Kompakte Operatoren in Hilberträumen

1 Vorbemerkungen

Im Folgenden bezeichne H immer einen seperablen Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Mit $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten linearen Operatoren von H_1 nach H_2. Weiters setzen wir $\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(H, H)$. Wir verwenden im Weiteren folgende Bezeichnungen und Symbole:

- $I : H \to H, x \mapsto x$ bezeichnet den Identitätsoperator.
- T^* bezeichnet die Hilbertraumadjungierte eines Operators $T \in \mathcal{B}(H)$.
- $\rho(T)$ bezeichnet die Resolventenmenge eines Operators $T \in \mathcal{B}(H)$, d.h. $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ ist invertierbar}\}$.
- Das Spektrum $\sigma(T)$ eines Operators $T \in \mathcal{B}(H)$ wird definiert als $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$.
- Der Spektralradius $r(T)$ eines Operators $T \in \mathcal{B}(H)$ bezeichnet die Zahl $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Als nächstes benötigen wir den Begriff eines kompakten Operators.

Definition 1.1 *Ein Operator T aus $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ heißt kompakt, wenn $\overline{T(U)}$ kompakt ist, wobei U die Einheitskugel in H_1 bezeichnet.*
Die Menge aller kompakten Operatoren wird mit $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ bezeichnet, und $\mathcal{K}(H, H)$ mit $\mathcal{K}(H)$.

Wir setzen folgende Tatsachen über kompakte Operatoren und Spektren als bekannt voraus:

- Ist $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, und ist $\dim \operatorname{ran} T < \infty$, so ist T kompakt.
- $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ ist ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{B}(H_1, H_2)$.
- Ist $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ und $S \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$, und ist einer der beiden Operatoren kompakt, so sind ST und TS kompakt.
- $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ist genau dann kompakt, wenn seine adjungierte $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ kompakt ist.
- $\sigma(T)$ ist für alle $T \in \mathcal{B}(H)$ eine kompakte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$.
- $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ für alle selbstadjungierten $T \in \mathcal{B}(H)$, d.h. für alle $T \in \mathcal{B}(H)$ mit $T = T^*$.
- $r(T) = \|T\|$ für alle normalen $T \in \mathcal{B}(H)$, d.h. für alle $T \in \mathcal{B}(H)$ mit $TT^* = T^*T$.

Im folgenden bezeichnen wir mit c_0 die Menge aller reellen Nullfolgen. Der bekannte Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren lässt sich dann wie folgt formulieren.

Satz 1.2 (Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren) *Sei $T \in \mathcal{K}(H)$ selbstadjungiert, dann existiert eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H und Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$, so dass*

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k \quad , x \in H.$$

Dabei sind die λ_k die entsprchend ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von T, e_k ist ein Eigenvektor zu λ_k und die Reihe konvergiert punktweise absolut. Eine äquivalente Darstellung ist

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k E_k.$$

Hierbei bezeichnen die λ_k wieder die Eigenwerte von T, E_k die Projektion auf den Eigenraum von λ_k und die Reihe konvergiert in der Operatornorm.

2 Singulärwertezerlegung

Kompakte Operatoren sind jene Abbildungen zwischen unendlichdimensionalen Räumen, die sich am leichtesten mit Matrizen (also linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen) vergleichen lassen, da sich einige Ergebnisse über Matrizen auf kompakte Operatoren erweitern lassen. Ersetze man in diesem Abschnitt unendlichdimensionale Hilberträume durch endlichdimensionale Vektorräume, erhält man also bekannte Ergebnisse aus der linearen Algebra.
Zunächst benötigen wir für unsere Überlegungen den Begriff eines positiven Operators.

Definition 2.1 *Ein selbstadjungierter Operator $T \in \mathcal{K}(H)$ heißt Positiv, wenn für alle $x \in H$ gilt $(Tx, x) \geq 0$. Wir schreiben dann $T \geq 0$.*

Lemma 2.2 *Ein selbstadjungierter Operator $\in \mathcal{K}(H)$ ist positiv $\Leftrightarrow \sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$.*

Beweis: "'$\Longleftarrow$"' folgt aus dem Spektralsatz (siehe Rechnung im Beweis des nächsten Satzes) und "'$\Longrightarrow$"' ist klar, denn für Eigenwerte ist $(Tx, x) = \lambda \|x\|^2$. □

Damit erhalten wir als erstes Ergebnis den folgenden Satz.

Satz 2.3 (Quadratwurzelsatz) *Sei $T \in \mathcal{K}(H)$ selbstadjungiert und positiv. Dann existiert genau ein positiver selbstadjungierter Operator $S \in \mathcal{K}(H)$ mit $S^2 = T$.*
Wir schreiben $S = T^{1/2}$.

Beweis: Sei $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k$. Da $T \geq 0$, sind alle $\lambda_k \geq 0$. Definiere S durch

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} (x, e_k) e_k.$$

Es gilt klarerweise $S^2 = T$. Weiters gilt

$$\begin{aligned}(Sx, x) &= (\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} (x, e_k) e_k, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} (x, e_k)(e_k, x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\sqrt{\lambda_k} (x, e_k)} (x, e_k) = (x, \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} (x, e_k) e_k) = (x, Sx),\end{aligned}$$

also ist S selbstadjungiert. Außerdem sieht man mit Hilfe von

$$(Sx, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, |(x, e_k)| \geq 0,$$

dass $S \geq 0$. Berücksichtigen wir, dass die Norm eines selbstadjungierten Operators gleich dem größten Eigenwert ist, so folgt die Kompaktheit aus

$$\left\| S - \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\lambda_k}(\cdot, e_k)e_k \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}(\cdot, e_k)e_k \right\| = \sup_{k>N} \sqrt{\lambda_k} \to 0 \quad \text{für } N \to \infty$$

und der Tatsache, dass $\mathcal{K}(H)$ abgeschlossen ist.
Sei nun $R \in \mathcal{K}(H)$ ein weiterer Operator mit $R \geq 0$, $R^2 = T$ und $R = R^*$. Schreibt man laut Spektralsatz $Rx = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(x, f_k)f_k$, so folgt, dass $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^2(x, f_k)f_k$. Daraus folgt sofort, dass die ν_k^2 die Eigenwerte von T sind und die f_k die zugehörigen Eigenvektoren. Da $R \geq 0$, folgt daraus, dass ν_k für alle k positiv ist. Das heißt, die Reihendarstellungen von S und R sind bis auf Umordnung identisch, und da die Reihen punktweise absolut konvergieren, muss $S = R$ gelten. □

Das folgende Lemma zeigt nun, wie man jedem beliebigen kompakten Operator einen Operator zuweisen kann, der die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt.

Lemma 2.4 *Sei $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Dann ist $T^*T : H_1 \to H_1$ positiv, selbstadjungiert und kompakt. Daher ist $|T| = (T^*T)^{1/2}$ wohldefiniert.*

Beweis: Betrachte für beliebiges $x \in H_1$

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx).$$

Daraus folgt, dass T^*T selbstadjungiert ist. Da der mittlere Term gerade $\|Tx\|$ ist, folgt $T^*T \geq 0$. Dass der Operator kompakt ist, ist klar. □

Wir können nun die aus der linaren Algebra bekannte Polarzerlegung von Matrizen auch für kompakte Operatoren zeigen.

Satz 2.5 (Polarzerlegung) *Zu $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ existiert ein $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ mit $T = U\,|T|$. U ist unitär, also isometrisch, zwischen $(\ker U)^\perp$ und $\operatorname{ran} U$. U ist durch die Forderung $\ker U = \ker T$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Aus der Selbstadjungiertheit von $|T|$ erhalten wir

$$\||T|\,x\|^2 = (|T|\,x, |T|\,x) = (x, |T|^2\,x) = (x, T^*Tx) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 .$$

Daraus folgt für $x, y \in H_1$ mit $x \neq y$

$$\||T|\,x - |T|\,y\| = \||T|\,(x-y)\| = \|T(x-y)\| = \|Tx - Ty\| ,$$

also bildet $|T|$ zwei Elemente auf ein einziges ab, genau dann, wenn T diese zwei Elemente auf ein einziges abbildet.
Daher ist die Abbildung U mit $U(|T|\,x) = Tx$ wohldefiniert und unitär von ran $|T|$ nach $\operatorname{ran} T$. Wir setzen U isometrisch auf $\overline{\text{ran } |T|} \to \overline{\operatorname{ran} T}$ fort. Setzen wir weiters $U = 0$ auf $(\text{ran } |T|)^\perp = \ker |T|$, so ist die Existenz von U gezeigt. Aus obiger Gleichung folgt, dass

$\ker |T| = \ker T$; daraus folgt die Eindeutigkeit. $\square$

Der nächste Satz, der der bekannten Singulärwertezerlegung entspricht, verallgemeinert nun den Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren auf einem Hilbertraum auf beliebige kompakte Operatoren zwischen nicht mehr notwendigerweise identischen Hilberträumen.

Satz 2.6 (Singulärwertezerlegung) *Zu $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ existiert eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H_1, ein Orthonormalsystem $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H_2 sowie eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, so dass für alle $x \in H_1$ gilt:*

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} s_k (x, e_k) f_k.$$

Die Zahlen s_k^2 sind die in ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von T^*T. Die s_k nennt man singuläre Zahlen oder Singulärwerte von T. Die zu T gehörige Folge wird mit $s_n(T)$ bezeichnet.

Beweis: Sei $T = U\,|T|$ die Polarzerlegung von T und die Darstellung von $|T|$ laut Spektralsatz sei

$$|T|\, x = \sum_{k=1}^{\infty} s_k (x, e_k) e_k,$$

und weiters setzen wir $f_n = U(e_n)$. Dann haben die s_k die gewünschten Eigenschaften und da U unitär ist, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. $\square$

Wir erhalten aus diesem Satz nun einige Korollare:

Korollar 2.7 *Jeder Operator der Form $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x, e_n) f_n$, mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme in in H_1 bzw. in H_2, ist kompakt. Weiter gilt $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} = s_n(T)$.*

Beweis: Die erste Aussage ist klar, da die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen T konvergiert. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $|T| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, (\cdot, e_n) e_n$ gilt, woraus die zweite Aussage folgt. $\square$

Korollar 2.8 *Die Operatoren mit endlichdimensionalem Bild liegen dicht in $\mathcal{K}(H_1, H_2)$.*

Beweis: Folgt aus Korollar (2.7) und Satz (2.6). $\square$

Korollar 2.9 *Für $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ gilt $\|T\| = \|s_n(T)\|_\infty$.*

Beweis: Mit Hilfe von Satz (2.5) und der Tatsache, dass $|T|$ selbstadjungiert ist und die $s_n(T)$ die Eigenwerte von $|T|$ sind, erhalten wir

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|U\,|T|\,x\| = \sup_{\|x\|=1} \||T|\,x\| = \||T|\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n(T)| = \|s_n(T)\|_\infty .$$

$\square$

3 Nukleare Operatoren

Laut Satz (2.6) definiert jeder Operator $\in \mathcal{K}(H)$ eine Nullfolge $s_n(T)$. Man kann sich daher fragen, für welche Operatoren die zugehörige Folge im ℓ^1 liegt.

Definition 3.1 *Die Menge aller nuklearen Operatoren wird definiert als*

$$\mathcal{N}(H) = \left\{T \in \mathcal{K}(H) : s_n(T) \in \ell^1\right\}.$$

Ein Operator $T \in \mathcal{N}(H)$ heißt nuklearer Operator.

`Bemerkung:` Natürlich kann man sich für jedes p mit $1 \leq p < \infty$ fragen, ob $s_n(T) \in \ell^p$. Dies führt zur Theorie der sogenannten Schattenklassen, die viele Gemeinsamkeiten mit der Theorie der ℓ^p-Räume hat.

Satz 3.2 *Für $T \in \mathcal{K}(H)$ sind äquivalent:*

(i) $T \in \mathcal{N}(H)$.

(ii) Es gibt Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $\|y_n\| = \|z_n\| = 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, so dass für alle $x \in H$

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} a_n(x, z_n)y_n.$$

(iii) Es gibt Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_n\|\,\|z_n\| < \infty$, so dass für alle $x \in H$

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}(x, z_n)y_n.$$

Weiters gilt $\|s_n(T)\|_{\ell^1} = \inf \|a_n\|_{\ell^1} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|\,\|z_n\|$ wobei das Infimum über alle (a_n) genommen wird, mit denen laut (ii) der Operator T dargestellt werden kann, bzw. über alle Folgen $(y_n), (z_n)$ mit denen laut (iii) T dargestellt werden kann.

Beweis: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Folgt aus der Singulärwertezerlegung.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x, z_n)y_n$ eine solche Darstellung und sei $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x, e_k)f_k$ die Singulärwertedarstellung. Dann gilt sowohl $Te_k = s_k f_k$ als auch $Te_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e_k, z_n)y_n$. Also folgt mit der Cauchy-Schwarzschen und Besselschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} s_k &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|(e_k, z_n)|\,|(y_n, f_k)| = \sum_{k,n=1}^{\infty} (|a_n|^{1/2}\,|(e_k, z_n)|)(|a_n|^{1/2}\,|(y_n, f_k)|) \\
&\leq \left(\sum_{k,n=1}^{\infty} |a_n|\,|(e_k, z_n)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k,n=1}^{\infty} |a_n|\,|(y_n, f_k)|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, z_n)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{\infty} |(y_n, f_k)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,\|z_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,\|y_n\|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.
\end{aligned}$$

Also ist $s_n(T) \in \ell^1$.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: trivial.
Der Zusatz folgt direkt aus obiger Rechnung. $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{N}(H)$ ein Banachraum ist. Zuvor benötigen wir noch ein Lemma, dass es uns ermöglicht, die Vollständigkeit eines normierten Raumes zu zeigen.

Lemma 3.3 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann sind äquivalent:*

(i) X ist vollständig.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe konvergiert gegen ein $x \in X$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: ist klar, denn $(\sum_{n=1}^N x_n)_{N\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wähle zu $\epsilon_k = 2^{-k}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ für $n, m \geq N_k$.
Dann existiert eine Teilfolge mit $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setzen wir $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, so gilt $\sum_{k=1}^\infty \|y_k\| < \infty$. Laut Voraussetzung existiert also ein $y \in X$ mit

$$\left\| y - \sum_{k=1}^K y_k \right\| = \left\| y - (x_{n_{K+1}} - x_{n_1}) \right\| \to 0 \text{ für } K \to \infty.$$

Daher konvergiert eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst eine Cauchyfolge ist, folgt, dass die Folge selbst konvergiert. $\square$

Satz 3.4 *$\mathcal{N}(H)$ versehen mit der Norm $\|T\|_{NUK} = \|s_n(T)\|_{\ell^1}$ für $T \in \mathcal{N}(H)$ ist ein Banachraum. Weiters gilt $\|T\| \leq \|T\|_{NUK}$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die Normabschätzung. Sei dazu $Tx = \sum_{k=1}^\infty s_k(x, e_k) f_k$. Dann gilt

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^\infty s_k(x, e_k) f_k \right\| = \sum_{k=1}^\infty |s_k| \, |(x, e_k)| \leq \|x\| \, \|s_k\|_{\ell^1} = \|x\| \, \|T\|_{NUK}.$$

Daraus folgt sofort $\|T\| \leq \|T\|_{NUK}$.
Hieraus erhalten wir auch sogleich

$$\|T\|_{NUK} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|T\| = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0.$$

Dass $\|\lambda T\|_{NUK} = |\lambda| \, \|T\|_{NUK}$ gilt, sieht man aus der Definition.
Seien nun $T_1, T_2 \in \mathcal{N}(H)$. Es gelte $T_i x = \sum_k s_{i,k}(x, e_{i,k}) f_{i,k}$. Dann ist

$$(T_1 + T_2)(x) = s_{1,1}(x, e_{1,1}) f_{1,1} + s_{2,1}(x, e_{2,1}) f_{2,1} + s_{1,2}(x, e1,2) f_{1,2} + s_{2,2}(x, e_{2,2}) f_{2,2} + \cdots,$$

und dies ist eine Darstellung von $T_1 + T_2$ laut Satz (3.2) (ii) mit $a_{2n} = s_{2,n}$ und $a_{2n-1} = s_{1,n}$.
Ebenfalls aus Satz (3.2) und der Dreiecksungleichung im ℓ^1 folgt:

$$\|T_1 + T_2\|_{NUK} \leq \|a_n\|_{\ell^1} \leq \|s_n(T_1)\|_{\ell^1} + \|s_n(T_2)\|_{\ell^1} = \|T_1\|_{NUK} + \|T_2\|_{NUK}.$$

Für die Vollständigkeit wähle $(T_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}(H)$ mit $\sum_{m=1}^\infty \|T_m\|_{NUK} < \infty$. Dann gilt

$$\sum_{m=1}^\infty \|T_m\| \leq \sum_{m=1}^\infty \|T_m\|_{NUK} < \infty.$$

Da $\mathcal{K}(H)$ ein Banachraum ist, existiert $T = \sum_{m=1}^{\infty} T_m$. Laut Satz (3.2) gilt auch tatsächlich

$$\left\| T - \sum_{m=1}^{M} T_m \right\|_{NUK} \leq \sum_{m>M} \sum_{n=1}^{\infty} s_{m,n} \leq \sum_{m>M} \|T_m\|_{NUK} \to 0.$$

□

Der nächste Satz besagt, dass die nuklearen Operatoren ein Ideal bilden.

Satz 3.5 *Seien $R, T \in \mathcal{B}(H)$ und $S \in \mathcal{N}(H)$. Dann ist $RST \in \mathcal{N}(H)$ mit $\|RST\|_{NUK} \leq \|R\| \, \|S\|_{NUK} \, \|T\|$.*

Beweis: Sei $S = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, e_n) f_n$. Man sieht leicht, dass in diesem Falle

$$RST = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, T^* e_n) R f_n.$$

Es folgt laut Satz (3.2)

$$\|RST\|_{NUK} \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n \, \|T^* e_n\| \, \|R f_n\| \leq \|R\| \, \|T\| \sum_{n=1}^{\infty} s_n.$$

□

Da $\mathcal{N}(H)$ ein Banachraum ist, können wir natürlich auch seinen Dualraum betrachten. Im folgenden wird ein spezielles Funktional auf $\mathcal{N}(H)$ von interesse sein. Um es zu definieren, benötigen wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 3.6 *Sei $T \in \mathcal{N}(H)$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine beliebige Orthonormalbasis von H, und sei $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cdot, x_n) y_n$ eine Darstellung von T mit $(a_n) \in \ell^1$ und $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (y_n, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (T e_n, e_n),$$

wobei beide Reihen absolut konvergieren.

Beweis: Da $(a_n) \in \ell^1$ und $|(y_n, x_n)| \leq 1$ ist, konviergt die linke Reihe absolut. Mit der Parsevalschen Gleichung gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (y_n, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} (y_n, e_k)(e_k, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (y_n, e_k)(e_k, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (T e_k, e_k).$$

Daher konvergieren beide Reihen unbedingt zum selben Limes, also konvergiert auch letztere absolut. □

Definition 3.7 *Sei $T \in \mathcal{N}(H)$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Die Spur von T wird definiert als*

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (T e_n, e_n).$$

Es gilt $\mathrm{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(f_n, e_n)$ für die singuläre Darstellung und allgemein $\mathrm{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_n, y_n)$ für jede zulässige Darstellung.
Wir wollen nun einige Eigenschaften des Spurfunktionals festhalten.

Satz 3.8 *Es gilt:*

(i) tr *ist ein stetiges lineares Funktional auf* $\mathcal{N}(H)$ *mit* $\|\mathrm{tr}\| = 1$.

(ii) Ein Operator T *ist genau dann nuklear, wenn* T^* *nuklear ist und in diesem Fall gilt* $\mathrm{tr}(T) = \overline{\mathrm{tr}(T^*)}$.

(iii) Ist $T \in \mathcal{N}(H)$ *und* $S \in \mathcal{B}(H)$, *so gilt* $\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)$.

Beweis:
(i): Die linearität folgt sofort aus der Definition, die Beschränktheit folgt aus:

$$|\mathrm{tr}(T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n \, |(f_n, e_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \|T\|_{NUK} \, .$$

Der Operator $T = (\cdot, e)e$ zeigt sogar $\|T\| = 1$.
(ii): Ist $T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, e_n)f_n$ so ist $T^* = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, f_n)e_n$. Beschreibt eine der Darstellungen einen nuklearen Operator, so tut dies die andere klarerweise auch. Weiters gilt

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(f_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{s_n(e_n, f_n)} = \overline{\mathrm{tr}(T^*)}.$$

(iii): Ist $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cdot, x_n)y_n$, so ist

$$ST = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cdot, x_n)Sy_n, \quad TS = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cdot, S^*x_n)y_n,$$

und folglich

$$\mathrm{tr}(ST) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(Sy_n, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y_n, S^*x_n) = \mathrm{tr}(TS).$$

□

Für selbstadjungierte Operatoren ist die Spur besonders leicht auszurechnen. Außerdem kann man bei selbstadjungierten Operatoren leicht überprüfuen, ob sie nuklear sind:

Korollar 3.9 *Sei* $T \in \mathcal{K}(H)$ *selbstadjungiert und* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die zugehörige Folge von Eigenwerten entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Dann ist* T *genau dann nuklear, wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$. *In diesem Fall ist*

$$\|T\|_{NUK} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \quad \textit{und} \quad \mathrm{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

Beweis: Laut Spektralsatz sind die $|\lambda_n|$ genau die singulären Zahlen von T. Die Darstellung der Spur von T erhält man, indem man in der Definition die zugehörige Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T einsetzt. □

Zum Abschluss wollen wir mit Hilfe der nuklearen Operatoren den Dualraum der Kompakten Operatoren beschreiben. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Lemma, das uns eine hinreichende Bedingung für die Kompaktheit eines Operators gibt.

Lemma 3.10 *Sei $S \in \mathcal{B}(H)$. Für je zwei Orthonormalsysteme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $(Sg_n, h_n) \to 0$. Dann ist S kompakt.*

Beweis: Wenn S nicht kompakt ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $\|S - T\| > \epsilon$ für alle $T \in \mathcal{K}(H)$ gilt. Wir konstruieren mit Hilfe dieser Tatsache Orthonormalsysteme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $|(Sg_n, h_n)| > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ist $n = 1$, so setze $T = 0$ und finde g_1 und h_1 mit $\|g_1\| = \|h_1\| = 1$ und $|(Sg_1, h_1)| > \epsilon$. Seien nun $g_1, \cdots, g_n$ und $h_1, \cdots, h_n$ bereits wie gewünscht konstruiert. Sei E (bzw. F) die Orthogonalprojektion auf $\operatorname{lin}\{g_1, \cdots, g_n\}$ (bzw. $\operatorname{lin}\{h_1, \cdots, h_n\}$). Setze nun $T = SE + FS - FSE$. Dann erhalten wir aus $\|S - T\| > \epsilon$ für gewisse $x, y \in H \backslash \{0\}$

$$|((I - F)S(I - E)x, y)| = |((S - T)x, y)| > \epsilon \|x\| \|y\| .$$

Insbesondere ist $Ex \neq x$, $Fy \neq y$. Setzen wir nun

$$g_{n+1} = \frac{x - Ex}{\|x - Ex\|}, \quad h_{n+1} = \frac{y - Fy}{\|y - Fy\|},$$

so folgt $g_{n+1} \perp g_i$ und $h_{n+1} \perp h_i$ für $i \leq n$ sowie $|(Sg_{n+1}, h_{n+1})| > \epsilon$. □

Wir benötigen für den Beweis auch das Ergebnis aus der ℓ^p-Theorie, dass ℓ^1 isometrisch Isomorph zum Dualraum von c_0 ist. Genauer:
$(c_0)' \cong \ell^1$ vermöge $T : \ell^1 \to c_0'$, $(Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ $(x = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1, y = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0)$.

Satz 3.11 *Die Abbildung $\Phi : \mathcal{N}(H) \to \mathcal{K}(H)', S \to \Phi_S$ mit $\Phi_S(T) = \operatorname{tr}(ST)$ ist ein isometrischer Isomorphismus; es gilt also $\mathcal{K}(H)' \cong \mathcal{N}(H)$.*

Beweis: Die Abbildung Φ ist wohldefiniert und linear. Durch

$$|\Phi_S(T)| = |\operatorname{tr}(ST)| \leq \|ST\|_{NUK} \leq \|S\|_{NUK} \|T\|$$

sieht man, dass $\|\Phi_S\| \leq \|S\|_{NUK}$.
Es gelte $\Phi_S(T) = 0$ für alle $T \in \mathcal{K}(H)$. Setze $T = (\cdot, x)y$, dann gilt für alle $x, y \in H$

$$0 = \Phi_S(T) = \operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}((\cdot, x)Sy) = (Sy, x).$$

Also ist $S = 0$ und daher Φ injektiv.
Betrachte nun zu $f \in \mathcal{K}(H)'$ die Abbildung $(x, y) \mapsto f((\cdot, y)x)$. Dabei handelt es sich um eine stetige Sesquilinearform. Daher existiert ein $S \in \mathcal{B}(H)$ mit $(Sx, y) = f((\cdot, y)x)$ für alle $x, y \in H$. Seien nun $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Der Operator $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cdot, g_n)h_n$ ist dann kompakt mit $\|T\| = \sup_n |a_n|$. Es folgt

$$|f(T)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n f((\cdot, g_n)h_n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (Sg_n, h_n)\right| \leq \|f\| \|T\| = \|f\| \|(a_n)\|_\infty .$$

Daher ist $(a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n(Sg_n, h_n)$ ein stetiges Funktional auf c_0 mit norm $\leq \|f\|$. Laut Konstruktion wird es von der Folge $((Sg_n, h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dargestellt. Daher gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |(Sg_n, h_n)| \leq \|f\|$ und insbesondere $(Sg_n, h_n) \to 0$ und S ist kompakt.
Schreibe nun $S = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, e_n)f_n$. Einfaches Nachrechnen zeigt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Se_n, f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Daher ist S nuklear und es gilt $\|S\|_{NUK} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \leq \|f\|$.
Daher stimmen f und Φ_S auf allen Operatoren der Form $(\cdot, x)y$ überein, also auch auf deren linearen Hülle und aufgrund der Stetigkeit von f und Φ_S auch auf deren Abschluss. Dieser ist aber bereits $\mathcal{K}(H)$, da die Operatoren mit endlichdimensionalem Bild dort ja dicht liegen. Es folgt also $\Phi_S = f$. □