# Zusammenhänge zwischen Fourierreihe und Fouriertransformation

Jakob Hruby

October 2, 2012

# Contents


**1 Grundlagen** **3**

**2 Fortsetzung der Fouriertransformation** **5**

**3 Poissonsche Summenformel** **14**

**4 Quellen** **17**

# 1 Grundlagen

Wir beschäftigen uns zunächst mit einigen Definitionen, die wir im Weiteren verwenden werden.

**Definition 1.1.** Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnen wir

$$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \text{ messbar}, \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

als den Raum aller p-fach intergrierbaren Funktionen oder auch als $L^p$ - Raum.
Insbesondere verwenden wir im Folgenden die Räume $L^1(\mathbb{R})$ und $L^2(\mathbb{R})$.

**Definition 1.2.** Mit

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \text{ stetig}, f(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty\}$$

bezeichnen wir den Raum aller stetigen, im Unendlichen verschwindenten Funktionen.
Ähnlich definieren wir den Raum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger als

$$C_{00}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \text{ stetig}, suppf \text{ ist kompakt}\}$$

**Definition 1.3.** Sei $(\mathcal{H}, \langle ., . \rangle)$ ein Skalarproduktraum und sei $x \in \mathcal{H}$.
Ist $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, so bezeichnet man $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ als Fourierreihe von $x$.

*Bemerkung* 1.4. Ist $(\mathcal{H}, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, so konvergiert die Fourierreihe immer gegen $x$.

**Satz 1.5.** *Sei $\mathcal{H}$ ein Skalarproduktraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem. $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist genau dann eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, wenn die parsevalsche Gleichung*

$$\|x\|_H^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

*für alle $x \in \mathcal{H}$ erfüllt ist.*

*Beweis.* siehe z.B (V), Kapitel 3, Satz 3.3.4

**Definition 1.6.** Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ ist ihre Fouriertransformierte $\hat{f}$ definiert als

$$\hat{f}(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \qquad \text{für } \; x \in \mathbb{R}$$

Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ ist ihre inverse Fouriertransformierte $\check{f}$ definiert als

$$\check{f}(t) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \qquad \text{für } \; t \in \mathbb{R}$$

**Satz 1.7.** *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, so gilt* $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ *mit* $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

*Beweis.* siehe z.B (IV), Kapitel 14, Proposition 14.1.2

# 2 Die Fouriertransformation auf $C^2_{00}(\mathbb{R})$ und ihre Fortsetzung auf $L^2(\mathbb{R})$

**Satz 2.1.** *Ist $f \in C^2_{00}(\mathbb{R})$, so gilt:*

*(1)* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

*(2)* $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$

*(3)* $\check{\hat{f}}(t) = f(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$

*Beweis.* Wegen $f \in C^2_{00}(\mathbb{R})$ gibt es ein $M \geq 0$ mit $f(t) = 0$ für $|t| \geq M$ , also

$$\|f\|_1 = \int_{-M}^{M} |f(t)|\, dt < +\infty \;, \|f'\|_1 = \int_{-M}^{M} |f'(t)|\, dt < +\infty,$$

$$\text{und} \quad \|f''\|_1 = \int_{-M}^{M} |f''(t)|\, dt < +\infty$$

und somit existiert die Fouriertransformierte und stellt sich folgendermaßen dar:

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt = \int_{-M}^{M} f(t)e^{-itx}dt$$

Mittels partieller Integration sieht man für $x \neq 0$

$$\left|\hat{f}(x)\right| = \left|\int_{-M}^{M} f(t)e^{-itx}dt\right| \overset{p.I.}{=} \tag{$\star$}$$

$$= \left| -\frac{1}{ix} f(t)e^{-itx}\Big|_{x=-M}^{M} + \frac{1}{ix}\int_{-M}^{M} f'(t)e^{-itx}dt \right| \overset{p.I.}{=}$$

$$= \left| -\frac{1}{x^2}\int_{-M}^{M} f''(t)e^{-itx}dt \right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{x^2}\right| \int_{-M}^{M} |f''(t)| \left|e^{-itx}\right| dt = \frac{1}{x^2}\, \|f''\|_1$$

Nun folgt weiter für ein beliebiges $k > 0$, weil die Fouriertransformierte $\hat{f}$ stetig (Satz 1.7) und deshalb auf $[-k,k]$ integrierbar ist,

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} \left|\hat{f}(x)\right| dt \leq \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} \frac{1}{x^2} \left\|f''\right\|_1 dt$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(x)\right| dt \leq \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} \frac{1}{x^2} \left\|f''\right\|_1 dt + \int\limits_{[-k,k]} \left|\hat{f}(x)\right| dt < +\infty$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} \left|\hat{f}(x)\right|^2 dt \leq \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} \frac{1}{x^4} \left\|f''\right\|_1^2 dt$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(x)\right|^2 dt \leq \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} \frac{1}{x^4} \left\|f''\right\|_1^2 dt + \int\limits_{[-k,k]} \left|\hat{f}(x)\right|^2 dt < +\infty,$$

also insgesamt $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

$B_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{in\pi t}{N}}, n \in \mathbb{Z}$ ist eine Orthogonalbasis für $L^2([-N,N])$, $N \in \mathbb{R}$. In dieser lässt sich $f|_{[-N,N]} \in L^2([-N,N])$ als Fourierreihe darstellen, wobei die Reihe im $L^2$-Sinne konvergiert:

$$f|_{[-N,N]}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, B_n \rangle B_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(s) \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{-in\pi s}{N}} \; ds \; \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{in\pi t}{N}} =$$
$$= \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}}$$

Wegen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2N} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2N} \left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2N} \frac{N^2}{n^2\pi^2} \left\|f''\right\|_1 + \frac{1}{2N} \left|\hat{f}(0)\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2N} \frac{N^2}{n^2\pi^2} \left\|f''\right\|_1 < \infty$$

liefert das Weierstraß-Kriteriums (vgl. z.B (II), Korollar 6.7.4) die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2N} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}}$ gegen eine

Funktion $g$.
Da das Intervall $[-N, N]$ endliche Länge hat, folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz gegen $g$ die $L^2$-Konvergenz gegen $g$. Also muss $g = f|_{[-N,N]}$ gelten.
Des Weiteren gilt für die Norm laut Satz 1.5

$$\|f|_{[-N,N]}\|_2^2 = \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) \right|^2$$

Für $X > 1$, so gewählt, dass $XN > \pi$ betrachten wie nun

$$\left| f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \right| = \tag{1}$$

$$= \left| \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N} > X \\ n \in \mathbb{Z}}} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} - \frac{1}{2\pi} \int_{X}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N} < -X \\ n \in \mathbb{Z}}} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-X} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\left|\frac{n\pi}{N}\right| \leq X \\ n \in \mathbb{Z}}} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-X}^{X} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \right|.$$

Aus $(\star)$, der Dreiecksungleichung und wegen

$$\int_{Y}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \int_{Y}^{\tilde{Y}} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k > Y}} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k > Y}} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx \geq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k > Y}} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{(k+1-1)^2}\, dx = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k > Y}} \frac{1}{k^2}$$

für $Y > 1$, wobei $\tilde{Y}$ die kleinste Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p > Y$ bezeichnet, folgt mit $Y = \frac{XN}{\pi}$

$$\left| \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N} > X \\ n \in \mathbb{Z}}} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} \right| \leq \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N} > X \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{N^2}} \|f''\|_1 \leq \tag{2}$$

$$\leq \frac{N}{2\pi^2} \|f''\|_1 \int_{\frac{XN}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{(m-1)^2}\, dm = \frac{1}{2\pi} \frac{N}{XN - \pi} \|f''\|_1$$

und wegen

$$\int_{-\infty}^{-Y} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \int_{-\tilde{Y}}^{-Y} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k < -Y}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k < -Y}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx \geq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k < -Y}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(k-1+1)^2}\, dx = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k < -Y}} \frac{1}{k^2}$$

für $Y$ und $\tilde{Y}$ wie oben folgt mit $Y = \frac{XN}{\pi}$

$$\left| \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N} < -X \\ n \in \mathbb{Z}}} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} \right| \leq \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N} < -X \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{N^2}} \|f''\|_1 \leq \tag{3}$$

$$\leq \frac{N}{2\pi^2} \|f''\|_1 \int_{-\infty}^{-\frac{XN}{\pi}} \frac{1}{(m+1)^2}\, dm = \frac{1}{2\pi} \frac{N}{XN - \pi} \|f''\|_1 .$$

Außerdem folgt aus der Dreiecksungleichung und aus $(\star)$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{X}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{X}^{\infty} \frac{1}{x^2} \|f''\|_1\, dx = \frac{1}{2\pi X} \|f''\|_1 \tag{4}$$

sowie

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-X} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-X} \frac{1}{x^2} \|f''\|_1\, dx = \frac{1}{2\pi X} \|f''\|_1 . \tag{5}$$

Setzt man nun $x_n = \frac{n\pi}{N}$, $\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{N}$ und $l = \lfloor \frac{XN}{\pi} \rfloor$, die größte Zahl $q \in \mathbb{N}$ mit $q \leq \frac{XN}{\pi}$, so gilt

$$\frac{1}{2N} \sum_{\substack{|\frac{n\pi}{N}| \leq X \\ n \in \mathbb{Z}}} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{\frac{in\pi t}{N}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-l}^{l} \hat{f}(x_n) e^{ix_n t} \Delta x.$$

Für das Intervall $[-X, X]$ definiere die Partition $y_{-l-1} = -X, y_{-l} = x_{-l}, \ldots, y_l = x_l, y_{l+1} = X$.
Wegen $|x_l - X| < \frac{\pi}{N}$ konvergiert $x_l$ gegen $X$ und $x_{-l}$ gegen $-X$ für $N \to \infty$ und es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-l}^{l} \hat{f}(x_n) e^{ix_n t} \Delta x - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-l-1}^{l} \hat{f}(y_n) e^{iy_n t} (y_{n+1} - y_n) \right| = \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=-l}^{l-1} \left( \hat{f}(x_n) e^{ix_n t} \Delta x - \hat{f}(y_n) e^{iy_n t} (y_{n+1} - y_n) \right) + \right. \\
&\qquad \left. + \hat{f}(x_l) e^{ix_l t} \frac{\pi}{N} - \hat{f}(-X) e^{-iXt} (y_{-l} + X) - \hat{f}(y_l) e^{iy_l t} (X - y_l) \right| = \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \hat{f}(x_l) e^{ix_l t} \left( \frac{\pi}{N} + x_l - X \right) - \hat{f}(-X) e^{-iXt} (x_{-l} + X) \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \hat{f}(\lim_{N\to\infty} x_l) e^{i \lim_{N\to\infty} x_l t} \left( \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{N} + \lim_{N\to\infty} x_l - X \right) - \right. \\
&\qquad \left. - \hat{f}(-X) e^{-iXt} (\lim_{N\to\infty} x_{-l} + X) \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \hat{f}(X) e^{iXt} (X - X) - \hat{f}(-X) e^{-iXt} (-X + X) \right| = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir ausnützen, dass alle beteiligten Funktionen stetig sind.
Somit lässt sich $\frac{1}{2\pi} \sum\limits_{n=-l}^{l} \hat{f}(x_n) e^{ix_n t} \Delta x$ für $N \to \infty$ durch eine Riemann-Summe ersetzen was zeigt, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-l}^{l} \hat{f}(x_n) e^{ix_n t} \Delta x = \frac{1}{2\pi} \int_{-X}^{X} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx \tag{6}$$

gilt.

Aus $(2),(3),(4),(5)$ und $(6)$ folgt nun für $(1)$ beim Grenzübergang $N \to +\infty$

$$\lim_{N\to+\infty}\left|f(t)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)e^{ixt}\,dx\right| \leq$$
$$\leq \lim_{N\to+\infty} 2\left(\frac{1}{2\pi}\frac{N}{XN-\pi}\left\|f''\right\|_1+\frac{1}{2\pi X}\left\|f''\right\|_1\right)+$$
$$+\lim_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{2N}\sum_{\substack{\left|\frac{n\pi}{N}\right|\leq X\\ n\in\mathbb{Z}}}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)e^{\frac{in\pi t}{N}}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-X}^{X}\hat{f}(x)e^{ixt}\,dx\right|=$$
$$=\frac{2\left\|f''\right\|_1}{\pi X}$$

Für $\epsilon > 0$ gibt es nun ein $X_0$, sodass für alle $X > X_0 : \frac{2\|f''\|_1}{\pi X} < \epsilon$ womit $\hat{\hat{f}}(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
Um $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ zu zeigen, betrachten wir

$$\left|2\pi\left\|f\right\|_2^2-\left\|\hat{f}\right\|_2^2\right| = \tag{7}$$
$$=\left|\frac{2\pi}{2N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(x)\right|^2\,dx\right|\leq$$
$$\leq\left|\frac{2\pi}{2N}\sum_{\substack{\frac{n\pi}{N}>X\\ n\in\mathbb{Z}}}\left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2-\int\limits_{X}^{\infty}\left|\hat{f}(x)\right|^2\,dx\right|+$$
$$+\left|\frac{2\pi}{2N}\sum_{\substack{\frac{n\pi}{N}<-X\\ n\in\mathbb{Z}}}\left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2-\int\limits_{-\infty}^{-X}\left|\hat{f}(x)\right|^2\,dx\right|+$$
$$+\left|\frac{2\pi}{2N}\sum_{\substack{\left|\frac{n\pi}{N}\right|<X\\ n\in\mathbb{Z}}}\left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2-\int\limits_{-X}^{X}\left|\hat{f}(x)\right|^2\,dx\right|.$$

Aus ($\star$), der Dreiecksungleichung und wegen

$$\int_{Y}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^4}\, dx = \int_{Y}^{\tilde{Y}} \frac{1}{(x-1)^4}\, dx + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k>Y}} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{(x-1)^4}\, dx \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k>Y}} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{(x-1)^4}\, dx \geq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k>Y}} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{(k+1-1)^4}\, dx = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k>Y}} \frac{1}{k^4}$$

für $Y > 1$, wobei $\tilde{Y}$ wieder die kleinste Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p > Y$ bezeichnet, folgt mit $Y = \frac{XN}{\pi}$

$$\frac{2\pi}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N}>X\\ n\in\mathbb{Z}}} \left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2 \leq \frac{2\pi}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N}>X\\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{\frac{n^4\pi^4}{N^4}} \|f''\|_1^2 \leq \tag{8}$$

$$\leq \frac{2N^3}{2\pi^3} \|f''\|_1^2 \int_{\frac{XN}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{(m-1)^4}\, dm = \frac{2N^3}{6\pi^3(\frac{XN}{\pi}-1)^3} \|f''\|_1^2$$

und wegen

$$\int_{-\infty}^{-Y} \frac{1}{(x+1)^4}\, dx = \int_{-\tilde{Y}}^{-Y} \frac{1}{(x+1)^4}\, dx + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<-Y}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(x+1)^4}\, dx \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<-Y}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(x+1)^4}\, dx \geq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<-Y}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(k-1+1)^4}\, dx = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<-Y}} \frac{1}{k^4}$$

für $Y$ und $\tilde{Y}$ wie oben folgt mit $Y = \frac{XN}{\pi}$

$$\frac{2\pi}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N}<-X\\ n\in\mathbb{Z}}} \left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2 \leq \frac{2\pi}{2N} \sum_{\substack{\frac{n\pi}{N}<-X\\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{\frac{n^4\pi^4}{N^4}} \|f''\|_1^2 \leq \tag{9}$$

$$\leq \frac{2N^3}{2\pi^3} \|f''\|_1^2 \int_{-\infty}^{-\frac{XN}{\pi}} \frac{1}{(m+1)^4}\, dm = \frac{2N^3}{6\pi^3(\frac{XN}{\pi}-1)^3} \|f''\|_1^2$$

Außerdem folgt aus der Dreiecksungleichung und aus ($\star$)

$$\int_{X}^{\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2\, dx \leq \int_{X}^{\infty} \frac{1}{x^4} \|f''\|_1^2\, dx = \frac{1}{3\pi X^3} \|f''\|_1^2 \tag{10}$$

sowie

$$\int_{-\infty}^{-X} \left|\hat{f}(x)\right|^2 \, dx \leq \int_{-\infty}^{-X} \frac{1}{x^4} \left\|f''\right\|_1^2 \, dx = \frac{1}{3\pi X^3} \left\|f''\right\|_1^2 \tag{11}$$

Wie oben kommt man durch $x_n = \frac{n\pi}{N}$, $\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{N}$ und $l = \lfloor \frac{XN}{\pi} \rfloor$, was wieder die größte Zahl $q \in \mathbb{N}$ mit $q \leq \frac{XN}{\pi}$ bezeichnet, und dem Übergang zur Partition $y_{-l-1} = -X, y_{-l} = x_{-l}, \ldots, y_l = x_l, y_{l+1} = X$ von $[-X, X]$ zu einer Riemann-Summel:

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty} \left| \frac{2\pi}{2N} \sum_{\substack{\left|\frac{n\pi}{N}\right| \leq X \\ n\in\mathbb{Z}}} \left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2 - \sum_{n=-l-1}^{l} \left|\hat{f}(y_n)\right|^2 (y_{n+1} - y_n) \right| = \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left| \sum_{n=-l}^{l} \left|\hat{f}(x_n)\right|^2 \Delta x - \sum_{n=-l-1}^{l} \left|\hat{f}(y_n)\right|^2 (y_{n+1} - y_n) \right| = \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left| \sum_{n=-l}^{l-1} \frac{\pi}{N} \left( \left|\hat{f}(x_n)\right|^2 - \left|\hat{f}(y_n)\right|^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{N} \left|\hat{f}(x_l)\right|^2 - \left|\hat{f}(-X)\right|^2 (y_{-l} + X) - \left|\hat{f}(y_l)\right|^2 (X - y_l) \right| = \\
&= \left| \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{N} \left|\hat{f}\left(\lim_{N\to+\infty} x_l\right)\right|^2 - \left|\hat{f}(-X)\right|^2 \left(\lim_{N\to+\infty} x_{-l} + X\right) - \right. \\
&\quad \left. - \left|\hat{f}\left(\lim_{N\to+\infty} x_l\right)\right|^2 \left(X - \lim_{N\to+\infty} x_l\right) \right| = 0
\end{aligned}$$

und schließlich zum Riemann-Integral

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-l}^{l} \left|\hat{f}(x_n)\right|^2 \Delta x = \int_{-X}^{X} \left|\hat{f}(x)\right|^2 \, dx. \tag{12}$$

Insgesamt folgt nun für $N \to +\infty$

$$\begin{aligned}
&\left|2\pi \|f\|_2^2 - \left\|\hat{f}\right\|_2^2\right| \leq \\
&\leq \lim_{N\to+\infty} 2\left(\frac{2N^3}{6\pi^3(\frac{XN}{\pi}-1)^3}\|f''\|_1^2 + \frac{1}{3\pi X^3}\|f''\|_1^2\right) + \\
&+ \lim_{N\to+\infty}\left|\frac{2\pi}{2N}\sum_{\substack{|\frac{n\pi}{N}|\leq X\\ n\in\mathbb{Z}}}\left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right|^2 - \int_{-X}^{X}\left|\hat{f}(x)\right|^2\,dx\right| = \\
&= \frac{2\|f''\|_1^2}{3X^3(\pi+1)}
\end{aligned}$$

Für $\epsilon > 0$ gibt es nun ein $X_0$, sodass für alle $X > X_0$ : $\frac{2\|f''\|_1^2}{3X^3(\pi+1)} < \epsilon$ □

**Satz 2.2.** *Es gibt eine eindeutige, linear Fortsetzung* $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *von* $\hat{}\,|_{C^2_{00}}$.

*Beweis.* Der Operator $\hat{}\,|_{C^2_{00}} : C^2_{00}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ ist linear und stetig und deshalb auch gleichmäßig stetig. Außerdem ist $C^2_{00}(\mathbb{R})$ dicht im vollständigen Raum $L^2(\mathbb{R})$.
Also gibt es eine eindeutige, lineare, gleichmäßig stetige Fortsetzung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ von $\hat{}\,|_{C^2_{00}}$.
□

# 3 Die Poissonsche Summenformel

**Satz 3.1.** *Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}$ so dass gilt $|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)| \leq \frac{C}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq x_0$, dann folgt:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$$

*Beweis.* Zuallererst sei bemerkt, dass wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \; dx = \int_{-\infty}^{-x_0} |f(x)| \; dx + \int_{-x_0}^{x_0} |f(x)| \; dx + \int_{x_0}^{\infty} |f(x)| \; dx \leq$$
$$\leq \int_{-\infty}^{-x_0} \frac{C}{x^2} \; dx + \int_{-x_0}^{x_0} |f(x)| \; dx + \int_{x_0}^{\infty} \frac{C}{x^2} \; dx < +\infty$$

$f \in L_1(\mathbb{R})$ gilt. Selbiges gilt aus dem gleichen Grund auch für $f'$ und $f''$.
Nun kreieren wir folgende Funktion:

$$F(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi)$$

Sei $K > 0$ zunächst beliebig. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $-K + 2k\pi > x_0$ bzw $K - 2k\pi < x_0$ gilt

$$|f\,(t + 2k\pi)| \leq \frac{C}{(-K + 2k\pi)^2} = \frac{C}{(K - 2k\pi)^2} \text{ für alle } t \in [-K, K], K > 0.$$

Deshalb gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{k=-\infty}^{-k_0} |f(t + 2k\pi)| \leq \sum_{k=-\infty}^{-k_0} \frac{C}{(-K + 2k\pi)^2} < +\infty$$
$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |f(t + 2k\pi)| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{C}{(-K + 2k\pi)^2} < +\infty$$

für alle $t \in [-K, K]$ gilt. Es ergibt sich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[-K,K]} |f(t+2k\pi)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-k_0} \sup_{t\in[-K,K]} |f(t+2k\pi)| + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sup_{t\in[-K,K]} |f(t+2k\pi)| +$$

$$+ \sum_{k=-k_0+1}^{k_0-1} \sup_{t\in[-K,K]} |f(t+2k\pi)| < +\infty$$

für alle $t \in [-K, K]$.

Aus dem Weierstraß-Kriterium folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(t+2k\pi)$ gegen $F$ auf $[-K, K]$.

Die selbe Vorgehensweise wie für $F$ zeigt, dass die Reihen $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f'(t+2k\pi)$ und $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f''(t+2k\pi)$ auf $[-K, K]$ gleichmäßig konvergieren. Also kann man Differentiation und Reihenbildung vertauschen, und wir erhalten

$$F'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f'(t+2k\pi) \tag{1}$$

$$F''(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f''(t+2k\pi) \tag{2}$$

auf $[-K, K]$. Da $K > 0$ beliebig war, ist $F$ auf ganz $\mathbb{R}$ ein stetige Funktion, die (1) und (2) erfüllt.

Weiters gilt $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f\,(t+2(k+1)\pi) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(t+2k\pi)$ und entsprechendes mit den Ableitungen $f', f''$, weshalb $F, F'$ und $F''$ $2\pi$-periodisch sind. Partielle Integration der Fourierkoeffizienten (für $n \neq 0$) von $F$ zeigt nun

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)e^{-in\theta}d\theta \overset{p.I.}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-in}F(\theta)e^{-in\theta}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} F'(\theta)e^{-in\theta}d\theta\right) \overset{p.I.}{=}$$

$$= -\frac{1}{2n^2\pi}\int_0^{2\pi} F''(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

Auch die Fourierreihe von $F$ konvergiert absolut und ihre Summanden sind beschränkt, weshalb auch diese gleichmäßig konvergiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|c_n e^{int}\right| =$$

$$= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} \left| -\frac{1}{2n^2\pi} e^{int} \int_0^{2\pi} F''(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta)\, d\theta \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left| \frac{1}{2n^2\pi} \right| \int_0^{2\pi} |F''(\theta)|\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\theta)|\, d\theta < +\infty$$

Nun gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2k\pi) e^{-in\theta}$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (diese sieht man wie für $F$)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2k\pi) e^{-in\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2\pi + 2k\pi} f(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n)$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Satz der majorisierten Konvergenz (siehe z.B VI Satz 14.4) folgt. Dieser gilt da sich die Partialsummen für alle $N \in \mathbb{N}$ mittels

$$|f(\theta)| \geq \left| \sum_{k=-N}^{N} \mathbb{1}_{[2k\pi, 2k\pi+2\pi]}(\theta) \cdot f(\theta)\, e^{-in\theta} \right|$$

abschätzen lassen und $|f(\theta)| \in L_1(\mathbb{R})$. Es ergibt sich

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Setzt man $t = 0$, so folgt das zu Beweisende

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n)$$

□

# 4 Quellen


I Johnathan R. Partington. *Interpolation, Identification, and Sampling*, Oxford University Press, 1997

II Michael Kaltenbäck. *Analysis 1*, Vorlesungsskriptum, Wien, 2012

III Michael Kaltenbäck. *Analysis 2*, Vorlesungsskriptum, Wien, 2012

IV Michael Kaltenbäck. *Analysis 3*, Vorlesungsskriptum, Wien, 2012

V Michael Kaltenbäck, Harald Woracek, Martin Blümlinger. *Funktionalanalysis 1*, Vorlesungsskriptum, Wien, 2012

VI Wolfgang Wertz. *Mass- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Vorlesungsskriptum, Wien, 2010