Seminar aus Funktionalanalysis

Der Schilow'sche Idempotentensatz

Filip Žepinić, B.Sc., e0625223

4. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Schilow'sche Idempotentensatz wurde vom russischen Mathematiker Georgi Jewgenjewitsch **Schilow** (1917 - 1975) im Jahre 1954 aufgestellt und bewiesen. Von ihm stammt auch der Begriff des *Schilow-Randes*. Schilow war neben Größen wie **Gelfand**, **Arens**, **Zelazko**, **Mazur** u.a. einer der führenden Mathematiker auf dem Gebiet der Banachalgebren.
Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass der Gelfandraum einer kommutativen Banachalgebra mit Einselement kompakt ist. Die Umkehrung, d.h. dass aus der Kompaktheit des Gelfandraumes die Existenz eines Einselements in der Banachalgebra folgt, ist nicht-trivial und wie sich zeigte, nur für halbeinfache Banachalgebren gültig.
Der Idempotentensatz besagt nun folgendes: die charakteristische Funktion einer kompakten, offenen Teilmenge des Gelfandraumes entspricht der Gelfandtransformierten eines idempotenten Elements der kommutativen Banachalgebra.
Leider gibt es bis heute keinen einfachen Beweis des Satzes, sodass wir später bei der Beweisführung mehrere Lemmas, sowie den aus den Komplexen Analysis bekannten holomorphen Funktionalkalkül mehrerer Veränderlicher gebrauchen werden.
Am Ende präsentieren wir kurz zwei wichtige Anwendungen des Satzes, sowie eine Aussage für reguläre Banachalgebren.

2 Grundlagen

2.1 Elementare Begriffe

Definition 2.1.1 Eine **Banachalgebra** mit Einselement ist ein Banachraum A auf dem eine bilineare assoziative Multiplikation

$$A \times A \to A, (x, y) \mapsto xy$$

erklärt ist.
Die Banachalgebra erfüllt $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \ \forall x, y \in A$ und besitzt eine multiplikative Einheit, d.h. ein **Einselement e** mit $\|e\| = 1$ und $xe = ex = x$ $\forall x \in A$.
Eine Banachalgebra heißt **kommutativ**, falls $xy = yx \ \forall x, y \in A$ gilt.

Definition 2.1.2
(i) Wir nennen ein Element x einer Banachalgebra A **invertierbar**, falls es ein $y \in A$ gibt mit $xy = yx = e$. Als Inv $(A) := \{x \in \mathfrak{B} : x \text{ ist invertierbar}\}$ bezeichnen wir die **Menge aller invertierbaren Elemente** und $y := x^{-1}$ als **Inverse** von x.

(ii) $\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ invertierbar}\}$ heißt **Spektrum** von x.

Um die Algebra kennzuzeichnen, schreiben wir auch $\sigma_A(x)$.

(iii) Das Komplement $\mathbb{C} \setminus \sigma(x) =: \rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ ist invertierbar}\}$ heißt **Resolventenmenge**. Wir schreiben auch $\rho_A(x)$.

(iv) Die Abbildung $R_\lambda(x) : \rho(x) \to A, \lambda \mapsto (x - \lambda e)^{-1}$ heißt **Resolventenabbildung** oder kurz **Resolvente**.

(v) Für $x \in A$ definieren wir den **Spektralradius** von x als
$r(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ bzw. $r_A(x)$.

2.2 Gelfandraum

Definition 2.2.1 Ein Homomorphismus $\phi : A \to \mathbb{C}$ heißt ein **multiplikatives lineares Funktional**, wenn $\phi \neq 0$ und

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \ \forall x, y \in A.$$

Definition 2.2.2 Ein linearer Teilraum I von A heißt **Ideal**, wenn aus $a \in I, x \in A$ folgt, dass $ax \in I$ und $xa \in I$.

Definition 2.2.3 Wir bezeichnen die Menge aller multiplikativen linearen Funktionale einer Banachalgebra A als den **Gelfandraum** Δ (bzw. $\Delta(A)$ um die Algebra zu kennzeichnen), den wir mit der **Gelfandtopologie** (= die Spurtopologie der schwach*-Topologie auf Δ) versehen.

Definition 2.2.4 Laut Definition der schwach*-Topologie[1] ist für $x \in A$ die Abb. $\phi \mapsto \phi(x)$ stetig auf $\Delta(A)$ bzgl. der Gelfandtopologie. Wir bezeichnen die Abbildung

$$\widehat{A} : A \to C(\Delta(A)), \ x \mapsto \widehat{x} : \widehat{x}(\phi) = \phi(x)$$

als die **Gelfandtransformation** und $\widehat{x}$ als die **Gelfandtransformierte** von x.

Satz 2.2.5 (Gelfand'scher Darstellungssatz) *In einer Banachalgebra A ist die Gelfandtransformation $x \mapsto \widehat{x}$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus von A nach $C(\Delta(A))$ mit Abbildungsnorm 1.*
Für A kommutativ gilt: $\widehat{x}(\Delta(A)) = \sigma_A(x)$ und $\|\widehat{x}\|_{C(\Delta(A))} = r_A(x) \leq \|x\|$.

Beweis. Siehe [1], S. 54 und 55, § 2.2: Satz 2.2.5 und 2.2.7. ∎

[1]= die schwächste Topologie auf dem Dualraum, die alle Abbildungen ϕ stetig macht.

Satz 2.2.6 *In einer kommutativen Banachalgebra A mit Einselement ist der Gelfandraum $\Delta(A)$ bzgl. der Gelfandtopologie ein kompakter (Hausdorff)-Raum.*

Beweis. Siehe [1], S. 52, § 2.2: Satz 2.2.3. ■

Bemerkung 2.2.7 In einer Algebra A ohne Einselement gilt Satz 2.2.6 nicht.

2.3 Halbeinfache Banachalgebren

Viele Sätze und Anwendungen basieren auf halbeinfachen Algebren.

Definition 2.3.1 Wir nennen eine kommutative Banachalgebra A **halbeinfach**, wenn ihre Gelfandtransformation injektiv ist, d.h. A ist genau dann halbeinfach, wenn

$$\mathrm{Rad}(A) := \bigcap_{\phi \in \Delta(A)} \ker(\phi) = \{0\}$$

ist. $\mathrm{Rad}(A)$ heißt das **Radikal** von A.

Bemerkung 2.3.2 Offensichtlich ist $\mathrm{Rad}(A)$ ein abgeschlossenes Ideal von A. $\mathrm{Rad}(A)$ entspricht A, falls $\Delta(A) = \emptyset$. Wir nennen A **radikal**, wenn $\mathrm{Rad}(A) = A$.

Lemma 2.3.3 *Sei A eine kommutative Banachalgebra und $x \in A$. Dann gilt:*

$$x \in Rad(A) \Longleftrightarrow \widehat{x} = 0 \Longleftrightarrow r_A(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Somit ist A genau dann halbeinfach, wenn für jedes $x \in A$ gilt: $r_A(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Gelfand'schen Darstellungssatz. ■

In Anbetracht von Satz 2.2.6 stellt sich die Frage, ob eine halbeinfache kommutative Banachalgebra ein 1-El. besitzt, falls der Gelfandraum kompakt ist. Wie bereits zu Beginn erwähnt, stellt sich diese Aussage als wahr heraus - sie ist eine direkte Konsequenz des Idempotentensatzes von Schilow.

3 Der Idempotentensatz von Schilow

3.1 Vorbereitungen

Bevor wir den Satz formulieren und schließlich beweisen, wollen wir zunächst noch einige Begriffe klären, sowie den holomorphen Funktionalkalkül angeben.

Definition 3.1.1 Sei A eine kommutative Banachalgebra mit 1-El. und $x_1, ..., x_n \in A$. Dann ist das **gemeinsame Spektrum** $\sigma_A(x_1, ..., x_n)$ von $x_1, ..., x_n$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$\sigma_A(x_1, ..., x_n) = \{(\phi(x_1), ..., \phi(x_n)) : \phi \in \Delta(A)\}.$$

Bemerkung 3.1.2 Da $\Delta(A)$ in einer Banachalgebra mit 1-El. kompakt und die Abbildung $\Delta(A) \to \mathbb{C}^n, \phi \mapsto (\phi(x_1), ..., \phi(x_n))$ stetig ist, folgt dass $\sigma_A(x_1, ..., x_n)$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist.

Satz 3.1.3 (Holomorpher Funktionalkalkül mehrerer Veränderlicher) *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einselement und $x_1, ..., x_n \in A$. Sei weiters f eine komplexwertige, holomorphe Funktion in n Veränderlichen, die in einer Umgebung des gemeinsamen Spektrums $\sigma_A(x_1, ..., x_n)$ von $x_1, ..., x_n$ definiert ist. Dann gibt es ein Element $x \in A$, sodass:*

$$\widehat{x}(\phi) = f(\widehat{x_1}(\phi), ..., \widehat{x_n}(\phi)) \quad \forall \phi \in \Delta(A). \qquad (1)$$

Beweis. Der Beweis beruht im Wesentlichen auf dem **Fortsetzungssatz von Oka**, siehe dazu [1], S. 148, § 3.1: Satz 3.1.10. ∎

Bemerkung 3.1.4 Die Identität (1) kann auch als

$$\phi(x) = f(\phi(x_1), ..., \phi(x_n)) \quad \forall \phi \in \Delta(A)$$

geschrieben werden. Zudem ist das Element $x \in A$ eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Elemente $x, y \in A$ gibt, s.d. $\phi(x) = \phi(y)\ \forall \phi \in \Delta(A) \Leftrightarrow \phi(x) - \phi(y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker(\phi)$. Nun ist aber bekannt, dass die Kerne der Homomorphismen aus $\Delta(A)$ genau den maximalen Idealen von A entsprechen. Somit liegt $x - y$ im Durchschnitt aller maximalen Ideale, also im $\mathrm{rad}(A)$. Für halbeinfache Algebren ist aber $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$, woraus wir $x = y$ schließen können.

Definition 3.1.5 Ein Element a einer Banachalgebra A heißt **idempotent** (unter Algebrenmultiplikation), falls gilt: $a^2 = a \quad \forall\ a \in A$.

Bemerkung 3.1.6 Falls a idempotent ist, können wir sogar induktiv fortsetzen: $a = a^2 = a^3 = a^4 = ... = a^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Z.B. ist das 1-El. e stets idempotent, da $ee = e$.

3.2 Der Idempotentensatz

Kommen wir nun zum eigentlichen Satz.

Satz 3.2.1 (Schilow'scher Idempotentensatz) *Sei A eine kommutative Banachalgebra (Existenz eines Einselements wird nicht vorausgesetzt) und C eine kompakte, offene Teilmenge von $\Delta(A)$. Dann gibt es ein idempotentes Element $a \in A$, sodass $\widehat{a}$ mit der charakteristischen Funktion von C übereinstimmt.*

Beweisidee. Wir nehmen an, dass A eine kommutative Banachalgebra mit 1-Element ist und sich der Gelfandraum $\Delta(A)$ darstellen lässt als eine disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer kompakter Teilmengen U_1 und U_2, also $\Delta(A) = U_1 \cup U_2$. Dann gibt es ein idempotentes Element $x \in A$, s.d. $\phi(x) = 0 \ \forall \phi \in U_1$ und $\phi(x) = 1 \ \forall \phi \in U_2$.

Nun gehen wir folgendermaßen vor: wir suchen geeignete Elemente $x_1, ..., x_n \in A$, dessen gemeinsames Spektrum ebenso eine disjunkte Vereinigung zweier kompakter Teilmengen C_1 und C_2 ist, also $\sigma_A(x_1, ..., x_n) = C_1 \cup C_2$.
$\Rightarrow \exists$ disjunkte, offene Umgebungen W_1 und W_2 von C_1 bzw. C_2.

Weiters sei $f : W_1 \cup W_2 \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in einer Umgebung des gemeinsamen Spektrums, wobei f auf W_1 gleich 0 und auf W_2 gleich 1 ist. Falls jetzt A eine halbeinfache Banachalgebra ist, dann ist $x = f(x_1, ..., x_n)$ das gesuchte idempotente Element. Zum Abschluss des Beweises lassen wir dann die Voraussetzung der Halbeinfachheit fallen.

Beweis.

Lemma 3.2.2 *Sei A eine kommutative Banachalgebra und $\phi_1, \phi_2 \in \Delta(A)$ mit $\phi_1 \neq \phi_2$. Dann gibt es ein $x \in A$, sodass $\phi_1(x) = 1$ und $\phi_2(x) = 0$.*

Beweis. Die Argumentation beruht zum Großteil auf dem Beweis des **Satzes von Stone - Weierstraß**.
Die Menge der Gelfandtransformierten $\widehat{A} = \{\widehat{x} : x \in A\}$ operiert strikt punktetrennend auf $\Delta(A)$, da $\widehat{A}(\phi) \neq \{0\}$ für jedes $\phi \in \Delta(A)$. Falls $\phi_1 \neq \phi_2$, dann folgt $\widehat{x}(\phi_1) \neq \widehat{x}(\phi_2)$ für ein bestimmtes $x \in A$.
Also gibt es Elemente $a_1, a_2 \in A$ und $b \in A$, s.d. $\phi_1(a_1) \neq 0, \phi_2(a_2) \neq 0$ und $\phi_1(b) \neq \phi_2(b)$. Sei nun $c_j = \frac{a_j}{\phi_j(a_j)}$ für $j = 1, 2$ und $c = c_1 + c_2 - c_1 c_2 \in A$. Mit ϕ_j linear und multiplikativ folgt, dass

$$\phi_j(c) = \phi_j(c_1 + c_2 - c_1c_2) = \underbrace{\phi_j(c_1)}_{=1} + \phi_j(c_2) - \underbrace{\phi_j(c_1)}_{=1} \phi_j(c_2) = 1 \text{ für } j = 1, 2$$

d.h. $\phi_1(c) = \phi_2(c) = 1$. Setze nun $x := \frac{b - \phi_2(b)c}{\phi_1(b) - \phi_2(b)} \in A$. Dann bekommen wir

$$\phi_1(x) = \frac{\phi_1(b) - \phi_2(b)\phi_1(c)}{\phi_1(b) - \phi_2(b)} = 1 \quad \text{und} \quad \phi_2(x) = \frac{\phi_2(b) - \phi_2(b)\phi_2(c)}{\phi_1(b) - \phi_2(b)} = 0 \ ,$$

womit x die gesuchten Eigenschaften erfüllt. ■

Proposition 3.2.3 *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einselement und seien U_1, U_2 zwei disjunkte, offene Teilmengen von $\Delta(A)$ so, dass $\Delta(A) = U_1 \cup U_2$. Dann gibt es ein $x \in A$, sodass $\widehat{x}|_{U_1} = 0$ und $\widehat{x}|_{U_2} = 1$.*

Beweis. Seien $\phi \in U_1$ und $\psi \in U_2$ gegeben. Nach Lemma 3.2.2 $\exists a_{\phi,\psi} \in A$, s.d. $\phi(a_{\phi,\psi}) = 0$ und $\psi(a_{\phi,\psi}) = 1$. Die durch

$$V_{\phi,\psi} = \left\{\alpha \in U_1 : |\alpha(a_{\phi,\psi})| < \tfrac{1}{2}\right\} \quad \text{und} \quad W_{\phi,\psi} = \left\{\beta \in U_2 : |\beta(a_{\phi,\psi})| > \tfrac{1}{2}\right\}$$

definierten Mengen sind offene Umgebungen von ϕ bzw. ψ, wobei $V_{\phi,\psi} \subseteq U_1$ und $W_{\phi,\psi} \subseteq U_2$.
Halten wir nun $\psi \in U_2$ fest. U_1 ist laut Voraussetzung eine offene Teilmenge von $\Delta(A)$, und weil der Gelfandraum einer kommutativen Banachalgebra mit 1-El. kompakt ist, ist U_1 insbesondere auch kompakt. $\Rightarrow \exists$ eine endliche Teilmenge E_ψ von U_1, s.d.

$$U_1 = \bigcup_{\phi \in E_\psi} V_{\phi,\psi}$$

D.h., falls $\alpha \in U_1$, dann ist $|\alpha(a_{\phi,\psi})| < \frac{1}{2}$ für zumindest ein $\phi \in E_\psi$. Sei nun

$$W_\psi = \bigcap_{\phi \in E_\psi} W_{\phi,\psi} \ ,$$

wobei W_ψ eine offene Umgebung von ψ in U_2 ist.
Mit demselben Argument wie oben ist auch U_2 kompakt. Damit existieren $\psi_1, ..., \psi_m \in U_2$, s.d.

$$U_2 = \bigcup_{j=1}^{m} W_{\psi_j}$$

Wir betrachten nun die endliche Teilmenge $M := \{a_{\phi,\psi_j} : 1 \le j \le m,$ $\phi \in E_{\psi j}\}$ von A und zählen M auf, also $M = \{x_1, ..., x_k\}$.
Sei $C_j := \{(\phi(x_1), ..., \phi(x_k)) : \phi \in U_j\}$ für $j = 1, 2$. Dann sind C_1 und C_2 kompakt. Da nach Voraussetzung $U_1 \cup U_2 = \Delta(A)$, gilt

$$C_1 \cup C_2 = \sigma_A(x_1, ..., x_k) = \{(\phi(x_1), ..., \phi(x_k)) : \phi \in (U_1 \cup U_2)\}$$

Nehmen wir an, dass $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. $\Rightarrow \exists\ \alpha \in U_1$ und $\beta \in U_2$, s.d.

$$\alpha(a_{\phi,\psi_j}) = \beta(a_{\phi,\psi_j}) \text{ für jedes } 1 \leq j \leq m \text{ und } \forall\ \phi \in E_{\psi_j}. \qquad (2)$$

Sei $\beta \in W_{\psi_j}$ für ein bestimmtes j und $\alpha \in V_{\phi,\psi_j}$ für ein bestimmtes $\phi \in E_{\psi_j}$. Laut Definition von W_{ψ_j} ist β auch in W_{ϕ,ψ_j} und somit gilt:

$$|\alpha(a_{\phi,\psi_j})| < \tfrac{1}{2} \text{ und } |\beta(a_{\phi,\psi_j})| > \tfrac{1}{2}\ ,$$

was ein Widerspruch zu (2) ist. Dementsprechend sind C_1 und C_2 disjunkte, kompakte Teilmengen des $\mathbb{C}^k$. Infolgedessen können wir disjunkte, offene Umgebungen W_1 und W_2 von C_1 bzw. C_2 in $\mathbb{C}^k$ finden.

Definieren wir nun eine Abb. $f : W_1 \cup W_2 \to \mathbb{C}$ durch $f|_{W_1} = 0$ und $f|_{W_2} = 1$. Dann ist f eine holomorphe Funktion in der Umgebung $W_1 \cup\ W_2$ von $\sigma_A(x_1, ..., x_k)$. Nach dem holomorphen Funktionalkalkül mehrerer Veränderlicher existiert ein $x \in A$, s.d.

$$\widehat{x}(\phi) = f(\phi(x_1), ..., \phi(x_k)) \quad \forall\ \phi \in \Delta(A).$$

Somit ist $\widehat{x}(\phi) = 0\ \forall\ \phi \in U_1$ und $\widehat{x}(\phi) = 1\ \forall\ \phi \in U_2$. ■

Falls A eine halbeinfache Algebra ist, dann ist das Element $x \in A$ in Prop. 3.2.3 bereits idempotent, da gilt: $\widehat{x^2 - x} = 0 \Leftrightarrow \widehat{x^2} = \widehat{x}$. Somit wurde der Idempotentensatz für halbeinfache, kommutative Banachalgebren mit 1-El. gezeigt.
Im nächsten Schritt befreien wir uns von der zusätzlichen Voraussetzung der Halbeinfachheit.

Lemma 3.2.4 *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einselement e und sei $b \in A$ so, dass $\widehat{b^2} = \widehat{b}$. Dann gibt es ein $a \in A$, sodass $\widehat{a} = \widehat{b}$ und $a^2 = a$.*

Beweis. Wir wissen, dass für ein $x \in A$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ genau dann konvergiert, falls $r(x) < 1$. Sei $x := 4(b^2 - b) \Rightarrow \widehat{x} = 4\widehat{(b^2 - b)} = 4(\widehat{b^2} - \widehat{b}) = 0$. Also ist $x \in \mathrm{Rad}(A) \Rightarrow r(x) = 0$. Wegen $\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right| \leq 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$$

in A. Wegen der bekannten Identität

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

bietet es sich an, $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n$ mit $(e+x)^{-\frac{1}{2}}$ zu bezeichnen. Wir stellen nun folgende Behauptung auf:

$$(e+x)^{-\frac{1}{2}}(e+x)^{-\frac{1}{2}}(e+x) = e.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
\big((e+x)^{-\frac{1}{2}}\big)^2(e+x) &= (e+x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{m}x^m \\
&= (e+x)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg(\underbrace{\sum_{k+l=m}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{l}}_{=(-1)^m \text{ für } m\in\mathbb{N}_0}\Bigg)x^m = (e+x)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^m \\
&\overset{x^0:=e}{=} e+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m x^m+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m+1} \\
&= e+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}x^{m+1}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m+1} \\
&= e+\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\Big((-1)^{m+1}+(-1)^m\Big)x^{m+1}}_{=0} = e
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\big((e+x)^{-\frac{1}{2}}\big)^2 = (e+x)^{-1}$. Definieren wir jetzt

$$a := \big(b-\tfrac{1}{2}e\big)(e+x)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}e\ ,$$

so bekommen wir

$$a(a-e) = \Bigg(\big(b-\tfrac{1}{2}e\big)(e+x)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}e\Bigg)\cdot\Bigg(\big(b-\tfrac{1}{2}e\big)(e+x)^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}e\Bigg) =$$
$$\big(b-\tfrac{1}{2}e\big)^2\big((e+x)^{-\frac{1}{2}}\big)^2-\tfrac{1}{4}e = (e+x)^{-1}\big(b^2-b+\tfrac{1}{4}e\big)-\tfrac{1}{4}e =$$
$$(e+x)^{-1}(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{4}e)-\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{e+x}{e+x}-\tfrac{1}{4} = 0.$$

also $a(a-e)=0 \Leftrightarrow a^2=a$, d.h. a ist idempotent.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\widehat{a}=\widehat{b}$. Dazu setzen wir

$$y = (b-\tfrac{1}{2}e)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n$$

Damit ergibt sich

$$a = \big(b-\tfrac{1}{2}e\big)(e+x)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}e = \big(b-\tfrac{1}{2}e\big)\cdot\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n\Bigg)+\frac{1}{2}e =$$
$$\big(b-\frac{1}{2}e\big)\cdot\Bigg(e+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n\Bigg)+\frac{1}{2}e = be-\frac{1}{2}ee+y+\frac{1}{2}e = b+y$$

Nun ist $y \in \mathrm{Rad}(A)$, da $x \in \mathrm{Rad}(A)$ und $\mathrm{Rad}(A)$ ein abgeschlossenes Ideal ist. $\Rightarrow \widehat{y} = 0$, und somit $\widehat{a} = \widehat{b+y} \Leftrightarrow \widehat{a} = \widehat{b}$. ■

Lemma 3.2.4 schließt den Beweis des Idempotentensatzes ab, falls A ein 1-El. besitzt.
Nehmen wir an, dass A kein 1-El. hat. Nun wissen wir aber aus der Theorie der Banachalgebren, dass A in eine Banachalgebra A_e mit 1-El. eingebettet werden kann, und zwar so, dass $A_e := A \bigoplus \{\lambda e\}$ mit $||(x, \lambda)|| := ||x|| + |\lambda|$ für $x \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dieser Vorgang heißt **Adjunktion der Eins**.
Bezeichne ϕ_∞ den Homoporphismus von A_e auf $\mathbb{C}$ mit Kern A, d.h.

$$\phi_\infty(x + \lambda e) = \underbrace{\phi_\infty(x)}_{=0} + \lambda \underbrace{\phi_\infty(e)}_{=1} = \lambda \quad \forall x \in \ker(A), \lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

wobei $\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\phi_\infty\}$.
Wenn wir jetzt $\Delta(A)$ in $\Delta(A_e)$ einbetten, so bleibt C noch immer eine offene und abgeschlossene Menge. $\Rightarrow \exists$ ein idempotentes Element $u \in A_e$, sodass

$$\widehat{u}|_C = 1 \quad \text{ und } \widehat{u}|_{\Delta(A)\setminus C} = 0.$$

Da aber $\widehat{u}(\phi_\infty) = \phi_\infty(u) = 0$, folgt sogleich $u \in A$. Damit ist der Schilow'sche Idempotentensatz bewiesen.

4 Anwendungen

4.1 Folgerungen des Idempotentensatzes

Kommen wir nun zu einigen Anwendungen des Idempotentensatzes. Der folgende Satz wurde bereits mehrfach erwähnt: er beantwortet unsere Frage, ob Kompaktheit des Gelfandraumes $\Delta(A)$ die Existenz eines Einselements in einer halbeinfachen, kommutativen Banachalgebra A erzwingt.

Satz 4.1.1 *Sei A eine halbeinfache, kommutative Banachalgebra. Dann gilt: Ist $\Delta(A)$ kompakt, so besitzt A ein Einselement e.*

Beweis. Laut Voraussetzung ist $\Delta(A)$ kompakt. Also gibt es nach Schilow ein El. $e \in A$, s.d. $\widehat{e} = 1$ auf $\Delta(A)$.

$$\Rightarrow (\widehat{xe - x})(\phi) = \widehat{x}(\phi)\widehat{e}(\phi) - \widehat{x}(\phi) = 0 \quad \forall\ x \in A \text{ und } \phi \in \Delta(A).$$

Weil A halbeinfach ist, d.h. $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$, bekommen wir $xe - x = 0 \quad \forall\, x \in A$ $\Rightarrow e$ ist ein 1-El. von A. ■

Bevor wir zur nächsten Anwendung kommen, wiederholen wir noch kurz einige wichtige Begriffe.

Definition 4.1.2 Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{O})$ heißt **zusammenhängend**, falls er nicht in zwei disjunkte nichtleere offene Mengen zerlegt werden kann, d.h. wenn gilt:

$$\forall\ O_1, O_2 \in \mathfrak{O} \text{ offen}, O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset : O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow O_1 \cup O_2 \neq X.$$

Dabei heißt X **total unzusammenhängend**, wenn es neben der leeren Menge und den einelementigen Teilmengen keine weiteren zusammenhängenden Teilmengen gibt.
X und $\emptyset$ sind **offen und abeschlossen** in X. Ist X zusammenhängend, sind dies die einzigen Teilmengen, die abgeschlossen und offen sind.

Definition 4.1.3 Sei X ein topologischer Raum. Dann bezeichnet $C_0(X)$ den Raum aller stetigen Funktionen f auf X, die "im Unendlichen verschwinden ", d.h. wenn gilt:

$$\text{zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es eine kompakte Menge } K \subseteq X, \text{ sodass}$$
$$|f(x)| < \epsilon \quad \forall\ x \notin K.$$

Korollar 4.1.4 *Sei A eine kommutative Banachalgebra und $\Delta(A)$ total unzusammenhängend. Dann liegt $\widehat{A} = \{\widehat{a} : a \in A\}$ dicht in $C_0(\Delta(A))$.*

Beweis. Seien $f \in C_0(\Delta(A))$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Also verschwindet f im Unendlichen und jeder Punkt in $\Delta(A)$ besitzt eine Umgebungsbasis von kompakten, offenen Mengen. $\Rightarrow \exists$ eine kompakte, offene Teilmenge K von $\Delta(A)$, s.d.

$$|f(\phi)| < \epsilon \quad \forall\ \phi \in \Delta(A) \setminus K.$$

K kann nun als disjunkte Vereinigung von kompakten, offenen Mengen $E_1, ..., E_k$ dargestellt werden, also $K = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$, s.d.

$$|f(\phi) - f(\psi)| < \epsilon \quad \forall\ \phi, \psi \in E_j,\ 1 \leq j \leq k.$$

Somit existieren $c_1, ..., c_k \in \mathbb{C}$, die die Eigenschaft haben, dass die Funktion

$$g = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{E_j} \text{ die Bedingung } |f(\phi) - g(\phi)| < \epsilon \quad \forall\ \phi \in K \text{ erfüllt.}$$

Nach dem Idempotentensatz gibt es $a_j \in A, 1 \leq j \leq k$, s.d. $\widehat{a}_j = \mathbb{1}_{E_j}$. Für $a = \sum_{j=1}^{k} c_j a_j \in A$ folgt, dass $||\widehat{a} - f||_\infty < \epsilon$, also $\lim_{\epsilon \to 0} ||\widehat{a} - f||_\infty = 0$.
$\Rightarrow \widehat{A}$ ist dicht in $C_0(\Delta(A))$. ■

Es gibt noch einige weitere Anwendungen des Schilow'schen Idempotentensatzes, auf die wir aber nicht näher eingehen werden.

4.2 Reguläre Banachalgebren

Wir wollen noch Satz 4.1.1 für reguläre, halbeinfache, kommutative Banachalgebren zeigen. Dazu brauchen wir allerdings noch einen weiteren Satz.

Definition 4.2.1 Sei A eine kommutative Banachalgebra. Dann heißt A **regulär**, falls gilt:
Sei E eine abgeschlossene Teilmenge von $\Delta(A)$ und $\phi_0 \in \Delta(A) \setminus E$. Dann gibt es ein $x \in A$, sodass $\phi_0(x) \neq 0$ und $\phi(x) = 0 \; \forall \; \phi \in E$.
Zur Unterscheidung wird A manchmal auch **vollständig regulär** genannt.

Definition 4.2.2 Sei $E \subseteq \Delta(A)$. Dann ist der **Kern** von E definiert als

$$k(E) := \{x \in A : \phi(x) = 0 \; \forall \; \phi \in E\} \ ,$$

falls $E \neq \emptyset$, wobei $k(\emptyset) = A$. Für $\phi \in \Delta(A)$ schreiben wir $k(\phi)$.
Für $B \subseteq A$ definieren wir die **Hülle** von B als

$$h(B) := \{\phi \in \Delta(A) : B \subseteq k(\phi)\}.$$

Bemerkung 4.2.3 $k(E)$ ist ein abgeschlossenes Ideal in A und $h(B)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\Delta(A)$, weil die Funktionen $\widehat{x}$, $x \in A$, stetig sind auf $\Delta(A)$.

Satz 4.2.4 *Sei A eine reguläre, kommutative Banachalgebra und sei I ein Ideal in A sowie K eine kompakte Teilmenge von $\Delta(A)$ mit $K \cap h(I) = \emptyset$. Dann gibt es ein $x \in I$, sodass gilt:*

$$\widehat{x}|_K = 1 \textit{ und } \widehat{x} = 0 \textit{ in einer Umgebung von } h(I).$$

Beweis. Siehe [1], S. 201, § 4.2: Satz 4.2.8. ■

Korollar 4.2.5 *Sei A eine halbeinfache, reguläre, kommutative Banachalgebra. Dann gilt: Ist $\Delta(A)$ kompakt, so besitzt A ein Einselement.*

Beweis. Wir können diesen Satz beweisen ohne den Idempotentensatz direkt anzuwenden.
Nach Satz 4.2.4 gibt es ein $u \in A$, s.d. $\widehat{u} = 1$ auf $\Delta(A) \Rightarrow \widehat{x - ux} = \widehat{x} - \widehat{u}\widehat{x} = 0$ auf $\Delta(A) \; \forall \; x \in A$. Weil A laut Voraussetzung halbeinfach ist folgt, dass $x - ux = 0 \; \forall \; x \in A \Rightarrow u$ ist ein 1-El. von A. ■

Der Schilow'sche Idempotentensatz ist ohne Zweifel eines der wichtigsten und zugleich schönsten Resultate in der Theorie der kommutativen Banachalgebren.

5 Literaturverzeichnis

[1] EBERHARD KANIUTH: *A Course in Commutative Banach Algebras (2009)*, Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-72475-1.

[2] WIESLAW ZELAZKO: *Banach Algebras (1973)*, Elsevier Publishing Company, ISBN 0-444-40991-2.

[3] DIRK WERNER: *Funktionalanalysis (2011), 7. Auflage*, Springer-Verlag, ISBN 978-3-642-21016-7.