Fixpunktsätze von Schauder, Darbo-Sadovskii und Krasnoselskii

Für unsere Überlegungen sei durchgehend $(X, \|\cdot\|)$ eine Banachraum über $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$. Die Grundlegende Definition ist nun folgende.

Definition 1 *Ein Punkt $x \in X$ heißt* ***Fixpunkt*** *einer Abbildung F, wenn gilt: $F(x) = x$.*

Viele mathematische Probleme können auf einfache Weise in die Form einer Fixpunktgleichung umgeschrieben werden. Fixpunktsätze geben dann hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Fixpunktes, und damit einer Lösung des ursprünglichen Problems.

`Beispiel:` Wir betrachten das AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [-T, T]$$

mit einer auf $[-T, T] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ stetigen Funktion f. Wir können es in das äquivalente Problem

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds, \quad t \in [-T, T] \tag{1}$$

umschreiben. Definieren wir nun den Operator

$$S : x(t) \mapsto y_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

so erhalten wir die zum ursprünglichen Problem äquivalente Fixpunktgleichung

$$x = Sx$$

Die Existenz eines Fixpunktes für diesen Operator ist also gleichbedeutend mit der Existenz einer Lösung unseres Anfangswertproblems.

Ein Beispiel für einen Fixpunktsatz ist der FPS von Banach für strikte Kontraktionen, der aus der Analysis bekannt ist. Wir wollen hier nun einen weiteren Fixpunktsatz als bekannt voraussetzen:

Satz 2 (FPS von Brouwer) *Sei $F : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ stetig, wobei $\overline{B_1(0)}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Beweis: Siehe z.B. Zeidler [Z] oder Evans [E] □

Damit können wir nun zwei der grundlegendsten Fixpunktsätze beweisen:

Satz 3 (I. FPS von Schauder) *Sei $K \subseteq X$ eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge des Banachraums X. Sei weiters $F : K \to K$ stetig. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ gegeben, so dass $\epsilon < \frac{1}{2} \max_{u,v \in K} \|u - v\|$. Wir wählen endlich viele Punkte $u_1, ..., u_{N_\epsilon} \in K$, so dass gilt:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B_\epsilon(u_i).$$

Dies ist aufgrund der Kompaktheit von K möglich. Mit K_ϵ bezeichnen wir nun die konvexe Hülle der Punkte $u_1, ..., u_{N_\epsilon}$:

$$K_\epsilon := \left\{ \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \lambda_i u_i \middle| 0 \le \lambda_i \le 1, \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Da K konvex ist, gilt $K_\epsilon \subseteq K$. Es bezeichne $\mathrm{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Wir definieren nun eine Abbildung $P_\epsilon : K \to K_\epsilon$ durch:

$$P_\epsilon(u) := \frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \mathrm{dist}(u, K \backslash B_\epsilon(u_i)) u_i}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \mathrm{dist}(u, K \backslash B_\epsilon(u_i))}, \quad u \in K.$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, da jedes u in mindestens einer Kugel $B_\epsilon(u_i)$ liegt, $K \backslash B_\epsilon(u_i)$ stets nichtleer ist und der Nenner daher niemals Null wird. Die Abbildung ist außerdem offensichtlich stetig und desweiteren erhalten wir, da für $u \in K$ entweder $u \in B_\epsilon(u_i)$ oder $\mathrm{dist}(u, K/B_\epsilon(u_i)) = 0$ gilt,

$$\|P_\epsilon(u) - u\| \le \frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \mathrm{dist}(u, K \backslash B_\epsilon(u_i)) \|u_i - u\|}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \mathrm{dist}(u, K \backslash B_\epsilon(u_i))} \le \epsilon. \tag{2}$$

Als nächstes betrachten wir den Operator $F_\epsilon : K_\epsilon \to K_\epsilon$, der wie folgt definiert wird:

$$F_\epsilon(u) := P_\epsilon(F(u)) \quad u \in K_\epsilon.$$

Nun ist K_ϵ homöomorph zur Einheitskugel im $\mathbb{R}^{M_\epsilon}$ für ein $M_\epsilon \le N_\epsilon$, da K_ϵ homöomorph zu einem Simplex im $\mathbb{R}^{M_\epsilon}$ und dieser wieder homöomorph zu einer Kugel im $\mathbb{R}^{M_\epsilon}$ ist. Weiters ist F_ϵ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.

Nach dem FPS von Brouwer existiert damit ein Punkt u_ϵ mit $F_\epsilon(u_\epsilon) = u_\epsilon$.
Da K kompakt ist, existiert eine Folge $\epsilon_j \to 0$ und ein Punkt $u \in K$, sodass $u_{\epsilon_j} \to u$ in X. Wir zeigen nun, dass u ein Fixpunkt von F ist. Mit der Abschätzung (2) erhalten wir

$$\left\|u_{\epsilon_j} - F(u_{\epsilon_j})\right\| = \left\|F_{\epsilon_j}(u_{\epsilon_j}) - F(u_{\epsilon_j})\right\| = \left\|P_{\epsilon_j}(F(u_{\epsilon_j})) - F(u_{\epsilon_j})\right\| \le \epsilon_j$$

Da F stetig ist, folgt nun $F(u) = u$ □

Definition 4 *Wir bezeichnen eine Abbildung $F : X \to X$ als* ***kompakt*** *genau dann, wenn F sowohl stetig ist, als auch $F(C)$ relativkompakt für alle beschränkten $C \subseteq X$.*

Korollar 5 (II. FPS von Schauder) *Sei $C \subseteq X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex. Sei weiters $F : C \to C$ kompakt. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Beweis: Da C beschränkt ist, ist $F(C)$ eine relativkompakte Teilmenge von C. Wir bezeichnen mit $\overline{\text{co}}(B)$ die abgeschlossene konvexe Hülle von B. Da C konvex und abgeschlossen ist, gilt auch $C' := \overline{\text{co}}(F(C)) \subseteq C$. Da $F(C)$ relativkompakt ist, ist die Menge C' kompakt (zum Beweis siehe die Bemerkung nach Proposition 7 weiter unten). Natürlich ist sie auch konvex. Betrachten wir die Funktion $F|_{C'}$, so ist diese Funktion eine stetige Abbildung der kompakten und konvexen Menge C' in sich selbst. Laut dem I. FPS von Schauder hat $F|_{C'}$ somit einen Fixpunkt, der natürlich auch Fixpunkt von F ist. □

`Beispiel:` Wir führen nun das schon oben begonnene Beispiel fort. Dazu wählen wir eine Konstante $K \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$|f(t,x)| \leq K, \quad \text{für alle}\,(t,x) \in [-T,T] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

und setzen weiters $c := \min\{T, b/K\}$. Wir zeigen nun mit Hilfe des FPS von Schauder, dass das AWP eine stetig differenzierbare Lösung auf dem Intervall $[-c,c]$ hat und beweisen somit den Existenzsatz von Peano.
Zunächst müssen wir dafür eine geeignete Teilmenge M des Banachraumes $C[-c,c]$ (mit der Supremumsnorm) als Definitionsmenge für den Operator S suchen. Wir betrachten $M := \left\{x \in C[-c,c] \middle| \, \|x - y_0\| \leq b\right\}$. Dann ist M abgeschlossen, beschränkt und konvex und es gilt für $x \in M$

$$\|Sx - y_0\| = \sup_{t \in [-c,c]} \left| \int_0^t f(s,x(s))ds \right| \leq cK \leq b$$

und damit $S(M) \subset M$. Des weiteren gelten für $x \in M$ die zwei Beziehungen:

$$|Sx(t)| = \left| y_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds \right| \leq |y_0| + cK,$$

$$|Sx(t_0) - Sx(t)| = \left| -\int_{t_0}^t f(s,x(s))ds \right| \leq |t_0 - t|\, K \leq \epsilon \quad \text{für } |t_0 - t| \leq \frac{\epsilon}{K}.$$

Da beide Abschätzungen gleichmäßig für $x \in M$ gelten, folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli, dass $S(M)$ relativkompakt ist. Die Stetigkeit von S ist elementar nachzuweisen. Folglich ist der Operator S kompakt und der II. FPS von Schauder gibt uns daher ein $x \in M$, dass die Gleichung $x = Sx$ erfüllt und damit Lösung des betrachteten Anfangswertproblems ist. Dass x stetig differenzierbar ist, folgt bereits notwendigerweise aus Gleichung (1).

Wir wollen nun mit Hilfe des FPS von Schauder noch weitere Fixpunktsätze beweisen. Kern unserer Überlegungen ist folgende Abbildung:

Definition 6 *Wir bezeichnen mit diam(A) den Durchmesser der Menge A.*
*Das **Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß** $\gamma(A)$ ist für $A \subseteq X$ dann wie folgt definiert:*

$$\gamma(A) := \inf \left\{ \epsilon > 0 \middle| \exists (W_n)_{n=1}^N,\, N < \infty,\, diam(W_i) \leq \epsilon,\, \bigcup_{n=1}^N W_n \supseteq A \right\}$$

Ist diese Menge leer, so setzt man $\gamma(A) = +\infty$.

In Worten ist das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß einer Menge A das Infinmum aller $\epsilon > 0$, sodass es eine endliche Überdeckung von A aus Mengen gibt, deren Durchmesser höchstens ϵ ist.

Ist A kompakt, so ist $\gamma(A) = 0$, da dann ja jede Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Menge ist also 'um so weniger kompakt' je größer ihr Nichtkompaktheitsmaß ist. Weiters ist aus der Definition ersichtlich, dass $\gamma(A) \leq \operatorname{diam}(A)$ ist und $\gamma(A) = \infty$ genau dann, wenn A unbeschränkt ist.
Wir zeigen einige weitere Eigenschaften von γ.

Proposition 7 *Seien A und B Teilmengen von X. Dann gilt:*

1. $A \subseteq B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$
2. $\gamma(A) = \gamma(\overline{A})$
3. $\gamma(A \cup B) = \max\{\gamma(A), \gamma(B)\}$
4. $\gamma(A + B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$, *wobei* $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$
5. $\gamma(cA) = |c|\gamma(A)$ *für* $c \in \mathbb{K}$, *wobei* $cA = \{ca | a \in A\}$
6. $\gamma(A) = 0$ *genau dann, wenn A relativkompakt ist*
7. $\gamma(A) = \gamma(\operatorname{co}A) = \gamma(\overline{\operatorname{co}}A)$

Beweis: 1. folgt direkt aus der Definition von γ; für 2. sei bemerkt, dass eine Menge und ihr Abschluss denselben Durchmesser haben.
Für 3. sei $M = M_1 \cup M_2$ und $\lambda = \max\{\gamma(M_1), \gamma(M_2)\}$. Dann gilt $M_i \subset M$ und daher $\gamma(M_i) \leq \gamma(M)$, $i \in \{1, 2\}$ also $\lambda \leq \gamma(M)$. Andererseits gilt für jedes $\epsilon > 0$, dass es eine Überdeckung $M_{i,n}$ von M_i gibt mit $\operatorname{diam}(M_{i,n}) < \lambda + \epsilon$. Die $M_{i,n}$ $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$ überdecken M, also gilt auch $\gamma(M) \leq \lambda + \epsilon$, und daher $\gamma(M) \leq \lambda$.
Um 4. zu beweisen, sei $A_i, ..., A_n$ eine Überdeckung von A und $B_1, ..., B_m$ eine Überdeckung von B. Dann sind alle Mengen $A_i + B_j$ zusammen eine Überdeckung von $A + B$ und es gilt $\operatorname{diam}(A_i + B_j) \leq \operatorname{diam}(A_i) + \operatorname{diam}(B_j)$.
5. folgt wieder direkt aus der Definition von γ. Für 6. beachte man, dass aus der Tatsache, dass für ein kompakte Menge $\gamma(A) = 0$ gilt, gemeinsam mit 2. folgt, dass eine relativkompakte Menge ebenfalls schon $\gamma(A) = 0$ hat. Gilt andererseits $\gamma(A) = 0$, so bedeutet dies, dass A totalbeschränkt ist, und damit relativkompakt.
Wegen 1. und 2. bleibt für 7. nur noch die Ungleichung $\gamma(\operatorname{co}A) \leq \gamma(A)$ zu zeigen. Dazu wählen wir ein $\epsilon_0 > \gamma(A)$. Dann gibt es eine endliche Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} M_j$ durch Mengen mit Durchmesser $\operatorname{diam}(M_j) \leq \epsilon_0$.
Seien $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ und $y = \sum_{j=1}^{r} \mu_j y_j$ Konvexkombinationen aus Elementen von M_j, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x_i - y) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{r} \mu_j (x_i - y_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{r} \mu_j \|x_i - y_j\| \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{r} \mu_j \operatorname{diam}(M_j) = \operatorname{diam}(M_j) \end{aligned}$$

Wir können die Mengen M_j unserer Überdeckung daher als konvex annehmen. Weiters beachten wir

$$\operatorname{co}(A) \subseteq \operatorname{co}\left(M_1 \cup \bigcup_{j=2}^{n} M_j\right) \subseteq \operatorname{co}\left(M_1 \cup \operatorname{co}\left(\bigcup_{j=2}^{n} M_j\right)\right) \subseteq \operatorname{co}\left(M_1 \cup \operatorname{co}\left(M_2 \cup \bigcup_{j=3}^{n} M_j\right)\right) \subseteq ...$$

Wir müssen also nur noch für zwei konvexe Mengen C_1 und C_2 und deren konvexe Hülle $C = \operatorname{co}(C_1 \cup C_2)$ zeigen, dass

$$\gamma(C) \leq \max\{\gamma(C_1), \gamma(C_2)\} \tag{3}$$

gilt, denn dann folgt aus der Darstellung von oben (von rechts nach links gelesen): $\gamma(\operatorname{co}A) \leq \epsilon_0$ und daraus $\gamma(\operatorname{co}A) \leq \gamma(A)$.
O.B.d.A können wir C_1 und C_2 als beschränkt annehmen, d.h. $\|x\| \leq R$ für $x \in C_1 \cup C_2$. Weiters kann jedes $x \in C$ in der Form $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ mit geeignetem $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ dargestellt werden:
Ist x nämlich aus C, so gilt $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ mit $x_i \in C_1 \cup C_2$ und $\sum \lambda_i = 1$. Durch einfaches Umordnen erhält man die Darstellung $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i + \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j x_j$, wobei $x_1, ... x_r \in C_1$ und $x_{r+1}, ..., x_n \in C_2$. Setzt man $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$, so erhält man

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\lambda x_i}{\lambda} + \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j \frac{(1-\lambda)x_j}{1-\lambda} = \lambda \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{x_i}{\lambda} + (1-\lambda) \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j \frac{x_j}{1-\lambda}$$

Da die noch verbleibenden Summen Konvexkombinationen aus Elementen der konvexen Mengen C_1 bzw. C_2 sind, folgt die Darstellung.
Wir wählen nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig und setzen $\lambda_k = k/N$. Wählen wir zu λ ein k, sodass $|\lambda - \lambda_k| \leq 1/N$, so können wir x darstellen als

$$x = \lambda_k x_1 + (1-\lambda_k)x_2 + z$$

mit einem z mit $\|z\| \leq 2R/N$. Das bedeutet

$$C \subseteq \bigcup_{k=0}^{N} (\lambda_k C_1 + (1-\lambda_k)C_2) + \frac{2R}{N}\overline{B_1(0).}$$

Verwenden wir nun, dass $\gamma(B_1(0)) \leq 2$ und wenden die Teile 1, 4, 3 und 5 der Proposition an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\gamma(C) &\leq \gamma\left(\bigcup_{k=0}^{N} (\lambda_k C_1 + (1-\lambda_k)C_2) + \frac{2R}{N}\overline{B_1(0)}\right) \\
&\leq \gamma\left(\bigcup_{k=0}^{N} (\lambda_k C_1 + (1-\lambda_k)C_2)\right) + \gamma\left(\frac{2R}{N}\overline{B_1(0)}\right) \\
&\leq \max_{0 \leq k \leq N} \{\lambda_k \gamma(C_1) + (1-\lambda_k)\gamma(C_2)\} + \frac{2R}{N}\gamma(\overline{B_1(0)}) \\
&\leq \max\{\gamma(C_1),\, \gamma(C_2)\} + \frac{4R}{N}
\end{aligned}$$

Da N beliebig war, ist damit (3) und folglich auch 7. gezeigt. $\square$

`Bemerkung:` Die Teile 6. und 7. ergeben zusammen das fehlende Stück des Beweises des II. FPS von Schauder: Es fehlte noch zu zeigen, dass für jede relativkompakte Menge A die Menge $A' := \overline{\text{co}}(A)$ kompakt ist. Ist A relativkompakt, dann folgt $0 = \gamma(A) = \gamma(A')$. Somit ist A' relativkompakt und daher als abgeschlossene Menge sogar kompakt.

Mit Hilfe des Kuratowskischen Nichtkompaktheitsmaßes können wir nun die Abbildungen beschreiben, für die unsere weiteren Fixpunktsätze gelten sollen:

Definition 8 *Seien X und Y Banachräume und $F : M \subseteq X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann heißt F* ***kondensierend****, wenn $\gamma(F(A)) < \gamma(A)$ für alle beschränkten $A \subseteq M$ mit $\gamma(A) \neq 0$.*

Beispielsweise sind kompakte Abbildungen kondensierend. Ist F nämlich kompakt, so gilt $\gamma(F(A)) = 0 < \gamma(A)$ für alle beschränkten A mit $\gamma(A) \neq 0$. Damit ist F kondensierend. Kondensierende Abbildungen werden naheliegenderweise oft auch verdichtend genannt.

Satz 9 (FPS von Darbo-Sadovskii) *Sei $C \subseteq X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex. Sei weiters $F : C \to C$ kondensierend. Dann besitzt F einen Fixpunkt.*

Beweis: Wir wählen einen Punkt $p \in C$ und definieren dazu:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &:= \{K \subseteq C | K \text{ abgeschlossen, konvex, } p \in K,\ F(K) \subseteq K\} \\ C' &:= \bigcap_{K \in \mathfrak{K}} K. \end{aligned}$$

Es ist $\mathfrak{K}$ nicht leer, denn $C \in \mathfrak{K}$. Die Menge C' ist als Schnitt abgeschlossener, konvexer Mengen selbst abgeschlossen und konvex. Außerdem ist C' nicht leer, denn $p \in C'$. Weiters gilt für alle $K \in \mathfrak{K}$ wegen $C' \subseteq K$ auch $F(C') \subseteq F(K) \subseteq K$ und daher auch $F(C') \subseteq C'$. C' ist also das kleinste Element von $\mathfrak{K}$
Wir betrachten nun die Menge $C'' := \overline{\text{co}}(F(C') \cup \{p\})$. Aus den Eigenschaften von C' folgt, dass $C'' \subseteq C'$. Andererseits gilt $F(C'') \subseteq F(C') \subseteq C''$ und daher $C'' \in \mathfrak{K}$. Damit ist auch $C' \subseteq C''$ erfüllt, und wir erhalten $C'' = C'$.
Mit Hilfe von Proposition 7 erhalten wir

$$\gamma(C') = \gamma(C'') = \gamma(F(C') \cup \{p\}) = \gamma(F(C')).$$

Da F kondensierend ist, muss also $\gamma(C') = 0$ gelten, und folglich C' kompakt sein.
Betrachten wir nun die Einschränkung $F|_{C'}$, so ist dies eine stetige Abbildung einer kompakten, konvexen Menge in sich, und besitzt daher nach dem I. FPS von Schauder einen Fixpunkt, der natürlich auch Fixpunkt von F ist. $\square$

`Bemerkung:` (1) Wie schon bemerkt ist jede kompakte Abbildung auch kondernsierend, Daher enthält der FPS von Darbo-Sadovskii den II. FPS von Schauder.
(2)Desweiteren inkludiert er auch strikte Kontraktionen (d.h. Abbildungen $F : A \to A$, für die gilt $\|F(x) - F(y)\| \leq q \|x - y\|$ für $q < 1$, $x, y \in A$):
Sei $\gamma(A) = \lambda \neq 0$ und $\bigcup_{j=1}^{N} M_j$ eine Überdeckung von A mit $\text{diam}(M_j) \leq \lambda + \epsilon, \epsilon > 0$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass M_j abgeschlossen ist und $M_j \subseteq A$ gilt. Dann gilt für alle $x, y \in M_j$ mit $\|x-y\| = \lambda + \epsilon$, dass $\|F(x) - F(y)\| \leq q(\lambda + \epsilon)$. Da ϵ beliebig war, folgt $\operatorname{diam}(F(M_j)) \leq q\lambda$ und damit $\gamma(F(A)) \leq q\gamma(A)$.

Damit können wir den nächsten Fixpunktsatz beweisen. Dieser verallgemeinert die in der Bemerkung genannten Spezialfälle des Satzes von Darbo-Sadovskii, indem er die Voraussetzung an F abschwächt:

Korollar 10 (FPS von Krasnoselskii) *Sei $C \subseteq X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex. Weiters seien $F_1 : C \to X$ kompakt, $F_2 : C \to X$ eine strikte Kontraktion und $F := F_1 + F_2$ bilde C in C ab. Dann hat F einen Fixpunkt*

Beweis: Es gilt $\gamma(F(A)) = \gamma(F_1(A) + F_2(A)) \leq \overbrace{\gamma(F_1(A))}^{=0} + \gamma(F_2(A)) \leq q\gamma(A)$ laut obiger Bemerkung, wobei q die Kontraktionskonstante von F_2 ist. Damit ist F kondensierend. □

`Bemerkung:` Die Abbildung F im FPS von Krasnoselskii ist im Allgemeinen selbst weder kompakt noch strikt kontraktiv.

`Zusammenfassung:` Sei X ein Banachraum, $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$, $F : C \to C$ stetig.
Dann sind hinreichende Bedingungen an C und F für die Existenz eines Fixpunktes:

FPS	C	F
Banach	abgeschlossen	strikte Kontraktion
Brouwer	$\overline{B_1(0)}$	———
Schauder I	kompakt, konvex	———
Schauder II	abgeschlossen, beschränkt, konvex	kompakt
Darbo-Sadovskii	abgeschlossen, beschränkt, konvex	kondensierend
Krasnoselskii	abgeschlossen, beschränkt, konvex	$F = \underbrace{F_1}_{kompakt} + \underbrace{F_2}_{strikte\,Kontraktion}$

Literatur

[E] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Math. Society, 4. Auflage 2008.

[W] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer, 6. Auflage 2007.

[Z] E. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I (Fixed-Point Theorems)*, Springer, 1986.