Seminormale Operatoren

Cornelia Michlits
SE Analysis

11. Mai 2020

$$N^*N - NN^* = 0$$

$$\pi \, \|D\| \le \mathrm{meas}_2(\sigma(T))$$

HR

Definition (Seminormaler Operator)

$S^*S - SS^*$

Ein Operator $S \in L(\mathcal{H})$ ist seminormal $\Leftrightarrow$ $[S^*, S] \geq$ oder ≤ 0.

Semidef

- $[S^*, S] \geq 0$ *hyponormal*
- $[S^*, S] \leq 0$ *co-hyponormal*

$\forall x \in H$

$\langle (S^*S - SS^*)x, x \rangle \geq 0$

≤ 0

Fakten

$A \in L(H)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

- $[(\alpha A + \beta)^*, (\alpha A + \beta)] = \ldots = |\alpha|^2 [A^*, A]$

$\Rightarrow$ S hypo | co-hyp. | Semin. $\Rightarrow$ $\alpha S + \beta$

- $A \in L(H)$ beschr. Op

$A = X + iY$ $\quad X = \frac{1}{2}(A + A^*)$ $\quad Y = \frac{1}{2i}(A - A^*)$

Beispiele

Example

Jeder *subnormale* Operator ist hyponormal. $\langle [S^*, S]x, x\rangle$

Definition (subnormal)

Die Einschränkung eines normalen Operators $N \in L(K)$ auf einen invarianten Teilraum $H \subseteq K$.

HR

$N H \subset H$ $\quad S = N|_H$

$K = H \oplus H^\perp$

$x \in H$ $\quad$ P ... orthog. Proj. $K \to H$

$\|S^* x\| = \|P N^* x\| \leq \|P\| \, \|N^* x\| = \|Nx\| = \|Sx\|$

$S^* = PN^*|_H \quad \|P\| = 1$

$\langle [S^*, S]x, x\rangle = \langle S^* S x, x\rangle - \langle S S^* x, x\rangle = \|Sx\|^2 - \|S^* x\|^2 \geq 0$

Beispiele II

Example

Unilaterale Shift $U_+ : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ mit
$U_+(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$

$U_+^*(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$

$T := 2U_+ + U_+^*$ hyp. ¬ subnor.

$[T^*, T] = \ldots = 3[U_+^*, U_+]$

Kor. S subn., f eine in einer Umgeb. $\sigma(S)$ def., analyt. Fkt. $\Rightarrow$ $f(S)$ subn.

ohne Bew.

$D = [T^{2*}, T^2]$ $\quad e_n$ $\quad\quad T = 2U_+ + U_+^*$

$De_0 = 15 e_0 + 6 e_2$

$De_1 = 15 e_1$

$De_2 = 6 e_0$

$De_n = 0 \quad \forall n \geq 3$

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T^2 ¬ hyp.

Zerlegung von seminormalen Operatoren

Theorem

Sei S ein seminormaler Operator auf $\mathcal{H}$. $\mathcal{M}_0(S)$ sei der kleinste Teilraum von $\mathcal{H}$ der S auf das Bild von $[S^*, S]$ einschränkt und $\mathcal{M}_1(S) := \mathcal{M}_0(S)^\perp$. Dann kann $S = S_0 + S_1$ in Bezug auf die Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0(S) \bigoplus \mathcal{M}_1(S)$ geschrieben werden. S_0 ist rein seminormal und S_1 ist normal.

Definition (pure) rein semin.

Ein seminormaler Operator $S \in L(H)$ heißt *pure*, falls sein normaler Anteil der Nullraum ist.

$\mathfrak{M}$ TR $\mathcal{H}$ sd. S auf normal
vkel.

$$\mathfrak{M} \perp \mathfrak{M}_0$$

$f \in \mathfrak{M}$

$$0 \le \|Sf\|^2 - \|S^*f\|^2 = \langle (\underbrace{S^*S - SS^*}_{D})f, f \rangle$$

$$= \|D^{1/2} f\|^2$$

$\Rightarrow \quad Df = 0 \quad$ bzw. $\; f \perp R(D)$

Spektralradius

$r(T) := max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$

$\| S^* x \| \leq \| Sx \| \quad x \in H$

Proposition

Sei S seminormal in $L(H)$. Dann ist $||S|| = r(S)$.

$r(S) = \lim_n \| S^n \|^{1/n}$

$\| S^n \| = \| S \|^n$

wesentl $\| S^*(S^n x) \| \leq \| S^{n+1} x \|$

$\| S^n \|^2 \quad \dots \leq \underbrace{\| S^{*\, n-1} \|}_{\| S^* \|^{n-1}} \; \| S^* S^n \|$

$\Rightarrow \quad \| S^n \| = \| S \|^n$

Wachstumsbedingung für die Resolvente

Korollar

Sei S ein seminormaler Operator und $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \notin \sigma(S)$. Dann gilt

$$||(S-\lambda_0)^{-1}|| = \frac{1}{dist(\lambda_0, \sigma(S))}$$

$$r\left((S-\lambda_0)^{-1}\right) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma((S-\lambda_0)^{-1})\}$$

$$= \min\{|\lambda-\lambda_0| : \lambda \in \sigma(S)\}^{-1}$$

Numerische Wertebereich

$W(S) = \{ \langle Sx, x \rangle : \|x\| = 1 \}$

Proposition

Sei $S \in L(H)$ ein hyponormaler Operator. Dann gilt

„T"

$$\overline{W(S)} = \text{conv}\,\sigma(S).$$

wissen

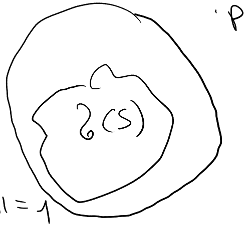
- $\sigma(S) \subset \overline{W(S)}$
- $p \in W(S) \quad p \notin \text{conv}\,\sigma(S)$

$\sigma(S) \in U_r(0)$

$r(S) = \|S\| \leq r$

$p \in W(S) \quad \langle Sx, x \rangle = p \quad \|x\| = 1$

$p \leq |\langle Sx, x \rangle| \leq r$ ↯



Cut-downs

Definition (Cut-down)

Sei $S = X + iY \in L(H)$ ein hyponormaler Operator. Dann ist der *cut-down* von S bzgl. der Borelmenge $\delta \subseteq \mathbb{R}$ der Operator

reellen Achse

$$\longrightarrow \quad T_\delta = X + iE(\delta)YE(\delta),$$

X

auf dem Raum $E(\delta)H$.

Analog für Y auf der imaginären Achse.

δ Borelmenge in Achse

$$T_\delta = E(\delta) X E(\delta) + iY$$

Spektralmaß

Y

Eigenschaften hyponormale Operatoren

T_n hump. $\lim T_n = T$

$|\langle T_n^* x, y\rangle| \leq \|T_n x\| \|y\|$

$\Rightarrow \|\langle T^* x, y\rangle\| \leq \|Tx\| \|y\| \quad \forall x, y$

- Die Einschränkung eines hyponormalen Operators auf eine abgeschlossenen invarianten Unterraum ist hyponormal. ✓
- ✓ Wenn $S = X + iY \in L(H)$ hyponormal und X oder Y invertierbar, dann $X^{-1} - iY$ bzw. $X - iY^{-1}$ hyponormal. $[X^{-1}, Y] = X[Y, X]X^{-1}$
- Die Menge alle hyponormalen Operatoren auf einen Hilbertraum ist abgeschlossen in der starken Operatortopologie.

σ

$T \in L(H) \quad K \subset H \quad T' = T|_K \quad x \in K$ bel ?

$\langle [T'^*, T']x, x\rangle = \|T'x\|^2 - \|T'^* x\|^2 \geq \|Tx\|^2 - \|T^* x\|^2$

$\geq, \quad \| \quad \| \quad - \|T^* x\|^2$

Cut-down und rein hyponormale Operatoren

Proposition

Sei $S \overset{= X+iY}{\in} L(H)$ ein hyponormaler Operator and sei $\delta \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Wenn S rein hyponormal ist, dann ebenfalls S_δ.

Idee: S_δ norm. Teil $\Rightarrow$ S norm Teil

$K \subset H_\delta := E(\delta)H$, $\xi \in K$

reichen $= [S_\delta^*, S_\delta]\xi = 0$

$E(\delta)[S^*, S]E(\delta)\xi =$, $D = [S^*, S]$

$\|D^{1/2}\xi\| = \langle D\xi, \xi\rangle = \langle E(\delta)DE(\delta)\xi, \xi\rangle = 0$ $\quad \xi \in K$

$\Rightarrow DK = 0$ $\quad DX^nK = \{0\}$

$YK \subset E(\delta)YK \subset K$ $\quad \cancel{K}$

$T \in L(H)$ selbst.. X

$ST - TS = 0$

$\Leftrightarrow SE - ES = 0$

$[X^n, Y]K = 0$

$\Rightarrow [E(\delta), Y]K = 0$

Spectral mapping results

$\sigma_{ap}(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n)_{n=0}^{\infty} \; \|x_n\| = 1, \; \lim_n (T - \lambda) x_n = 0 \}$

Lemma

Sei $S \in L(H)$ ein beliebiger Operator und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetige Kurve, sodass $\gamma([0,1]) \cap \sigma(S) \neq \emptyset$ und $\gamma([0,1]) \cap \sigma_{ap}(S) = \emptyset$. Dann ist $\gamma([0,1]) \subset \sigma_r(S)$.

$\partial\sigma(S) \subset \sigma_{ap}(S)$

Lemma param. Variant

Sei $A : [0,1] \to L(H)$ ein stetiger Weg und $\tau : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig. Falls

- $\tau(0) \in \sigma(A(0))$,
- $\tau(t) \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(A(t))$, $t \in [0,1]$

Dann $\tau(t) \in \sigma_r(A(t))$ für jedes $t \in [0,1]$.

Spectral mapping results

Proposition

Sei $A : [0,1] \to L(H)$ *stetig bzgl der Normtopologie und* $\sigma \subset \mathbb{C}$ *and* $\theta : [0,1] \times \sigma \to \mathbb{C}$*, so dass*

- $\theta(\cdot, \lambda) : [0,1] \to \mathbb{C}$ *stetig für jedes* $\lambda \in \sigma$
- $\theta_t = \theta(t, \cdot) : \sigma \to \mathbb{C}$ *injektiv für jedes* $t \in [0,1]$ *und* $\theta_0|\sigma = id$

Falls $\sigma_{ap}(A(t)) \cap \theta_t(\sigma) = \theta_t(\sigma_{ap}(A(0)) \cap \sigma), t \in [0,1]$
dann $\sigma_r(A(t)) \cap \theta_t(\sigma) = \theta_t(\sigma_r(A(0)) \cap \sigma), t \in [0,1]$.

Bew. $\lambda \in \sigma_r(A(0)) \cap \sigma$, $T = \theta(\cdot, \lambda)$

$T(0) = \theta(0, \lambda) = \theta_0(\lambda) = \lambda \in \sigma(A(0))$

$\Rightarrow T(t) \in \sigma_r(A(t)) \; \forall t \in [0,1]$ $\Rightarrow \theta_t(\sigma_r(A(0)) \cap \sigma) \subseteq \sigma_r(A(t)) \cap \theta_t(\sigma)$

$s \in [0,1]$, $\lambda \in \sigma_r(A(s)) \cap \Theta_s(\sigma)$

$B(t) = A(s(1-t))$ $t \in [0,1]$

$\tau(t) = \theta(s(1-t), \Theta_s^{-1}(\lambda))$ $t \in [0,1]$

$\tau(0) = \theta(s, \Theta_s^{-1}(\lambda)) = \lambda \in \sigma(A(s)) = \sigma(B(0))$

$\tau(t) \notin \sigma_{ap}(A(s(1-t))) = \sigma_{ap}(B(t))$

wieder L. 2. V

$\Rightarrow$ $\tau(t) \in \sigma_r(B(t)) \; \forall t \in [0,1]$

$t = 1$ $\Rightarrow$ $\sigma_r(A(s)) \cap \Theta_s(\sigma) \subset \Theta_s(\sigma_r(A(0)) \cap \sigma)$

Spectral mapping results

Theorem (Putnam)

Sei $S = X + iY \in L(H)$ ein hyponormaler Operator, dann gilt

$$Re\,\sigma(S) = \sigma(X) \text{ und } Im\,\sigma(S) = \sigma(Y).$$

$Re\,\sigma(S) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + iy \in \sigma(S)\}$, analog $Im\,\sigma(S)$.

"$\subset$": $x \in Re\,\sigma(S)$ $\exists y \in \mathbb{R}$ $x+iy \in \partial\sigma(S)$ $\subset$

$\exists (\xi_n)$ $\|\xi_n\| = 1$ $\lim (S-z)\xi_n = 0$

$(S-z)^*(S-z) = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + \frac{1}{2}D$ ≥ 0

ξ_n

$\Rightarrow$ $\lim (X-x)^2 \xi_n = 0$ $x \in \sigma_{ap}(X) \Rightarrow Re\,\sigma(T) \subseteq \sigma(X)$

$\subset$: $x \in \sigma(X)$ $\exists\, y \in \sigma(Y)$ $\exists (\xi_n)$ in H $\|\xi_n\| = 1$

$\supset$

s.d. $\lim (X - x)\xi_n = \lim (Y - y)\xi_n = 0$

$\Rightarrow \quad \sigma(X) \subset \mathrm{Re}(\sigma(T))$

Im analog.

Spectral mapping results

Proposition

Sei $S \in L(H)$ hyponormal und $\Delta = (a, b)$ ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sigma_{ap}(S) \cap (\Delta \times \mathbb{R}) = \sigma_{ap}(S_\Delta) \cap (\Delta \times \mathbb{R}).$$

$= x+iy$

$z \in \sigma_{ap}(S)$, $x \in \Delta$ $\quad \|\xi_n\| = 1 \quad \lim_n (T - z)\xi_n = 0$

$\lim (X - x)\xi_n = 0$, $\lim (Y - y)\xi_n = 0$

$\|(X - x)\xi\|^2 \geq \delta^2 \, \| E(\mathbb{R}\setminus\Delta)\xi\|^2$

$\delta = \min(x - a, b - x)$

$\lim E(\mathbb{R}\setminus\Delta)\xi_n = 0$

$\lim (S_\Delta - z) E(\Delta)\xi_n = \lim E(\Delta)(S - z)E(\Delta)\xi_n + \lim E(\Delta)(S - z)E(\mathbb{R}\setminus\Delta)\xi_n$

$\Rightarrow z \in \sigma_{ap}(S_\Delta)$

Spectral mapping results

Theorem (Putnam)

Sei $S \in L(H)$ hyponormal und $\Delta = (a, b)$ ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sigma(S) \cap (\Delta \times \mathbb{R}) = \sigma(S_\Delta) \cap (\Delta \times \mathbb{R}).$$

$G = \Delta \times \mathbb{R}$

Kor. $\underset{\text{hypo.}}{\tilde{T}} = T + i\,\phi\, Y\, \phi$

$\Theta : [0,1] \times G \to \mathbb{C}$

$\sigma_{ap}(\tilde{T}) \cap (\Delta \times \mathbb{R}) = \sigma_{ap}(T) \cap (\Delta \times \mathbb{R})$

$\Theta(t, \lambda) = \lambda \quad , \lambda \in G \quad , t \in [0,1]$

$\phi_t(x) = \begin{cases} 1 - t & , x \notin \Delta \\ 1 & , x \in \Delta \end{cases}$

$\phi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T(t) = X + i\,\phi_t(X)\, Y\, \phi_t(X)$

Ungleichung von Putnam

Theorem

Sei $S \in L(H)$ seminormal mit $D = S^*S - SS^*$. Dann gilt

$$\pi ||D|| \leq meas_2(\sigma(S)).$$

- $meas_1(\; \sigma(Y_\Delta)) = meas_1(proj_y(\;))$
- $\sigma(S_\Delta) \subset \sigma(S_{\Delta'}) \cap (\bar{\Delta} \times \mathbb{R})$

Konsequenz

Ausblick

Theorem (Berger & Shaw)

$\pi \, Trace[T^*, T] \leq m(T) meas_2(\sigma(T))$

pos Dichte

$meas_2 (\mathbb{D} \cap K)$ pos

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

Definition

Sei T ein dicht definierter Operator in H. Dann heißt T in H hyponormal, falls

- $D(T) \subset D(T^*)$
- $||Tx|| \geq ||T^*x||, x \in D(T)$.

Example

Gewichteter Shift mit $|\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}|$ ist hyponormal.

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

Sei T dicht definiert in H. Dann gilt

- T hyponormal genau dann wenn $T^*|_{D(T)} = KT$ mit Kontraktion K.
- Wenn T_1 und T_2 abgeschlossene, hyponormale Operatoren sind und es existieren injektive, beschränkte Operatoren X, Y mit dichtem Bild, sodass $XT_1 \subseteq T_2X$, $YT_2 \subseteq T_1Y$, dann $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.
- T_k hyponormal und $||T_mx - T_nx||$ sowie $||T_m^*y - T_n^*y||$ geeignet. Dann ist $\sigma(T) = \bigcap_{n=1} \bigcup_{k=n}^{\infty} \sigma(T_k)$

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

Proposition

Falls $\mathbb{R}_+ \ni t \to T_t$ *eine stetige Halbgruppe von hyponormalen Operatoren ist, dann ist der Erzeuger*

$$Af = \lim_{t \to 0+} t^{-1}(T_t f - f)$$

hyponormal.

Unbeschränkte hyponormale Operatoren

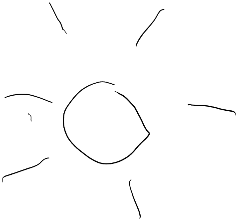
Example

$T = \left(a_0 - \frac{i}{2}a_1' - ia_1\frac{d}{dx}\right)|_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ mit a_0, a_1 Funktionen aus C^1 sodass

- Re $a_0 \neq 0$
- $a_1 = ib_1$ mit $b_1(x) = \frac{cx}{Rea_0(x)}$, $c \in \mathbb{R}$.

Zusammenfassung

- $r(S)$, Bedingung für Resolvente, numerischer Wertebereich ähnlich zu normalen Operatoren
- Subnormale Operatoren, unilaterale Shift
- Ungleichung von Putnam
- Unbeschränkte seminormale Operatoren



References [3], [1], [4], [5], [2]

Kevin Clancey.
Seminormal operators.
In *Seminormal Operators*, pages 1–36. Springer, 1979.

Björn Gustafsson and Mihai Putinar.
Hyponormal quantization of planar domains.
Lecture Notes in Mathematics, 2199, 2017.

Jan Janas.
On unbounded hyponormal operators.
Arkiv för Matematik, 27(1-2):273, 1989.

Mihai Putinar and Mircea Martin.
Lectures on hyponormal operators, volume 39.
Birkhäuser, 2012.

Mohammad Rashid and Basem Masaedeh.
Some applications of the co-hyponormal operators.
2009.