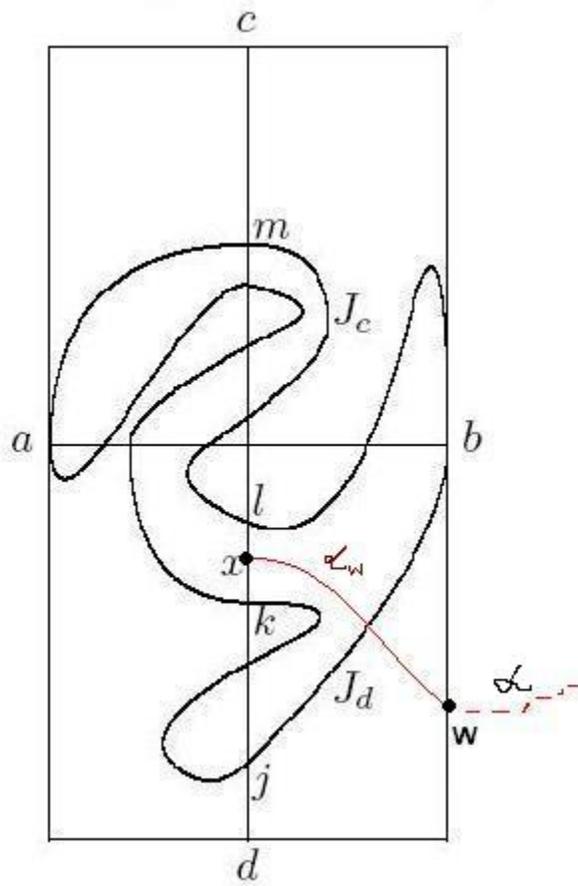


Abbildung 6: Bild zum Beweis des Jordanschen Kurvensatzes

## Literatur

- Dr Sina Greenwood und Dr Jiling Cao, Brouwer's Fixed Point Theorem and the Jordan Curve Theorem, 2006
- David Gale, The game of hex and the Brouwer fixed-point theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 10. (Dec., 1979), pp. 818-827
- Ryuji Maehara, The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. 91, No. 10. (1984), pp. 641-643
- [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)