Seminar aus Funktionalanalysis

Banachalgebren und topologischer Nullteiler

Filip Žepinić, B.Sc., e0625223

24. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Banachalgebren sind mathematische Objekte, die eine wichtige Rolle in der Funktionalanalysis spielen. Sie entsprechen Banachräumen, auf denen eine bilineare, assoziative Multiplikation erklärt ist. Als bekanntes Beispiel sei der Banachraum $\mathfrak{L}(X)$ aller beschränkten linearen Abbildungen von X in sich genannt.
Die Theorie der Banachalgebren hat einige klassische Ergebnisse hervorgebracht, wie zum Beispiel den *Satz von Gelfand-Mazur* oder auch den *Gelfand'schen Darstellungssatz*. Zudem konnte ein erstaunlich einfacher Beweis für den *Satz von Wiener* gefunden werden.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Invertierbarkeit in Banachalgebren und im Speziellen mit dem Begriff des *topologischen Nullteilers*, der eine Verallgemeinerung des *algebraischen Nullteilers* darstellt. Wir werden sehen, dass Elemente einer Banachalgebra, die topologischen Nullteilern entsprechen, nicht invertierbar sind. Zudem werden wir einen Satz kennenlernen, der den *Satz von Gelfand-Mazur* verallgemeinert.

2 Grundlagen

Wir definieren einige grundlegende Begriffe, die uns im Laufe der Arbeit begegnen werden.

Definition 2.0.1 Sei X ein linearer Raum über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Wir nennen eine Abbildung $X \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \|x\|$ eine **Norm**, falls $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ gilt:

(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Ist auf X eine Norm $\|.\|$ definiert, so sprechen wir von einem **normierten Raum**. Jede Norm induziert vermöge $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf X. Falls X ein vollständig normierter Raum ist, d.h. wenn jede Cauchyfolge in X konvergent ist, so nennen wir X einen **Banachraum**.

Definition 2.0.2 Wir nennen den linearen Raum X' aller beschränkten linearen Abbildungen von X (bzgl. der Operatornorm) in den Skalarkörper von X den **Dualraum** von X. Seine Elemente heißen **stetige lineare Funktionale**.

Definition 2.0.3 Ein **Ring** $(R, +, .)$ ist eine Menge R mit zwei-stelligen Operationen **+** und **.**, sodass

(i) $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ($\rightsquigarrow$ kommutativ.: $a + b = b + a \ \forall a, b \in R$)

(ii) $(R, .)$ eine Halbgruppe ($\rightsquigarrow$ $R \times R \to R, (a, b) \mapsto ab$ ist assoziativ)

(iii) und die Distributivgesetze ($\rightsquigarrow$ $a(b + c) = ab + ac \quad \wedge \quad (a + b)c = ac + bc \ \forall a, b, c \in R$) gelten.

Definition 2.0.4 Sei R ein Ring. Dann heißt ein Element $a \in R \setminus \{0\}$

(i) **Linksnullteiler**, wenn es ein $b \in R \setminus \{0\}$ gibt, so dass $ab = 0$.

(ii) **Rechtsnullteiler**, wenn es ein $b \in R \setminus \{0\}$ gibt, so dass $ba = 0$.

In kommutativen Ringen fallen beide Begriffe zusammen und wir sprechen von einem **(algebraischen) Nullteiler**.

Definition 2.0.5 Sei $A \neq \{0\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$.

(i) Sei A versehen mit einer bilinearen Abbildung $A \times A \to A, (a, b) \mapsto ab$ und assoziativ, d.h. $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in A$. Dann nennen wir A eine **Algebra**.

(ii) Ein $e \in A$ heißt **Einselement** einer Algebra A, falls $ae = ea = a$ $\forall a \in A$.

(iii) Eine Algebra A heißt **kommutativ**, falls $ab = ba \ \forall a, b \in A$.

(iv) Unter einer **Unteralgebra** B einer Algebra A verstehen wir einen Unterraum von A, der unter der Multiplikation abgeschlossen ist.

(v) Sei A versehen mit einer Norm $\|.\|$, sodass $\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \ \forall a, b \in A$. Dann sprechen wir von einer **normierten Algebra**.

Wie wir also sehen können ist eine Algebra eigentlich ein **Ring**, der ergänzend eine Vektorraumstruktur besitzt.

3 Banachalgebren

3.1 Eigenschaften und Beispiele

Definition 3.1.1 Eine **Banachalgebra** mit Einselement ist ein Banachraum $\mathfrak{B}$ auf dem eine bilineare assoziative Multiplikation

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, (x, y) \mapsto xy$$

erklärt ist.
Die Banachalgebra erfüllt $\|xy\| \leq \|y\|\|y\|$ $\forall x, y \in \mathfrak{B}$ und besitzt eine multiplikative Einheit, d.h. ein **Einselement e** mit $\|e\| = 1$ und $xe = ex = x$ $\forall x \in \mathfrak{B}$.

Falls nicht anders erwähnt, werden wir im weiteren Verlauf immer von Banachalgebren über $\mathbb{C}$ mit Einselement sprechen. Die Einschränkung auf $\mathbb{C}$ erfolgt deshalb, weil nur für komplexe Banachalgebren die fundamentalen Darstellungssätze gelten.

Bemerkung 3.1.2 Es gibt natürlich auch Banachalgebren ohne Einselement. Als Beispiel sei der Folgenraum $\ell^p, 0 \leq p < \infty$, mit $\ell^p := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, wobei X der Vektorraum aller Folgen in $\mathbb{C}$, genannt.

Definition 3.1.3 Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra ohne Einselment. Eine links-(bzw. rechts-)**Approximation der Eins** von $\mathfrak{B}$ ist ein **Netz** $(e_i)_{i \in I}$ mit $e_i x$ (bzw. $x e_i$) $\longrightarrow x$ für $i \in I$ und $\forall x \in \mathfrak{B}$.
Ein Vorteil dieser Methode ist, dass Eigenschaften eines Netzes (wie z.B. Beschränktheit oder Abzählbarkeit) erhalten bleiben.

Eigenschaften 3.1.4

(i) Eine Banachalgebra besitzt (falls vorhanden) höchstens ein Einselement e, d.h. e ist eindeutig. Denn sind e und $\tilde{e}$ zwei Einselemente, so gilt $e = e\tilde{e} = \tilde{e}$.

(ii) Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra und $x \in \mathfrak{B}$. Dann folgt für ein beliebiges $y \in \mathfrak{B} : 0x = (y - y)x = (yx) - (yx) = 0 = (xy) - (xy) = x(y - y) = x0$. Somit gilt also immer $0x = x0 = 0$. Da aber $\mathfrak{B} \neq \{0\}$, kann 0 kein Einselement von $\mathfrak{B}$ sein.

(iii) Eine Banachalgebra besitzt die wichtige Charakteristik, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ stetig ist, falls wir $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ mit der Maximumsnorm oder der Summennorm versehen (bzgl. der Produkttopologie). Konvergiere $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, also

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \max(\|x_n - x\|, \|y_n - y\|) \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und dementsprechend gilt:

$$\|x_n y_n - xy\| = \|x_n(y_n - y) + (x_n - x)y\| \leq \|x_n\|.\|y_n - y\| + \|y\|.\|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

Beispiele 3.1.5

(*i*) Sei X ein Banachraum. Dann ist der Raum $\mathfrak{L}(X)$ aller beschränkten, linearen Abbildungen von X in sich mit der Identität $I : X \to X$ als Einselement und der Operatornorm eine *nichtkommutative* Banachalgebra (für $\dim(X) > 1$).

(*ii*) Sei X ein topologischer Raum. Dann ist der Raum $C_b(X)$ aller stetigen, beschränkten Funktionen auf X mit der konstanten Funktion 1 als Einselement und der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ unter punktweiser Multiplikation $C_b(X) \times C_b(X) \to C_b(X), (f, g) \mapsto fg$ eine *kommutative* Banachalgebra, denn es gilt: $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

(*iii*) Bezeichne $A(\mathbb{T})$ den Raum aller 2π-periodischen Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ und der Norm $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$. Unter punktweiser Multipliklation und der konstanten Einsfunktion als Einselement ist dieser Raum eine kommutative Banachalgebra, weil

$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k) \text{ und}$$

$$\|fg\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n-k)g(k)| =$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |f(i)| \sum_{j\in\mathbb{Z}} |g(j)| = \|f\|_{A(\mathbb{T})} \|g\|_{A(\mathbb{T})}.$$

$A(\mathbb{T})$ wird auch als **Fourieralgebra** bezeichnet. Später, beim *Satz von Wiener*, werden wir diese Algebra brauchen.

(*iv*) Der **Polynomring** $\mathbb{C}[z]$, also alle Polynome $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ in einer Variablen mit komplexen Koeffizienten, ist eine kommutative Banachalgebra mit dem konstanten Polynom 1 als Einselement, wobei die Abbildung $(p, q) \mapsto pq$ der Polynommultiplikation entspricht.

(*v*) Die **Diskalgebra** $H(\mathbb{D})$ der im Inneren der Kreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ analytischen Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ mit $\sum_{n=0}^\infty |a_n| < \infty$ ist mit der konstanten Einsfunktion und der Norm $\|f\|_{H(\mathbb{D})} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$ unter punktweiser Multiplikation als abgeschlossener Teilraum $\{f \in A(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \text{ für } n < 0\}$ von $A(\mathbb{T})$ eine kommutative Banachalgebra.

3.2 Elementare Begriffe

Unser Ziel in diesem Kapitel ist der *Satz von Gelfand-Mazur* samt Beweis. Dafür führen wir zunächst ein paar wesentliche Begriffe ein.

Definition 3.2.1 Wir nennen ein Element x einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ **invertierbar**, falls es ein $y \in \mathfrak{B}$ gibt mit $xy = yx = e$. Als $\mathrm{Inv}\,(\mathfrak{B}) := \{x \in \mathfrak{B} : x \text{ ist invertierbar}\}$ bezeichnen wir die **Menge aller invertierbaren Elemente** und $y := x^{-1}$ als **Inverse** von x.

Bemerkung 3.2.2

(*i*) Für $x \in \mathfrak{B},\ 0x = x0 = 0 \neq e$ folgt $0 \notin \mathrm{Inv}(\mathfrak{B}) \Rightarrow \mathrm{Inv}(\mathfrak{B}) \neq \mathfrak{B}$.

(*ii*) Besitzt $x \in \mathfrak{B}$ eine Links- und eine Rechtsinverse, also $zx = e = xy$ für $y, z \in \mathfrak{B}$, dann folgt aufgrund von $z = ze = z(xy) = (zx)y = ey = y$, dass $x \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$. Die Inverse ist somit eindeutig.

(*iii*) $\mathrm{Inv}(\mathfrak{B}, .)$ ist eine **Gruppe**, besitzt also ein neutrales Element e, sowie ein inverses Element x^{-1} und die Multiplikation ist assoziativ.

(*iv*) Für $x \in \mathfrak{B}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\lambda x \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$ mit $(\lambda x)^{-1} = \frac{1}{\lambda} x^{-1}$.

Definition 3.2.3

(*i*) $\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ invertierbar}\}$ heißt **Spektrum** von x. Um die Algebra kennzuzeichnen, schreiben wir auch $\sigma_{\mathfrak{B}}(x)$.

(*ii*) Das Komplement $\mathbb{C} \setminus \sigma(x) =: \rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ ist invertierbar}\}$ heißt **Resolventenmenge**. Wir schreiben auch $\rho_{\mathfrak{B}}(x)$.

(*iii*) Die Abbildung $R_\lambda(x) : \rho(x) \to \mathfrak{B}, \lambda \mapsto (x - \lambda e)^{-1}$ heißt **Resolventenabbildung** oder kurz **Resolvente**.

(*iv*) Für $x \in \mathfrak{B}$ definieren wir den **Spektralradius** von x als $r(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Lemma 3.2.4 Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra mit Einselement e und $x \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$, d.h. $0 \notin \sigma(x)$. Dann gilt: $\sigma(x^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Beweis. Für $x^{-1} \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$ folgt sofort $0 \notin \sigma(x)$. Jetzt nutzen wir die Gruppeneigenschaft von $\mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$ aus, für $\lambda \neq 0$ gilt:

$$x - \lambda e \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} e - x^{-1} = \frac{1}{\lambda} x^{-1}(x - \lambda e) \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$$

$\square$

Satz 3.2.5 (Liouville) *Sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze, beschränkte Funktion, d.h. eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ und es gibt eine Konstante c mit $|\phi(z)| \leq c \; \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist ϕ konstant.*

Lemma 3.2.6 Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra und $x \in \mathfrak{B}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $\sigma(x)$ ist nichtleer.

(ii) $\sigma(x)$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(iii) $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ und $r(x) \leq \|x\|$.

(iv) $\rho(x)$ ist offen und $R_\lambda(x)$ ist analytisch.

(v) Für jedes $x \in \mathfrak{B}$ mit $\|x\| < 1$ gilt $(e-x) \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$ mit $(e-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, wobei $x^0 := e$ und die $\mathfrak{B}$-wertige Reihe absolut konvergiert.

(vi) Die Abb. $\mathrm{Inv}(\mathfrak{B}) \to \mathrm{Inv}(\mathfrak{B}),\; x \mapsto x^{-1}$, ist bijektiv und stetig.

(vii) **Spektralabbildungssatz**: Sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann gilt für ein $x \in \mathfrak{B}$: $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$ mit $p(\sigma(x)) := \{p(z) : z \in \sigma(x)\}$ für nicht konstante p und $p(\sigma(x)) := \{\mu\}$ für $p(z) = \mu$ mit $\mu \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage (i), da wir diese für den Beweis von *Gelfand-Mazur* brauchen.
Die $\mathfrak{B}$-wertige Funktion $\lambda \mapsto (x-\lambda e)^{-1}$ ist laut $(iv)\wedge(v)$ analytisch auf $\rho(x)$, d.h. sie kann lokal um jeden Punkt $\mu \in \rho(x)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden. $\Rightarrow$ für ein stetiges lineares Funktional ϕ auf $\mathfrak{B}'$ ist die Abbildung $\lambda \mapsto \phi((x-\lambda e)^{-1})$ auf $\rho(x)$ komplexwertig analytisch.
Jetzt führen wir einen kurzen Widerspruchsbeweis: Angenommen $\sigma(x)$ wäre leer. Dann wäre diese Abb. für jedes $\phi \in \mathfrak{B}'$ eine ganze Funktion, die im Unendlichen gegen 0 konvergiert. Nach dem *Satz von Liouville* also die Nullfunktion. Somit folgt für $\phi((x-\lambda e)^{-1}) = 0 \; \forall \phi \in \mathfrak{B}'$ nach *Hahn-Banach*, dass $(x-\lambda e)^{-1} = 0$. Dies ist aber offensichtlich unmöglich, da $0 \notin \mathrm{Inv}(\mathfrak{B})$.
$\Rightarrow \sigma(x) \neq \emptyset$. $\square$

3.3 Satz von Gelfand-Mazur

Der *Satz von Gelfand-Mazur* ist von grundlegender Bedeutung. Er besagt, dass $\mathbb{C}$ die einzige Banachalgebra ist, die zugleich ein Schiefkörper[1] ist.

Satz 3.3.1 (Gelfand-Mazur) *Eine Banachalgebra $\mathfrak{B}$, in der jedes $x \neq 0$ invertierbar ist, ist isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis. Für ein $x \in \mathfrak{B}$ gilt laut Satz 3.2.6 (i), dass $\sigma(x) \neq \emptyset$. $\Rightarrow$ es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$, für das $x - \lambda e$ nicht invertierbar ist. Nach Voraussetzung kann das aber nur für das Nullelement der Fall sein. Also $x - \lambda e = 0 \Leftrightarrow x = \lambda e$, d.h. ist x ein komplexes Vielfaches des Einselements e, wodurch die Behauptung folgt. $\square$

4 Kommutative Banachalgebren

4.1 Motivation

Eine Banachalgebra $\mathfrak{B}$ besitzt eine multiplikative Struktur. Deshalb wäre es von Vorteil stetige lineare Funktionale zu betrachten, die multiplikativ sind.

Definition 4.1.1 Wir nennen einen nichttrivialen Homomorphismus $m : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ ein **multiplikatives lineares Funktional**.

Die Idee ist, dass wir diese multiplikativen linearen Funktionale durch *maximale Ideale* beschreiben. Dazu *muss* die Banachalgebra kommutativ sein, denn für ein $m \neq 0$ gilt stets:

$$m(xy) = m(x)m(y) = m(y)m(x) = m(yx) \ \forall x, y \in \mathfrak{B}.$$

Wäre die Banachalgebra nichtkommutativ, so könnte m nicht punktetrennend operieren.

4.2 Gelfand-Theorie

Unser Ziel in diesem Unterkapitel ist der Begriff der *Gelfand-Transformation* und daraus resultierend der *Gelfand'sche Darstellungssatz*. Zu Beginn besprechen wir den Begriff des *Ideals* und listen einige wichtige Eigenschaften auf.

Definition 4.2.1

(i) Ein linearer Teilraum I von $\mathfrak{B}$ heißt **Ideal**, wenn aus $a \in I, x \in \mathfrak{B}$

[1] Ein **Schiefkörper** ist ein Ring mit Einselement $e \neq 0$, in dem jedes Element $x \neq 0$ ein multiplikatives Inverses x^{-1} besitzt.

folgt, dass $ax \in I$ und $xa \in I$.

(ii) Ein Ideal I heißt **echtes Ideal**, wenn es nichttrivial ist, also $I \neq \{0\}$ und $I \neq \mathfrak{B}$.

(iii) Ein Ideal I heißt **maximales Ideal**, wenn es in keinem größeren echten Ideal enthalten ist, d.h. falls jedes weitere echte Ideal J mit $I \subseteq J$ mit I übereinstimmt.

Lemma 4.2.2

(i) Jedes echte Ideal einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.

(ii) Maximale Ideale sind abgeschlossen.

(iii) In einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ mit Einselement e sind multiplikative lineare Funktionale stetig mit $\|m\| = m(e) = 1$.

Lemma 4.2.3 In einer kommutativen Banachalgebra $\mathfrak{B}$ gilt:

(i) Jedes maximale Ideal hat Kodimension 1.

(ii) Ein Element $x \in \mathfrak{B}$ ist genau dann in einem maximalen Ideal enthalten, wenn es nicht invertierbar ist.

(iii) Maximale Ideale sind genau die Kerne multiplikativer linearer Funktionale.

Wir bezeichnen die Menge aller multiplikativen linearen Funktionale einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ als den **Gelfandraum** Δ, den wir mit der **Gelfandtopologie** (= die Spurtopologie der schwach*-Topologie auf Δ) versehen.

Bemerkung 4.2.4 Wegen Satz 4.2.2 (iii) können wir Δ als eine Teilmenge des Dualraums $\mathfrak{B}'$ auffassen.

Satz 4.2.5 *In einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ mit Einselement ist der Gelfandraum Δ bzgl. der Gelfandtopologie ein kompakter (Hausdorff)Raum.*

Bemerkung 4.2.6 Satz 4.2.5 gilt nicht in einer Banachalgebra ohne Einselement.

Laut Definition der schwach*-Topologie[1] ist für $x \in \mathfrak{B}$ die Abb. $m \mapsto m(x)$ stetig auf Δ bzgl. der Gelfandtopologie. Wir bezeichnen die Abbildung

$$\mathfrak{B} \to C(\Delta),\ x \mapsto \hat{x} : \hat{x}(m) = m(x)$$

als die **Gelfandtransformation** und $\hat{x}$ als die **Gelfandtransformierte** von x.

Bemerkung 4.2.7 Der Raum $C(\Delta)$ ist mit der Maximumsnorm unter punktweiser Multiplikation eine Banachalgebra.

Der folgende Satz beschreibt eine wichtige Eigenschaft der Gelfandtransformation:

Satz 4.2.8 (Gelfand'scher Darstellungssatz) *In einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ ist die Gelfandtransformation $x \mapsto \hat{x}$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus von $\mathfrak{B}$ nach $C(\Delta)$ mit Abbildungsnorm 1.*
Für $\mathfrak{B}$ kommutativ gilt: $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$ und $\|\hat{x}\|_{C(\Delta)} = r(x) \leq \|x\|$.

Beweis. Es gilt für $x, y \in \mathfrak{B}$ und $m \in \Delta$:

$$\widehat{xy}(m) = m(xy) = m(x)m(y) = \hat{x}(m)\hat{y}(m) \text{ und } \hat{e}(m) = m(e) = 1.$$

Somit ist die Gelfand-Transformation ein Algebrenhomomorphismus.

Wegen $|\hat{x}(m)| = |m(x)| \leq \|m\|\|x\| = 1.\|x\| = \|x\|$ folgt $\|\hat{\cdot}\| \leq 1$ und wegen $\hat{e}(m) = 1$ dann $\|\hat{\cdot}\| \geq 1$, also $\|\hat{\cdot}\| = 1$.
In einer kommutativen Banachalgebra gilt nun wegen Lemma 4.2.3 (ii) und (iii): $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow x - \lambda e$ ist nicht invertierbar $\Leftrightarrow x - \lambda e$ ist in einem maximalen Ideal enthalten $\Leftrightarrow \exists m \in \Delta : m(x - \lambda e) = 0 \Leftrightarrow \exists m \in \Delta : m(x) = \lambda \Leftrightarrow \lambda \in \hat{x}(\Delta)$, also $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$.
Wegen Satz 3.2.6 (iii) und der Definition des Spektralradius folgt

$$\|\hat{x}\|_{C(\Delta)} = \|\hat{x}\|_\infty = \sup_{m \in \Delta} |\hat{x}(m)| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \hat{x}(\Delta)\} = r(x) \leq \|x\|.$$

□

Lemma 4.2.9 Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra und $x \in \mathfrak{B}$. Dann gilt: x ist genau dann invertierbar, wenn $\hat{x}(m) \neq 0\ \forall m \in \Delta$.
Es gilt zudem: $\widehat{(x^{-1})}(m) = (\hat{x}(m))^{-1}$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Beweis des *Gelfand'schen Darstellungssatzes*, sowie der Tatsache, dass $m(x^{-1}) = m(x)^{-1}$.

[1]= die schwächste Topologie auf dem Dualraum, die alle Abbildungen m stetig macht.

4.3 Satz von Wiener

Lange Zeit hatte man keinen schönen Beweis für den *Satz von Wiener* gefunden. Man musste sich mit den Mitteln der Fourieranalysis begnügen. Erst die Anwendung der Theorie der Banachalgebren ermöglichte einen kurzen sowie allgemein verständlichen Beweis.

Satz 4.3.1 (Wiener) *Sei $f \in A(\mathbb{T})$ mit $f(t) \neq 0$ für $t \in \mathbb{T}$. Dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ in $A(\mathbb{T})$.*

Beweis. Wir nützen die Eigenschaft aus, dass f in $A(\mathbb{T})$ genau dann invertierbar ist, wenn $0 \notin \sigma(f)$.
Laut *Gelfand'schem Darstellungssatz* gilt: $\sigma(f) = \hat{f}(\Delta) = f(\mathbb{T})$. Betrachten wir nämlich die zu $A(\mathbb{T})$ isometrisch isomorphe Algebra $\ell_1(\mathbb{Z})$ mit Faltung $* : \ell_1(\mathbb{Z}) \times \ell_1(\mathbb{Z}), f * g(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(n-m)g(m)$, dann können wir den Gelfandraum von $(\ell_1(\mathbb{Z}), *)$ mit $\mathbb{T}$ identifizieren. Die Gelfandtransformation unter dieser Identifikation entspricht der Fourierrückstransformation $\ell_1(\mathbb{Z}) \to A(\mathbb{T})$.
Nach Voraussetzung gilt $0 \notin f(\mathbb{T})$, also auch $0 \notin \sigma(f)$. Damit folgt, dass f in $A(\mathbb{T})$ invertierbar ist, d.h. $\exists$ Inverse $\frac{1}{f} \in A(\mathbb{T})$. □

4.4 Halbeinfache Algebren

Unter den bisher getroffenen Voraussetzungen musste die Gelfandtransformation nicht injektiv sein.

Definition 4.4.1 Wir nennen eine kommutative Banachalgebra $\mathfrak{B}$ **halbeinfach**, wenn ihre Gelfandtransformation injektiv ist, d.h. $\mathfrak{B}$ ist genau dann halbeinfach, wenn

$$\mathrm{Rad}(\mathfrak{B}) := \bigcap_{m\in\Delta} \ker(m) = \{0\}$$

ist. $\mathrm{Rad}(\mathfrak{B})$ heißt **Radikal** von $\mathfrak{B}$.

Lemma 4.4.2 Gilt $\|x^2\| = \|x\|^2 \ \forall x \in \mathfrak{B}$, so ist die Gelfandtransformation isometrisch und $\mathfrak{B}$ halbeinfach.

Beweis. Mittels Induktion folgt $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$ und somit $\|\hat{x}\|_\infty = r(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|x\|$. □

5 Topologischer Nullteiler

5.1 Definition und Beispiele

Wie bereits erwähnt verallgemeinert der topologische Nullteilers den algebraischen Begriff des Nullteilers. Außerdem liefert der topologische Nullteiler einige interessante Resultate und Anwendungen.

Definition 5.1.1 Wir nennen ein Element $x \neq 0$ einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ einen **linken topologischen Nullteiler**, falls es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{B}$ gibt, sodass

(i) $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $xx_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$.

Ein **rechter topologischer Nullteiler** wird analog definiert, also bei (ii) dann $x_n x \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$.
Ein **beidseitiger** (oder **zweiseitiger**) **topologischer Nullteiler** ist zugleich ein linker und ein rechter topologischer Nullteiler.
In kommutativen Banachalgebren sind alle drei Begriffe ident, und wir sprechen demnach von **topologischen Nullteilern**.

Lemma 5.1.2 Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra mit Einslement e und $x \in \mathfrak{B}$ ein topologischer Nullteiler. Dann ist x nicht invertierbar.

Beweis. Da x ein top. Nullteiler ist, gibt es bekanntlich eine Folge $(x_n) \in \mathfrak{B}, n \in \mathbb{N}$, für die $\|x_n\| = 1$ und $xx_n \longrightarrow 0$ gilt. Angenommen x wäre invertierbar. Dann gäbe es ein $x^{-1} \in \mathfrak{B}$, s.d. $x^{-1}x = e$. Unter Ausnützung von Definition 4.5.1 (i) ergibt sich, dass

$$1 = \|x_n\| = \|ex_n\| = \|x^{-1}xx_n\| \leq \|x^{-1}\| \underbrace{\|xx_n\|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0,$$

was offensichtlich unmöglich ist. $\square$

Bemerkung 5.1.3 Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht gültig, d.h. nicht jedes Element, das nicht invertierbar ist, ist automatisch ein topologischer Nullteiler. Wir werden aber sehen, dass unter bestimmten Umständen die Umkehrung doch möglich ist, siehe dazu Abschnitt 5.3.

Beispiele 5.1.4

(i) Linke (rechte, zweiseitige) algebraische Nullteiler sind linke (rechte, zweiseitige) topologische Nullteiler. In diesem Fall wählen wir hierzu eine konstante Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Ein Operator auf einem Banachraum X, der injektiv aber nicht surjektiv ist, und dessen Bild dicht in X liegt, ist ein linker topologischer Nullteiler.

(iii) Jedes quasinilpotente Element[1] ist ein topologischer Nullteiler. Ein wichtiger Vertreter dieser Klasse ist der **Volterra-Operator**: Sei T ein Hilbert-Schmidt-Operator (d.h. ein stetiger linearer Operator auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$). Definiere den Volterra-Operator V als

$$V := Tf(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \text{ für } f \in L^2([0,1]) \text{ und } x \in (0,1).$$

V hat keine Eigenwerte $\neq 0$ und ist insbesondere ein kompakter Operator. Nach der Spektraltheorie für kompakte Operatoren gilt: $\sigma(V) = \{0\}$.

(iv) Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra mit Einselement e, $x \in \mathfrak{B}$ kein Vielfaches von e und λ aus dem topologischen Rand von $\sigma(x)$. Dann ist $x - \lambda e$ ein topologischer Nullteiler.

Aus (iv) ergibt sich mit dem *Satz von Gelfand-Mazur* folgende wichtige Aussage nach *Zelazko*: *Eine Banachalgebra ist entweder isomorph zu $\mathbb{C}$ oder sie hat topologischen Nullteiler.* Bevor wir diese Behauptung zeigen, brauchen wir zunächst den folgenden Satz:

Satz 5.1.5 *Sei $\mathfrak{B}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement. Dann gilt: $\mathfrak{B}$ hat genau dann keinen topologischen Nullteiler, wenn $\mathfrak{B}$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.*

Beweis.

" $\Rightarrow$ " : Sei $x \in \mathfrak{B}$ ein topologischer Nullteiler $\Rightarrow x$ ist nicht invertierbar laut Lemma 5.1.2 $\Rightarrow \mathfrak{B}$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{C}$.

" $\Leftarrow$ " : Wir müssen also zeigen: Falls $\mathfrak{B}$ nicht isomorph zu $\mathbb{C}$ ist, dann besitzt $\mathfrak{B}$ einen topologischen Nullteiler.

$\mathfrak{B}$ nicht isomorph zu $\mathbb{C} \Rightarrow \mathfrak{B}$ besitzt ein Element x_0, das kein Vielfaches des Einselements e ist, d.h. $x_0 \neq \lambda e$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig.

Wir zeigen: falls $\lambda_0 \in \partial(\sigma(x_0)) := \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma(x_0)} \cap \overline{\sigma(x_0)}$, d.h. falls λ_0 aus dem topologischen Rand von $\sigma(x_0) \neq \emptyset$ ist, dann ist das Element $x_0 - \lambda_0 e$ ein topologischer Nullteiler in $\mathfrak{B}$.

Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \sigma(x_0)$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen, die gegen λ_0 konvergiert, also $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$. Wegen Lemma 4.2.9 sind die Elemente $x_0 - \lambda_n e$ in $\mathfrak{B}$ invertierbar. Definiere nun eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und normiere geeignet:

[1] Ein Element $x \in \mathfrak{B}$ heißt **nilpotent**, wenn es eine positive natürliche Zahl n gibt, s.d. $x^n = 0$ und **quasinilpotent** (oder **topologisch nilpotent**), falls $\sigma(x) = \{0\}$.

$$y_n := \frac{(x_0-\lambda_n e)^{-1}}{\|(x_0-e)^{-1}\|} \Rightarrow \|y_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

womit Bedingung (i) in der Definition des topologischen Nullteilers erfüllt ist. Weiters gilt, dass

$$\|(x_0 - \lambda_n e)^{-1}\| \geq \|(\widehat{x_0 - \lambda_n} e)^{-1}\|_{C(\Delta)} = \max_{m\in\Delta} |(x_0 - \lambda_n e)^{-1}(m)| =$$
$$\max_{m\in\Delta} |m(x_0) - \lambda_n|^{-1} \geq |\lambda_0 - \lambda_n|^{-1} = \frac{1}{\underbrace{|\lambda_0 - \lambda_n|}_{\longrightarrow 0}} \longrightarrow \infty.$$

Somit bekommen wir die folgende Abschätzung:

$$\|(x_0-\lambda_0 e)y_n\| \leq \|(x_0-\lambda_n e)y_n\| + |\lambda_0-\lambda_n| \underbrace{\|y_n\|}_{=1} = \left\|(x_0 - \lambda_n e)\frac{(x_0-\lambda_n e)^{-1}}{\|(x_0-e)^{-1}\|}\right\| +$$
$$|\lambda_0 - \lambda_n| = \left\|e\frac{1}{\|(x_0-e)^{-1}\|}\right\| + |\lambda_0 - \lambda_n| = \underbrace{\|e\|}_{=1} \underbrace{\left\|\frac{1}{(x_0 - e)^{-1}}\right\|}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{|\lambda_0 - \lambda_n|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0.$$

Somit folgt, dass $(x_0 - \lambda_0 e)y_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$, womit Bedingung (ii) erfüllt ist. Also ist das Element $x_0 - \lambda_0 e$ ein topologischer Nullteiler. □

5.2 Satz von Zelazko

Der *Satz von Zelazko* ist eine Verallgemeinerung von Satz 5.1.5.

Definition 5.2.1 Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra <u>ohne</u> Einselement. Dann kann $\mathfrak{B}$ in eine Banachalgebra $\mathfrak{B}_1$ <u>mit</u> Einselement eingebettet werden, so dass $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B} \bigoplus \{\lambda e\}$ und $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$ für $x \in \mathfrak{B}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. $\mathfrak{B}_1$ ist somit eine Banachalgebra, die als **direkte Summe** zweier Banachräume fungiert.

Satz 5.2.2 (Zelazko) *Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra (weder Kommutativität noch Existenz eines Einselements werden vorausgesetzt). Dann ist $\mathfrak{B}$ entweder isomorph zu $\mathbb{C}$ oder $\mathfrak{B}$ hat topologischen Nullteiler.*

Beweis. Der Beweis stützt sich im Wesentlichen auf Satz 5.1.5. Aus den vorherigen Resultaten können wir leicht sehen, dass wenn jede kommutative Unteralgebra von $\mathfrak{B}$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist, $\mathfrak{B}$ selbst isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Deshalb nehmen wir oBdA an, dass $\mathfrak{B}$ kommutativ ist.
Es bleibt also zu zeigen: falls $\mathfrak{B}$ nicht isomorph zu $\mathbb{C}$ ist, dann hat $\mathfrak{B}$ topologischen Nullteiler. In Anbetracht des Satzes 5.1.5 habe $\mathfrak{B}$ kein Einselement. Setze nun $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B} \bigoplus \{\lambda e\}$, wobei $\mathfrak{B}_1$ laut Satz 5.1.5 topologischen Nullteiler besitzt. $\Rightarrow \exists$ Elemente $x_n \in \mathfrak{B}$ und komplexe Zahlen $\lambda_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|(x_n, \lambda_n)\| = \|x_n\| + |\lambda_n| = 1 \text{ und } \lim_{n \longrightarrow \infty} \|(x_0 + \lambda_0 e)(x_n + \lambda_n e)\| = 0$$

für $x_0 \in \mathfrak{B}$ mit $x_0 \neq 0$.

Wir nehmen an, dass die beschränkte Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, d.h. $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. $\Rightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|(x_0 + \lambda_0 e)(x_n + \lambda e)\| = 0$. Laut Voraussetzung hat aber $\mathfrak{B}$ kein Einselement und es folgt somit, dass $\lambda_0 \lambda = 0$. Wir betrachten jetzt 3 mögliche Fälle:

1. Fall: $\lambda_0 = \lambda = 0$. $\Rightarrow x_0 x_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. In diesem Fall hat also $\mathfrak{B}$ selbst topologische Nullteiler.

2. Fall: $\lambda_0 = 0$ und $\lambda \neq 0$. $\Rightarrow x_0(x_n + \lambda e) \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Es ergeben sich nun zwei mögliche Unterfälle:

(i) Wir nehmen an die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent, d.h. $x_n \longrightarrow y$. $\Rightarrow$ $x_0(y + \lambda e) = 0$ und es gibt ein $z \in \mathfrak{B}$, sodass $u = z(y + \lambda e) \neq 0$. Wäre nämlich $u = z(y + \lambda e) = 0 \Leftrightarrow zy = -z\lambda \Leftrightarrow zy = -z\lambda(\frac{-y}{\lambda})$, dann wäre das Element $\frac{-y}{\lambda}$ ein Einselement von $\mathfrak{B}$, was aber ein Widerspruch zur Annahme ist. Demnach ist $u \in \mathfrak{B}$ und $ux_0 = 0$. $\Rightarrow \mathfrak{B}$ hat algebraische Nullteiler, und somit wegen Beispiel 5.1.4 (i) automatisch auch topologische Nullteiler.

(ii) Sei nun die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, d.h. $\exists\ \delta > 0$ und eine Indexfolge $k_n \longrightarrow \infty$, sodass $\|x_n - x_{k_n}\| \geq \delta$. $\Rightarrow x_0(x_n - x_{k_n}) = x_0(x_n + \lambda e - x_{k_n} - \lambda e) = x_0(x_n + \lambda e) - x_0(x_{k_n} + \lambda e) \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Also ist x_0 ein topologischer Nullteiler.
(Anmerkung: Die Bedingung $\|x_n\| = 1$ in der Definition des topologischen Nullteilers kann durch $\|x_n\| \geq \delta > 0$ abgeschwächt werden.)

3. Fall: $\lambda_0 \neq 0$ und $\lambda = 0$. $\Rightarrow (x_0 + \lambda_0 e)x_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Analoge Vorgehensweise wie in Fall 2: es gibt ein $y \in \mathfrak{B}$, sodass $u = (x_0 + \lambda_0 e)y \neq 0$. $\Rightarrow u \in \mathfrak{B}$ und $ux_n \longrightarrow 0$, sowie $\|x_n\| \longrightarrow 1$ für $n \longrightarrow \infty$. Also hat $\mathfrak{B}$ erneut topologische Nullteiler. $\square$

5.3 Fortsetzung von Banachalgebren

Topologische Nullteiler in einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ können als Elemente beschrieben werden, die keine Inverse in einer Erweiterung von $\mathfrak{B}$ besitzen.

Definition 5.3.1 Sei $\mathfrak{B}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement e. Wir nennen eine Algebra $\tilde{\mathfrak{B}}$ eine **Erweiterung** (oder **Fortsetzung**) von $\mathfrak{B}$, wenn $\tilde{\mathfrak{B}}$ eine Unteralgebra mit Einselement e besitzt und isomorph zu $\mathfrak{B}$ ist.
Eine Fortsetzung $\tilde{\mathfrak{B}}$ heißt **isometrisch**, falls die betrachtete Unteralgebra

isometrisch zu $\mathfrak{B}$ ist. Wir schreiben dafür in beiden Fällen kurz $\mathfrak{B} \subset \tilde{\mathfrak{B}}$.

Definition 5.3.2 Ein Element $x \in \mathfrak{B}, x \neq 0$, heißt **singulär**, wenn es nicht invertierbar ist und **permanent singulär**, wenn es nicht invertierbar in $\tilde{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{B}$ ist.

Satz 5.3.3 (Arens) *Sei $\mathfrak{B}$ ein kommutative Banachalgebra mit Einselement e. Dann gilt: Ein Element $x \in \mathfrak{B}$ ist genau dann permanent singulär, wenn es ein topologischer Nullteiler ist.*

Beweis. Ein topologischer Nullteiler in $\mathfrak{B}$ ist klarerweise ein topologischer Nullteiler in jeder Erweiterung $\tilde{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{B}$. $\Rightarrow$ wegen Lemma 5.1.2 also nicht in $\tilde{\mathfrak{B}}$ invertierbar und deshalb permanent singulär.
Die andere Richtung ist sehr technisch. Ein vollständiger Beweis findet sich in [1], S.59. § 14.7. □

Wie wir gesehen haben ist jedes Element, das kein topologischer Nullteiler ist, in einer Fortsetzung $\tilde{\mathfrak{B}}$ invertierbar. Allgemein betrachtet gibt es keine einfache Fortsetzung all dieser Elemente. Wir können aber folgendermaßen vorgehen: $\mathfrak{B}$ kann in $\tilde{\mathfrak{B}}$ eingebettet werden, sodass jeder topologische Nullteiler in $\mathfrak{B}$ als echter algebraischer Nullteiler realisiert werden kann.
Es gilt:

Satz 5.3.4 *Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra (Kommutativität und Existenz eines Einselements werden nicht vorausgesetzt). Dann gibt es zu jeder Banachalgebra $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra $\tilde{\mathfrak{B}}$, sodass gilt:*

(i) $\mathfrak{B}$ ist isometrisch isomorph zu einer Unterbanachalgebra von $\tilde{\mathfrak{B}}$.

(ii) Jeder topologische Nullteiler in $\mathfrak{B}$ ist ein Nullteiler in $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Beweis. Wir zeigen die Konstruktion von $\tilde{\mathfrak{B}}$: Sei $\bar{\mathfrak{B}}$ die Algbera aller beschränkten Folgen in $\mathfrak{B}$, s.d. für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{\mathfrak{B}}$, $|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}| := \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. Dann ist $N := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{\mathfrak{B}} : |(x_n)_{n\in\mathbb{N}}| = 0\}$ ein Ideal in $\bar{\mathfrak{B}}$ und der Quotientenraum (bzw. Faktorraum) $\tilde{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{B}}/N$ eine mit der durch $|.|$ induzierten Quotientennorm eine Banachalgebra. Durch konstante Folgen können wir $\mathfrak{B}$ isometrisch isomorph in $\tilde{\mathfrak{B}}$ einbetten.
Sei jetzt $x \in \mathfrak{B}$ ein linker topologischer Nullteiler. Dann gibt es laut Definition eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{B}$ mit $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|xx_n\| = 0$. Deswegen ist x, aufgefasst als Element in $\tilde{\mathfrak{B}}$, ein linker algebraischer Nullteiler. Analoge Vorgehensweise für einen rechten topologischen Nullteiler. □

6 Literaturverzeichnis

[1] WIESLAW ZELAZKO: *Banach Algebras (1973)*, Elsevier Publishing Company, ISBN 0-444-40991-2.

[2] DIRK WERNER: *Funktionalanalysis (2011), 7. Auflage*, Springer-Verlag, ISBN 978-3-642-21016-7.

[3] EBERHARD KANIUTH: *A course in commutative Banach algebras (2009)*, Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-72475-1.

[4] MARTIN BLÜMLINGER: *Analysis 3*, Skriptum, TU Wien WS 2013:
http://www.asc.tuwien.ac.at/ blue/Ana3.pdf

[5] HARALD WORACEK, MICHAEL KALTENBÄCK, MARTIN BLÜMLINGER: *Funktionalanalysis 1*, Skriptum, TU Wien SS 2015:
http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/fana2015.pdf

[6] MARTIN BLÜMLINGER: *Funktionalanalysis 2*, Skriptum, TU Wien WS 2014:
http://www.asc.tuwien.ac.at/ blue/Fana2-2010.pdf

[7] MICHAEL KALTENBÄCK: *Funktionalanalysis 2*, Skriptum, TU Wien WS 2013: http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/main.pdf