

BACHELORARBEIT

**TRNNM - Gemischte Finite Elemente für
nichtlineare Schalenmodelle**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Bachelor of Science unter der Leitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Joachim Schöberl
E101 - Institut für Analysis und Scientific Computing

eingereicht an der

Technischen Universität Wien
Fakultät für Mathematik und Geoinformation

von

Michael Neunteufel,
e1241601
Dr.-Schober-Straße 85
1130 Wien

Wien, im Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Einführung in die Elastizitätstheorie	5
2.1	Deformation eines Körpers	5
2.2	Beschreibung der Kräfte	7
2.3	Herleitung der Variationsformulierungen	10
2.4	Lineare Elastizität	14
2.5	Neo-Hooksches Materialgesetz	16
2.6	Numerische Experimente	16
3	Dünnwandige Strukturen (Schalenstrukturen)	20
3.1	2D Strukturen	20
3.2	Timoshenko Balken	22
3.3	3D Strukturen	23
4	Plattenmodelle	30
4.1	Hellinger-Reissner Methode	30
4.2	Hellan-Herrmann-Johnson Methode	34
4.3	Reissner-Mindlin Methode	36
4.4	Finite-Elemente-Räume	36
4.5	Minimierungsproblem für gemischte Methoden	37
5	Schalenmodelle	40
5.1	Problembeschreibung und Herleitung	40
5.2	Schubstarre Strukturen	41
5.3	Schubweiche Strukturen	42

Bezeichnungen:

Δ	Laplace-Operator
∇f	$(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$
$\operatorname{div} f$	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$
$\operatorname{curl} f$	$((\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}), (\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}), (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}))^T$
$\operatorname{sp}(A)$	$\sum_{i=1}^n A_{ii}$
$C^k(\Omega)$	Menge aller Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur Ordnung k auf Ω
$L_2(\Omega)$	Menge der über Ω quadrat-integrierbaren Funktionen
\mathcal{P}^k	Menge aller Polynome bis zum Grad k
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	duale Paarung
Φ	Deformation
u	Verschiebung
F	Deformationsgradient
\mathbb{M}^3	Menge aller 3×3 Matrizen
\mathbb{M}_+^3	Menge aller 3×3 Matrizen mit positiver Determinante
\mathbb{O}^3	Menge aller orthogonalen 3×3 Matrizen
\mathbb{O}_+^3	$= \mathbb{O}^3 \cap \mathbb{M}_+^3$
\mathbb{S}^3	Menge aller symmetrischen 3×3 Matrizen
$\mathbb{S}_>^3$	Menge aller positiv definiten Matrizen in \mathbb{S}^3
S^2	Einheitssphäre im \mathbb{R}^3
I	Einheitsmatrix
C	Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor
E	Greenscher Verzerrungstensor
ε	linearisierter Greenscher Verzerrungstensor
σ	linearisierter Spannungstensor

1 Einleitung

Im ersten Kapitel werden grundlegende Ergebnisse der Elastizitätstheorie behandelt, sowie erste Variationsformulierungen hergeleitet. Außerdem werden mit Unterstützung von numerischen Experimenten die Unterschiede zwischen linearer und nichtlinearer Elastizität erläutert. Das zweite Kapitel führt in die Theorie der Schalen, also Strukturen mit dünnen Wänden, ein. Es werden eine geometrische Herleitung eines nichtlinearen Schalenmodells skizziert und geeignete Stetigkeitsanforderungen besprochen. Im darauffolgenden Abschnitt werden einige Plattenmodelle besprochen und geeignete Finite-Elemente-Räume, sowie eine Methode zum Lösen von gemischten Problemen vorgestellt. Im letzten Kapitel werden mit Hilfe der in den vorherigen Abschnitten bereitgestellten Methoden eine Variationsformulierung für schubstarre und schubweiche, nichtlineare Schalenmodelle hergeleitet und numerische Beispiele vorgestellt. Für alle numerischen Experimente wurde das Programm NGSolve¹ zusammen mit der Skriptsprache Python verwendet.

¹cf. [Sch15]

2 Einführung in die Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel werden die benötigten physikalischen Formeln hergeleitet, um eine Variationsformulierung für die Elastizität aufstellen zu können. Für eine Einführung in die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen wird auf [Wri13, Kapitel 3] und [MH12] verwiesen.

In diesem Abschnitt wird wie in [Bra13, Kapitel VI] vorgegangen.

2.1 Deformation eines Körpers

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein offenes und beschränktes Gebiet und der Rand $\partial\Omega$ von Ω sei hinreichend glatt. Durch $\bar{\Omega}$ wird ein Körper beschrieben, welcher sich in einem spannungsfreien Zustand befindet. $\bar{\Omega}$ wird auch als Referenzzustand bezeichnet. Übt man nun eine Kraft auf den Körper aus, so wird sich dieser deformieren. Der aktuelle Zustand des Körpers wird durch die Deformation

$$\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

beschrieben. Setzt man

$$u(x) := \Phi(x) - x \quad \text{für alle } x \in \Omega, \quad (2)$$

so wird mit u die Verschiebung des Körpers beschrieben. Die Verschiebung wird als sehr klein angenommen ($\Phi \approx id$), sodass Terme höherer Ordnung von u oft vernachlässigt werden. Dies führt dann zu der linearisierten Elastizitätstheorie.

Im Folgenden wird angenommen, dass Φ hinreichend glatt ist. Der Gradient

$$F = \nabla\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (3)$$

wird Deformationsgradient genannt.

Eine Deformation heißt zulässig, wenn $\det F > 0$, wenn also die Orientierung erhalten bleibt, sowie Teilmengen mit positiven Volumen wieder auf Teilmengen mit positiven Volumen abgebildet werden.

Die Stärke der Deformation wird durch das Verhältnis von $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$ zu $x + \Delta x - x = \Delta x$ gemessen.

2.1.1 Satz. Seien $x, x + \Delta x \in \Omega$. Dann gilt für $\Phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$$\frac{\|\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)\|_2^2}{\|\Delta x\|_2^2} = \frac{\Delta x^T F^T F \Delta x}{\|\Delta x\|_2^2} + \mathcal{O}(\|\Delta x\|_2).$$

Beweis: Mit Taylor und der Beschränktheit von F gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)\|_2^2}{\|\Delta x\|_2^2} &= \frac{\|\Phi(x) + \nabla\Phi(x)\Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|_2^2) - \Phi(x)\|_2^2}{\|\Delta x\|_2^2} \\
&= \frac{\|F(x)\Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|_2^2)\|_2^2}{\|\Delta x\|_2^2} = \frac{(F(x)\Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|_2^2))^T(F(x)\Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|_2^2))}{\|\Delta x\|_2^2} \\
&= \frac{\Delta x^T F^T F \Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|_2^3)}{\|\Delta x\|_2^2} = \frac{\Delta x^T F^T F \Delta x}{\|\Delta x\|_2^2} + \mathcal{O}(\|\Delta x\|_2).
\end{aligned}$$

■

Die lokale, quadratische Längenänderung im Punkt x in Richtung Δx wird durch den Tensor $F^T F$ beschrieben. Der Tensor

$$C = F^T F \tag{4}$$

wird Cauchy-Greenscherscher Verzerrungstensor (engl.: strain tensor) genannt. Wenn $C = I$ wird der Körper nicht deformiert. Dies nennt man eine Starrkörperbewegung oder „deformfreie Deformation“. Es ist zu erwarten, dass sich ein Körper, welcher nur rotiert oder verschoben wird, nicht verformt.

2.1.2 Satz. Sei Ω ein zusammenhängendes Gebiet und $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dann ist die Deformation genau dann eine Starrkörperbewegung, wenn

$$\Phi(x) = a + Qx$$

für alle $a \in \mathbb{R}^3$ und $Q \in \mathbb{O}_+^3$ gilt.

Beweis: Siehe z.B. [Bra13, S. 277 f].

■

Man definiert

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \tag{5}$$

als die Abweichung von einer Starrkörperbewegung, welche Greenscherscher Verzerrungstensor genannt wird. Dieser ist offensichtlich symmetrisch. Einsetzen von (4) und (2) in (5) liefert

$$E = \frac{1}{2}(\nabla(u + id)^T \nabla(u + id) - I) = \frac{1}{2}(\nabla u^T \nabla u + \nabla u^T + \nabla u). \tag{6}$$

Vernachlässigt man Terme höherer Ordnung, so erhält man in erster Näherung den ebenfalls symmetrischen, linearisierten Verzerrungstensor

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u). \tag{7}$$

2.2 Beschreibung der Kräfte

Im Folgenden wird angenommen, dass sich die Kräfte-Wechselwirkungen vollständig auf flächenhaft verteilt wirkende Kräfte (kurz Flächenkräfte) und volumenhaft verteilt wirkende Kräfte (kurz Volumenkräfte) zurückführen lassen.

Die Schwerkraft ist eine typische Volumenkraft, während z.B. ein Lastwagen eine Flächenkraft auf einer Brücke hervorruft, wenn er über diese fährt.

Die Volumenkraft wird durch eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben, die Flächenkraft durch eine Funktion $t : \Omega \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei S^2 die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Sei $V \subseteq \Omega$ mit hinreichend glattem Rand und dA ein entsprechendes Oberflächenelement mit der Außennormalen n . Dann liefert dA den Beitrag $t(x, n)dA$ zur Kraft. Der Vektor $t(x, n)$ wird Cauchyscher Spannungsvektor (engl.: stress vector) genannt.

Das Axiom des statischen Gleichgewichts besagt, dass sich alle Kräfte und Momente bezüglich eines Punktes auf Null aufaddieren, wenn der Körper im Gleichgewichtszustand ist.

Axiom des statischen Gleichgewichts: Der Körper Ω befinde sich unter den Volumenkräften f im Gleichgewicht. Dann existiert ein Vektorfeld t auf $\Omega \times S^2$, so dass in jeder Teilmenge V von Ω

$$\begin{aligned} \int_V f(x) dx + \int_{\partial V} t(x, n) ds &= 0, \\ \int_V x \times f(x) dx + \int_{\partial V} x \times t(x, n) ds &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Dabei bezeichnet \times das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 .

Der folgende Satz zeigt, dass der Cauchysche Spannungsvektor t linear von der Außennormalen n abhängt.

2.2.1 Satz von Cauchy. Seien $t(\cdot, n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $t(x, \cdot) \in C(S^2, \mathbb{R}^3)$ für alle $x \in \Omega$, $n \in S^2$, sowie $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und der Körper Ω genüge dem Axiom des statischen Gleichgewichts. Dann gibt es ein symmetrisches Tensorfeld $T \in C^1(\Omega, \mathbb{S}^3)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} t(x, n) &= T(x)n, & x \in \Omega, n \in S^2, \\ \operatorname{div} T(x) + f(x) &= 0, & x \in \Omega, \\ T(x) &= T^T(x), & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Der Tensor T wird als Cauchyscher Spannungstensor (engl.: stress tensor) bezeichnet.

Die obigen Gleichungen wurden im Koordinatensystem des deformierten Körpers angegeben. Da angenommen wurde, dass die Verschiebung sehr klein ist, wird der Bildbereich

$\Phi(\Omega) = B$ oft stillschweigend mit Ω identifiziert. Es ist aber wünschenswert, die Verschiebung auch im Koordinatensystem des Referenzgebiets anzugeben. Im Weiteren werden Größen in der Referenzkonfiguration mit einem R gekennzeichnet.

Die Umrechnung der Volumenkraft folgt direkt aus dem Transformationssatz $dx = \det(\nabla\Phi) dx_R$, der Massenerhaltung $\rho(x) dx = \rho_R(x_R) dx_R$ und der Tatsache, dass die Volumenkräfte proportional zur Dichte sind:

$$\begin{aligned}\rho(\Phi(x_R)) &= \det(\nabla\Phi^{-1})\rho_R(x_R) \\ \Rightarrow f(x) &= \det(\nabla\Phi^{-1})f_R(x_R).\end{aligned}$$

Hier wurde implizit die Annahme gemacht, dass die Punkte durch die Deformation nicht in ein geändertes Kraftfeld geraten. Man spricht hier von sogenannten toten Lasten.

Die Transformation des Spannungstensors ist mit etwas mehr Aufwand verbunden. Mit dem sogenannten ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor

$$P := \det(F)TF^{-T} \quad (8)$$

gilt

$$\operatorname{div}_R P + f_R = 0. \quad (9)$$

Dieser ist im Gegensatz zum Cauchyschen Spannungstensor nicht symmetrisch. Daher wird durch Symmetrisieren der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\Sigma := F^{-1}P = \det(F)F^{-1}TF^{-T} \quad (10)$$

eingeführt.

Neben den Gleichgewichtsbedingungen müssen noch die Materialgesetze beachtet werden, da die Deformation eines Körpers auch von seinen Materialeigenschaften abhängt.

2.2.2 Definition. Ein Material heißt elastisch, wenn eine Funktion $\hat{T} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}_+^3$ existiert, sodass

$$T(x) = \hat{T}(F(x_R)) \quad (11)$$

gilt.

Die Funktion \hat{T} heißt Antwortfunktion und (11) nennt man konstitutives Gesetz.

Der Hintergrund für das konstitutive Gesetz ist die Annahme, dass die Spannungen lokal von den Verschiebungen abhängen, wobei nur die ersten Ableitungen berücksichtigt werden.

Die Antwortfunktion für den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor lautet

$$\hat{\Sigma}(F) = \det(F)F^{-1}\hat{T}(F)F^{-T}.$$

2.2.3 Definition. Ein Material heißt homogen, wenn \hat{T} nicht explizit vom Ort x abhängt, d.h. $\hat{T}(x, F) = \hat{T}(F)$.

In weiterer Folge werden nur noch homogene Materialien betrachtet.

Axiom der Koordinatenunabhängigkeit (engl.: frame indifference): Der Cauchy'sche Spannungsvektor $t(x, n) = T(x)n$ ist invariant bezüglich der Rotation des Koordinatensystems, d.h. es gilt

$$Qt(x, n) = t(Qx, Qn) \quad \text{für alle } Q \in \mathbb{O}_+^3.$$

2.2.4 Definition. Ein Material heißt objektiv, wenn es dem Axiom der Koordinatenunabhängigkeit genügt.

2.2.5 Satz. Sei das Axiom der Koordinatenunabhängigkeit erfüllt. Dann gilt

$$\hat{T}(QF) = Q\hat{T}(F)Q^T \quad \text{für alle } Q \in \mathbb{O}_+^3.$$

Insbesondere gibt es eine Funktion $\tilde{\Sigma} : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ mit

$$\hat{\Sigma}(F) = \tilde{\Sigma}(F^T F),$$

d.h. $\hat{\Sigma}$ hängt nur von $F^T F$ ab.

2.2.6 Definition. Ein Material heißt isotrop, wenn keine Richtung im Material ausgezeichnet ist.

2.2.7 Bemerkung. Holz, Kristalle oder geschichtete Materialien sind nicht isotrop.

Die Isotropie besagt, dass sich die Spannungen des Körpers nicht ändern, wenn man den nicht deformierten Körper vor der Deformation dreht.

2.2.8 Satz. Ein Material ist isotrop genau dann, wenn $\hat{T}(F) = \hat{T}(FQ)$ für alle $Q \in \mathbb{O}_+^3$. Dies ist äquivalent zu $\hat{T}(F) = \bar{T}(FF^T)$ mit einer passenden Funktion \bar{T} .

Aufgrund der oben beschriebenen Eigenschaften hängt die Antwortfunktion hauptsächlich von den Invarianten der Matrizen ab. Für 3×3 Matrizen können die drei Invarianten $l_A = (l_1(A), l_2(A), l_3(A))$ über das charakteristische Polynom

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - l_1(A)\lambda^2 + l_2(A)\lambda - l_3(A)$$

berechnet werden. Diese können mit Hilfe der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A aus-

gedrückt werden:

$$l_1(A) = \sum_1^3 a_{ii} = \text{sp}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$l_2(A) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2) = \frac{1}{2} ((\text{sp}(A))^2 - \text{sp}(A^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,$$

$$l_3(A) = \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Damit kann der berühmte Satz der Mechanik formuliert werden.

2.2.9 Satz (Rivlin-Ericksen-Theorem). Eine Antwortfunktion $\hat{T} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ ist genau dann objektiv und isotrop, wenn sie von der Form $\hat{T}(F) = \bar{T}(FF^T)$ und

$$\bar{T} : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 : \bar{T}(B) = \beta_0(l_B)I + \beta_1(l_B)B + \beta_2(l_B)B^2$$

ist. Dabei sind $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ Funktionen der Invarianten von B .

Beweis: Siehe z.B. [Bra13, S. 283 f]. ■

2.2.10 Korollar. Für ein isotropes und objektives Material gilt für den Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\Sigma(F) = \tilde{\Sigma}(F^T F),$$

mit $\tilde{\Sigma}(C) = \gamma_0 I + \gamma_1 C + \gamma_2 C^2$, wobei $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ Funktionen der Invariante l_C sind.

2.2.11 Satz. Sei ein isotropes und objektives Material gegeben und seien γ_0, γ_1 und γ_2 differenzierbare Funktionen von $l_1(E), l_2(E)$ und $l_3(E)$. Dann gibt es Zahlen π, λ, μ mit

$$\tilde{\Sigma}(I + 2E) = -\pi I + \lambda \text{spur}(E)I + 2\mu E + o(E).$$

Beweis: Siehe z.B. [Bra13, S. 285]. ■

Wenn $C = I$ gilt, dann befindet sich der Körper im spannungsfreien Zustand. Damit ist $\pi = 0$. Die anderen beiden Koeffizienten werden als Lamé-Konstante bezeichnet.

Vernachlässigt man Terme höherer Ordnung, so erhält man das linearisierte Materialgesetz von Hooke

$$\tilde{\Sigma}(I + 2E) = \lambda \text{spur}(E)I + 2\mu E.$$

2.3 Herleitung der Variationsformulierungen

Ausgehend vom Satz von Cauchy werden die Variationsformulierungen für die Elastizität hergeleitet. Der Gleichgewichtszustand eines elastischen Körpers wird durch folgende

Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} T(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ \Phi(x) &= \Phi_0(x), & x \in \Gamma_D, \\ T(x)n &= g(x), & x \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

Dabei ist Φ_0 eine vorgegebene Deformation auf dem Dirichlet-Rand Γ_D , sowie g eine vorgegebene Flächenlast auf dem Neumann-Rand Γ_N .

Diese Gleichungen können nun als Randwertaufgabe aufgefasst werden.

Gesucht ist die Deformation Φ , sodass gilt

$$-\operatorname{div} \hat{T}(x, \nabla \Phi(x)) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

$$\Phi(x) = \Phi_0(x), \quad x \in \Gamma_D, \quad (13)$$

$$\hat{T}(x, \nabla \Phi(x))n = g(x), \quad x \in \Gamma_N. \quad (14)$$

Der Einfachheit halber werden f , g und Φ als tote Lasten betrachtet.

2.3.1 Definition. Ein elastisches Material heißt hyperelastisch, wenn es eine Energiefunktion $\hat{W} : \Omega \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\hat{T}(x, F) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, F)$ für alle $x \in \Omega$ und $F \in \mathbb{M}_+^3$ gilt.

Für objektive und isotrope Materialien gelten für die Energiefunktion ähnliche Ergebnisse wie bei der Antwortfunktion. Diese werden im folgenden Satz nochmals aufgelistet.

2.3.2 Satz. Für ein objektives Material ist $\hat{W}(x, \cdot)$ nur eine Funktion von $C = F^T F$,

$$\hat{W}(x, F) = \tilde{W}(x, F^T F)$$

und für den Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor gilt für alle $C \in \mathbb{S}_>^3$

$$\tilde{\Sigma}(x, C) = 2 \frac{\partial \tilde{W}(x, C)}{\partial C}.$$

Weiters hängt \tilde{W} nur von den Invarianten von C ab

$$\tilde{W}(x, C) = \hat{W}(x, I_C) \quad \text{für alle } C \in \mathbb{S}_>^3.$$

Analog gilt für isotrope Materialien

$$\hat{W}(x, F) = \hat{W}(x, FQ), \quad \text{für alle } F \in \mathbb{M}_+^3 \text{ und } Q \in \mathbb{O}_+^3.$$

Für kleine Deformationen gilt mit $C = I + 2E$ insbesondere

$$\tilde{W}(x, C) = \frac{\lambda}{2} (\operatorname{sp}(E))^2 + \mu E : E + o(E^2). \quad (15)$$

2.3.3 Definition. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist das innere Produkt $A : B$ definiert als

$$A : B := \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij} = \text{sp}(AB^T) .$$

Bei einem hyperelastischen, objektiven und isotropen Material kann die Antwortfunktion also durch eine Energiefunktion ausgedrückt werden, welche wiederum nur von den Invarianten des Cauchy-Greenschens Verzerrungstensors abhängt.

Damit erhält man folgende Randwertaufgabe:

Gesucht ist die Verschiebung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{aligned} F &= I + \nabla u, \quad C = F^T F, \quad \Sigma = 2 \frac{\partial W}{\partial C}, \quad P = F \Sigma, \\ -\text{div } P &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= u_D \text{ auf } \Gamma_D, \\ Pn &= g \text{ auf } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{16}$$

Um daraus eine Variationsformulierung herzuleiten, werden einige Ergebnisse aus der Sobolevraumtheorie benötigt.

2.3.4 Definition. Der Funktionenraum aller lokal integrierbaren Funktionen ist definiert als

$$L_1^{loc}(\Omega) := \{u : u|_K \in L_1(K) \text{ für alle } K \subset \Omega \text{ kompakt}\} .$$

2.3.5 Definition. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Sobolevnorm

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} := \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2} .$$

Die Sobolevräume sind nun folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} H^k(\Omega) &:= \{u \in L_1^{loc} : \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}, \\ H_0^k(\Omega) &:= \{u \in H^k(\Omega) : \text{tr } u = 0\}. \end{aligned}$$

Sei $\Gamma_D \subset \partial\Omega$. Dann ist

$$H_{\Gamma_D}^k(\Omega) := \{u \in H^k(\Omega) : \text{tr}_{\Gamma_D} u = 0\} .$$

Der Dualraum zu $H_0^k(\Omega)$ wird mit H^{-k} bezeichnet

$$H^{-k}(\Omega) := [H_0^k(\Omega)]^* .$$

Die Dualraumnorm $\|\cdot\|_{H^{-k}}$ ist definiert als

$$\|u\|_{H^{-k}} := \sup_{0 \neq v \in H_0^k(\Omega)} \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|_{H^k(\Omega)}} .$$

2.3.6 Satz. Es existiert ein linearer, stetiger Spuroperator

$$\text{tr} : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega),$$

so dass $\text{tr } v = v|_{\partial\Omega}$ für alle $v \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt.

2.3.7 Definition. Der Funktionenraum $H(\text{div})$ ist definiert als

$$H(\text{div}, \Omega) := \{\sigma \in [L_2(\Omega)]^n : \text{div } \sigma \in L_2(\Omega)\},$$

mit der Norm

$$\|\sigma\|_{H(\text{div})} = \sqrt{\|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\text{div } \sigma\|_{L_2(\Omega)}^2},$$

wobei

$$\|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 := \sum_{i=1}^n \|\sigma_i\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Der Dualraum $H^{-1}(\text{div})$ von $H(\text{div})$ ist definiert als

$$H^{-1}(\text{div}, \Omega) := \{\sigma \in [H^{-1}(\Omega)]^n : \text{div } \sigma \in H^{-1}(\Omega)\},$$

mit der Norm

$$\|\sigma\|_{H^{-1}(\text{div})} = \sqrt{\|\sigma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\text{div } \sigma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2}.$$

2.3.8 Definition. Der Funktionenraum $H(\text{curl})$ ist definiert als

$$H(\text{curl}, \Omega) := \{u \in [L_2(\Omega)]^n : \text{curl } u \in [L_2(\Omega)]^n\},$$

mit der Norm

$$\|u\|_{H(\text{curl})} = \sqrt{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\text{curl } u\|_{L_2(\Omega)}^2}.$$

2.3.9 Definition. Die Divergenz einer matrixwertigen Funktion σ ist definiert als

$$\text{div} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

d.h. auf jede Zeile der Matrix wird die Divergenz angewendet.

Damit lassen sich nun Sobolevräume von matrixwertigen Funktionen definieren.

2.3.10 Definition.

$$\begin{aligned} H(\text{div}, \Omega) &:= \{u \in [L_2(\Omega)]^{n \times n} : \text{div } u \in [L_2(\Omega)]^n\} \\ L_2(\Omega)^{\text{sym}} &:= \{v \in [L_2(\Omega)]^{n \times n} : v_{ji} = v_{ij}, i, j = 1, \dots, n\} \\ H(\text{div}, \Omega)^{\text{sym}} &:= \{v \in L_2(\Omega)^{\text{sym}} : \text{div } v \in [L_2(\Omega)]^n\} \end{aligned}$$

Es wird noch ein Lemma zur partiellen Integration von matrixwertigen Funktionen benötigt.

2.3.11 Lemma. Sei A eine matrixwertige Funktion mit $A \in H(\text{div})$, $v \in [H_{\Gamma_D}^1(\Omega)]^n$ und ν der äußere Einheitsnormalenvektor. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \text{div}(A) \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} A : \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} A\nu \cdot v \, ds.$$

Multipliziert man nun (16) mit einer Testfunktion $v \in [H_{\Gamma_D}^1(\Omega)]^3$, integriert beide Seiten und führt eine partielle Integration durch, so erhält man folgende Variationsformulierung:

Finde ein $\Sigma \in L_2(\Omega)^{sym}$, so dass

$$\int_{\Omega} F\Sigma : \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx - \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, ds \quad \text{für alle } v \in [H_{\Gamma_D}^1(\Omega)]^3. \quad (18)$$

Dazu äquivalent ist das Minimierungsproblem:

Finde ein $u \in [H^1(\Omega)]^3$, so dass

$$J(u) = \int_{\Omega} W(C(u)) \, dx - \int_{\Omega} f \cdot u - \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds \rightarrow \min!.$$

2.4 Lineare Elastizität

Für hinreichend kleine Deformationen sind die Unterschiede zwischen den drei Spannungstensoren zu vernachlässigen. In diesem Unterabschnitt wird σ für den linearisierten Spannungstensor und ε für den linearisierten Verzerrungstensor geschrieben.

Wenn man einen Körper durch eine Verzerrung ε z.B. dehnt, entsteht dadurch eine Zugspannung σ . Für kleine Verzerrungen verhält sich σ nach dem Hookschen Gesetz linear zur Verzerrung. Es gilt also

$$\sigma = D(\varepsilon), \quad (19)$$

wobei der Tensor D das Materialgesetz in Abhängigkeit von ε beschreibt.

Setzt man (19) in (12) ein, so erhält man

$$-\text{div}D\varepsilon(u) = f. \quad (20)$$

Zuerst multipliziert man (20) mit einer Testfunktion $v \in [H_0^1(\Omega)]^3$, integriert beide Seiten und führt auf der linken Seite eine partielle Integration durch

$$\int_{\Omega} D\varepsilon(u) : \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx. \quad (21)$$

Da $\sigma = D\varepsilon(u)$ symmetrisch ist, gilt weiters

$$\sigma : \nabla v = \sigma : (\nabla v)^T = \sigma : \frac{1}{2} \left\{ \nabla v + (\nabla v)^T \right\} = \sigma : \varepsilon(v). \quad (22)$$

Damit erhält man die Variationsformulierung für die linearisierte Elastizität:
Finde ein $u \in [H^1(\Omega)]^3$, so dass

$$\int_{\Omega} D\varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \text{für alle } v \in [H_0^1(\Omega)]^3. \quad (23)$$

Setzt man das linearisierte Materialgesetz von Hook

$$D(\varepsilon) = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{sp}(\varepsilon)I \quad (24)$$

ein, so erhält man folgende Variationsformulierung:

Finde ein $u \in [H^1(\Omega)]^3$, so dass

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \text{für alle } v \in [H_0^1(\Omega)]^3. \quad (25)$$

2.4.1 Bemerkung. Man beachte, dass $\operatorname{sp}(\varepsilon(u)) = \operatorname{div} u$ gilt.

2.4.2 Satz (Charakterisierungssatz). Sei V ein linearer Raum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, positive Bilinearform. Ferner sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Die Größe $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle$ nimmt in V ihr Minimum genau dann bei u an, wenn $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ für alle $v \in V$ gilt. Außerdem gibt es höchstens eine Minimallösung.

Beweis: Siehe z.B. [Bra13, S. 34]. ■

2.4.3 Korollar. Die Lösung des Minimierungsproblems

$$J(u) = \int_{\Omega} \mu\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{div} u)^2 \, dx - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx \rightarrow \min! \quad (26)$$

löst das Variationsproblem (25).

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus dem Charakterisierungssatz. ■

Die obigen Variationsformulierungen verwenden die beiden Lamé-Konstanten λ und μ . In der Praxis werden jedoch die physikalisch besser interpretierbaren Parameter E (Young-Modul, Elastizitätsmodul) und ν (Querkontraktionszahl, Poisson-Zahl) verwendet.

Der Elastizitätsmodul beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung bei der Verformung eines Körpers bei linear elastischem Verhalten.

Wenn man einen Körper dehnt, so verändert sich auch seine Querdimension. Die Poisson-Zahl beschreibt diese Querkontraktion. Durch physikalische Gegebenheiten gilt $\lambda > 0$ und $\mu > 0$, sowie $E > 0$ und $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

Die Formeln für die Umrechnung lauten wie folgt:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Man beachte, dass aus $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$, $\lambda \rightarrow \infty$ folgt. Dies führt zu einer schlechten Kondition und verlangt robustere Methoden zum Lösen. Inkompressible Materialien wie Gummi weisen diese Eigenschaft auf.

2.5 Neo-Hooksches Materialgesetz

Bei sehr starken Deformationen wird ein Material teilweise stark belastet und zusammengedrückt. Dies kann dazu führen, dass sich Elemente bei der Diskretisierung durchbiegen, was weder wünschenswert noch realistisch ist (vgl. Abbildung 1 links).

Es ist zu erwarten, dass es umso schwieriger wird ein Material zu komprimieren, je stärker es bereits komprimiert wurde. Dies lässt sich mit dem sogenannten Neo-Hookschen Materialgesetz

$$N(C) := \frac{\mu}{2} \left(\text{spur}(C - I) + \frac{2\mu}{\lambda} (\det(C))^{-\frac{\lambda}{2\mu}} - 1 \right) \quad (27)$$

modellieren.

Man beachte, dass $N(C) \rightarrow +\infty$ für $C \rightarrow 0$ gilt, die benötigte Energie ist also bestimmt divergent gegen $+\infty$, wenn das Volumen gegen Null gehen soll (vgl. Abbildung 1 rechts).

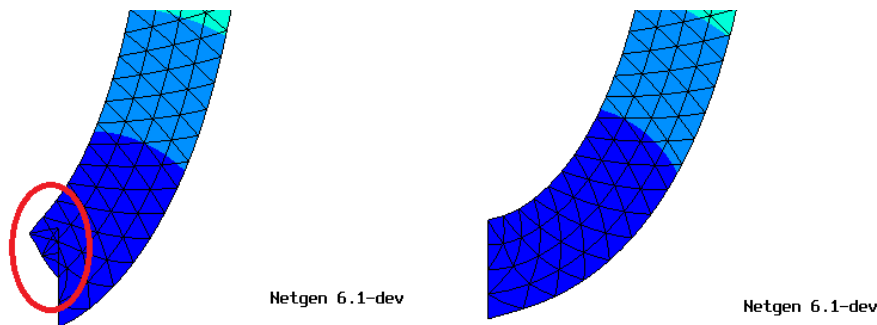


Abbildung 1: Durchbiegen der Elemente links und Verhinderung durch das Neo-Hooksche Materialgesetz rechts

2.6 Numerische Experimente

Um die Unterschiede zwischen linearer und nichtlinearer Elastizität zu verdeutlichen, wird mit beiden Methoden ein numerisches Experiment durchgeführt.

Gegeben sei eine zweidimensionale Stahlplatte (Elastizitätsmodul: 108 kN/mm^2 , Poisson-Zahl: 0.28), welche auf einer Seite eingespannt ist (homogene Dirichletrandbedingung) und gleichmäßig mit einer Volumenkraft von oben belastet wird.

Für die lineare Elastizität wird das Minimierungsproblem (26) mittels Newton-Verfahren mit Liniensuche gelöst.

Bei der nichtlinearen Elastizität wird mit Hilfe von (15) folgendes Minimierungsproblem aufgestellt und verwendet:

Finde ein $u \in [H^1(\Omega)]^3$, so dass

$$J(u) = \int_{\Omega} \mu E(u) : E(u) + \frac{\lambda}{2} (\text{sp}(E(u)))^2 - \int_{\Omega} f \cdot u \rightarrow \min! .$$

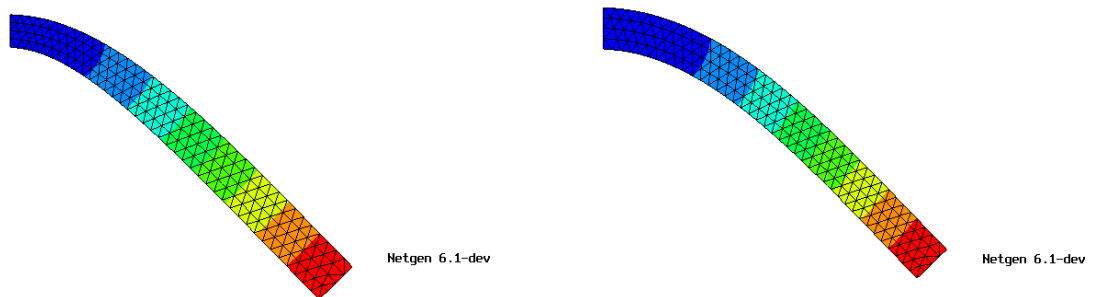


Abbildung 2: Lineare und nichtlineare Elastizität

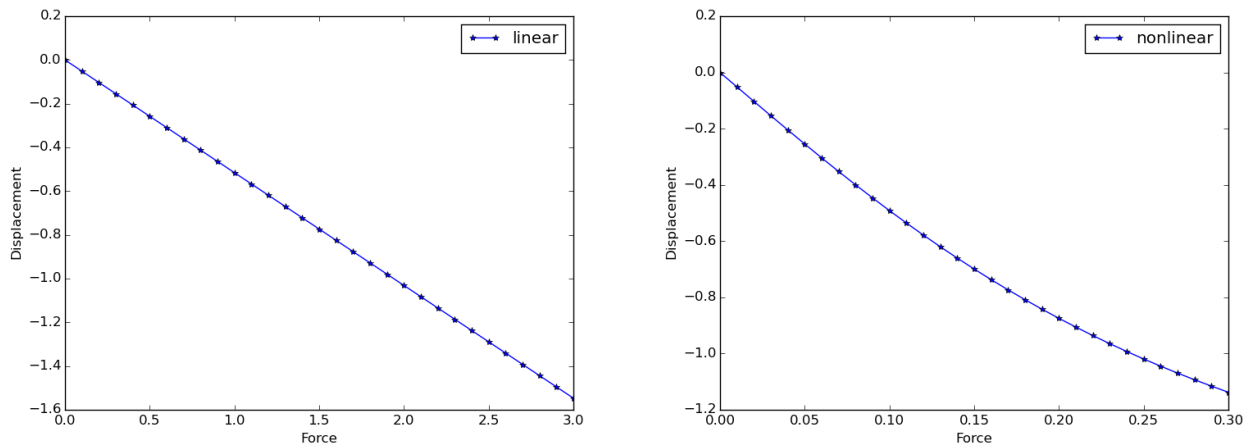


Abbildung 3: Lineare und nichtlineare Elastizität bei unterschiedlichem Belastungsgrad

Wie aus Abbildung 2 entnommen werden kann, wird das Ergebnis der linearen Methode bei hoher Belastung unrealistisch.

Im Fall der nichtlinearen Elastizität entspricht das Ergebnis deutlich mehr der Realität. Bei starken Belastungen ist es vorteilhaft, die nichtlinearen Terme zu berücksichtigen.

Bei geringer Belastung sind die Unterschiede hingegen vernachlässigbar (vgl. Abbildung 4)

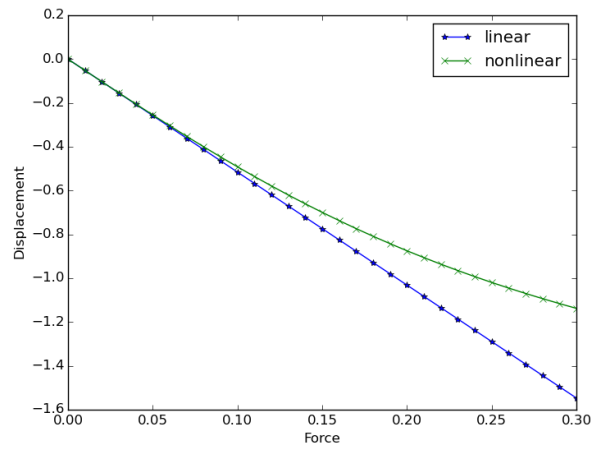


Abbildung 4: Vergleich lineare und nichtlineare Elastizität bei geringer Belastung

Listing 1: elasticitynonlinear.py

```

import netgen.geom2d as geom2d
from ngsolve import *

geom = geom2d.SplineGeometry()
pnts = [ (0,0), (2,0), (2,0.2), (0,0.2) ]
pind = [ geom.AppendPoint(*pnt) for pnt in pnts ]
lines = [ (0,1,1), (1,2,2), (2,3,3), (3,0,4) ]
for p1,p2,bc in lines:
    geom.Append(['line', pind[p1], pind[p2]], bc=bc)
mesh = Mesh(geom.GenerateMesh(maxh=0.05))

fes = H1(mesh, order=3, dirichlet=[4], dim=mesh.dim)
factorspace = FESpace("number", mesh)
factor = GridFunction(factorspace)

E = 108
nu = 0.28
#Transform to Lamé parameters
lam = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu))
mu = E/(2*(1+nu))

u = fes.TrialFunction()
force = CoefficientFunction((0, -0.01))
I = IdentityCF(mesh.dim)
F = u.Deriv()+I
# Cauchy-Green strain tensor
C = F*F.trans
E = 0.5*(C-I)
trace = Trace(E)

a = BilinearForm(fes, symmetric=False)
a += SymbolicEnergy(mu*InnerProduct(E,E)+lam*0.5*trace*trace)
a += SymbolicEnergy(-factor*InnerProduct(force,u))
u = GridFunction(fes)

gradu = CoefficientFunction(u.Deriv())
viseps = 0.5*(gradu + gradu.trans+gradu*gradu.trans)
Draw(viseps, mesh, "strain")
Draw(u, mesh, "displacement")

for loadstep in range(30):
    factor.vec[:] = loadstep+1
    NewtonMinimization(a, u)
    Redraw()

```

3 Dünnwandige Strukturen (Schalenstrukturen)

Viele technische Anwendungen verwenden Strukturen mit dünnen Wänden. Es ist prinzipiell möglich diese mit dreidimensionalen Elementen zu simulieren. Dazu würde man jedoch sehr viele Elemente benötigen und der Diskretisierungsfehler der Standardmethoden ist recht groß.

Stattdessen kann man versuchen, eine niederdimensionale Modellgleichung abzuleiten, welche das Verhalten der Struktur genau genug approximiert.

Für eine umfassende Einführung in die Schalentheorie wird auf [CB11], [Wri13, Kapitel 9.4] und [BWBR04] verwiesen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Strukturen eine homogene Dicke t besitzen.



Abbildung 5: Struktur mit dünner Wand

3.1 2D Strukturen

Zuerst wird der Fall eines zweidimensionalen Problems betrachtet, welches auf ein ein-dimensionales zurückgeführt werden soll.

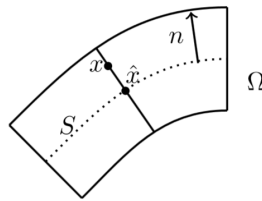


Abbildung 6: Schalenstruktur

Seien dazu $U \subset \mathbb{R}$ ein Gebiet und $u, n : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ Funktionen. $S := u(U)$ wird Mittellinie genannt und n bezeichne den skalierten Normalenvektor mit $\|n\|_2 = \frac{t}{2}$. Das zweidimensionale Gebiet Ω kann damit wie folgt beschrieben werden:

$$\Omega = \{\hat{x} + zn(\hat{x}) : \hat{x} \in S, z \in [-1, 1]\}.$$

Es ist nun eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ gesucht, für die gilt

$$u(x) = u_0(\hat{x}) + zu_1(\hat{x}),$$

wobei $x = \hat{x} + zn(\hat{x})$ (vgl. Abbildung 6).

Dazu wird eine Galerkin-Semidiskretisierung mit dem Ansatz

$$u = \begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{M_x} u_i^x(x) y^i \\ \sum_{i=0}^{M_y} u_i^y(x) y^i \end{pmatrix}$$

durchgeführt.

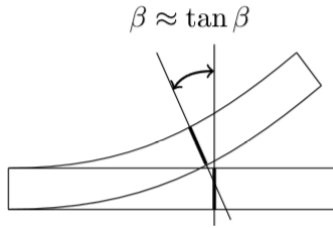
Im Folgenden wird die Methode niedrigster Ordnung $M_x = 1$ und $M_y = 0$ betrachtet.

Sei dazu $\Omega = I \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$ mit dem Dickeparameter $t, 0 < t \ll 1$, und $I = (0, \omega)$. Weiters seien $u, \nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sowie $U, \beta, w, V, \delta, v \in H_0^1(I)$ gegeben mit

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} U(x) - y\beta(x) \\ w(x) \end{pmatrix},$$

$$\nu(x, y) = \begin{pmatrix} V(x) + y\delta(x) \\ v(x) \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnen U und w die mittlere horizontale und vertikale Verschiebung. β kann als Verdrehung interpretiert werden. Man beachte, dass auf Grund der Kleinwinkelnäherung $\beta \approx \tan \beta$ gilt.



Gesucht ist folgende Variationsformulierung:

Finde ein u , so dass

$$\int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(\nu) + \lambda \operatorname{sp}(\varepsilon(u)) \operatorname{sp}(\varepsilon(\nu)) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \nu \, dx \quad \text{für alle } \nu. \quad (28)$$

Es gilt:

$$\nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} U' - y\beta' & \beta \\ w' & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(U' - y\beta') & w' - \beta \\ w' - \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon(u) : \varepsilon(\nu) &= \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon(u)_{ij} \varepsilon(\nu)_{ij} \\ &= \frac{1}{4} (4(U' - y\beta')(V' - y\delta') + 2(w' - \beta)(v' - \delta)) \\ &= (U' - y\beta')(V' - y\delta') + \frac{1}{2} (w' - \beta)(v' - \delta). \end{aligned}$$

Anschließendes Einsetzen und Integrieren ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
& \int_I \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} 2\mu\varepsilon(u) : \varepsilon(\nu) + \lambda \operatorname{sp}(\varepsilon(u))\operatorname{sp}(\varepsilon(\nu)) \, dy \, dx \\
&= \int_I \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (2\mu + \lambda)(U' - y\beta')(V' - y\delta') + \mu(w' - \beta)(v' - \delta) \, dy \, dx \\
&= \int_I (2\mu + \lambda)tU'V' + (2\mu + \lambda)\frac{t^3}{12}\beta'\delta' + \mu t(w' - \beta)(v' - \delta) \, dx.
\end{aligned}$$

Da $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ als konstant entlang der Wanddicke angenommen werden kann, also nur eine Funktion von x ist, vereinfacht sich die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
\int_I \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} f(x) \cdot \nu(x, y) \, dy \, dx &= \int_I \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} f_1(x) (V(x) + y\delta(x)) + f_2(x)v(x) \, dy \, dx \\
&= \int_I t f_1(x)V(x) + t f_2(x)v(x) \, dx \\
&= t \int_I f \cdot \begin{pmatrix} V \\ v \end{pmatrix} \, dx.
\end{aligned}$$

Damit erhält man die folgende Variationsformulierung:

Finde ein U , w und $\beta \in H_0^1(I)$, so dass

$$\begin{aligned}
(2\mu + \lambda)t \int_I U'V' \, dx &= t \int_I f_1 V \, dx, \quad \forall V \in H_0^1(I), \quad (29) \\
(2\mu + \lambda)\frac{t^3}{12} \int_I \beta'\delta' \, dx + \mu t \int_I (w' - \beta)(v' - \delta) \, dx &= t \int_I f_2 v \, dx, \quad \forall (v, \delta) \in [H_0^1(I)]^2. \quad (30)
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung beschreibt die Längenverschiebung. Die zweite Gleichung, welche die vertikale Durchbiegung beschreibt, ist interessanter.

3.2 Timoshenko Balken

Vernachlässigt man die Koeffizienten der Gleichung (30) und skaliert $f := \frac{1}{t^2} f_2$, so erhält man folgendes Modellproblem:

Finde ein $(w, \beta) \in [H_0^1(\Omega)]^2$, so dass

$$\int_{\Omega} \beta'\delta' + \frac{1}{t^2} (w' - \beta)(v' - \delta) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{für alle } (v, \delta) \in [H_0^1(\Omega)]^2. \quad (31)$$

Dieses Problem wird auch als Balkenmodell von Timoshenko bezeichnet.

Man erhält das dazu äquivalente Minimierungsproblem:

$$\min_{w, \beta} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\beta')^2 \, dx + \frac{1}{2t^2} \int_{\Omega} (w' - \beta)^2 \, dx - \int_{\Omega} f w \, dx.$$

Der erste Term wird als Biegeenergie interpretiert, während der zweite als Scherenergie, also die Abweichung der Normalen der deformierten Mittellinie von der deformierten Normalen der Referenzmittellinie, bezeichnet wird.

Dieser kann als Strafterm-Approximation der Nebenbedingung $\beta = w'$ für $t \rightarrow 0$ interpretiert werden, also

$$\min_w \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w'')^2 dx - \int_{\Omega} f w dx,$$

oder äquivalent dazu:

Finde ein $w \in H_0^2(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} w'' v'' dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{für alle } v \in H_0^2(\Omega).$$

Dies ist das Balkenproblem von Bernoulli.

Für kleine Parameter $0 < t \ll 1$ ist das Problem (31) schlecht konditioniert.

Durch Umschreiben der Variationsformulierung kann man dieses Problem beheben.

Definiere dazu

$$\eta := \frac{1}{t^2} (w' - \beta).$$

Damit lautet das neue Problem:

Finde ein $(w, \beta) \in [H_0^1(\Omega)]^2$ und $\eta \in L_2(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} \beta' \delta' dx + \int_{\Omega} (v' - \delta) \eta dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{für alle } (v, \delta) \in [H_0^1(\Omega)]^2, \quad (32)$$

$$\int_{\Omega} (w' - \beta) \gamma dx - t^2 \int_{\Omega} \eta \gamma dx = 0 \quad \text{für alle } \gamma \in L_2(\Omega). \quad (33)$$

In dieser Form ist der Grenzfall $t = 0$ nun wohldefiniert.

3.3 3D Strukturen

Ziel dieses Abschnitts ist es, ein dreidimensionales, dünnwandiges Problem auf ein zweidimensionales zurückzuführen.

Seien dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand, $S \subset \Omega$, sowie $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Referenzgebiet.

Im Folgenden werden einige Funktionen eingeführt.

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibe die Verschiebung von Ω , während $u_0 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Translation von S angibt. Die Rotation der Normalen auf S wird mit der Funktion $\beta : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ modelliert (vgl. Abbildung 7 auf der nächsten Seite).

Weiters seien eine surjektive Einbettung $\varphi : U \rightarrow S$ und $n : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, welche die Einheitsnormalenvektoren auf S beschreibt, gegeben.

Seien außerdem $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $u(\hat{x} + zn(\xi)) = u_0(\hat{x}) + z\beta(\hat{x})$, wobei $\hat{x} = \varphi(\xi)$. S ist

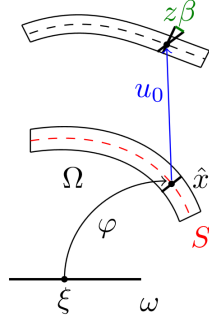


Abbildung 7: Einbettung φ und Funktionen u_0 und β

damit eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 .

Es wird wieder angenommen, dass Ω eine dünnwandige Struktur besitzt. Dann kann Ω folgendermaßen beschrieben werden:

$$\Omega = \left\{ \varphi(\xi) + zn(\xi) : \xi \in U, z \in \left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right] \right\}.$$

Die Menge aller Punkte $\{\hat{x} = \varphi(\xi) : \xi \in U\}$ beschreibt die Mittelebene S der Struktur im \mathbb{R}^3 . z bezeichnet dabei den skalierten Einheitsnormalenvektor. Auch hier ist t der Dickeparameter mit $0 < t \ll 1$.

Zuerst betrachtet man den Gradienten von u . Dazu berechnet man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}u$ und $\frac{\partial}{\partial \xi}u$. u' bezeichne die totale Ableitung von u .

Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (u(\hat{x} + zn)) &= u'(\hat{x} + zn)n \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (u(\hat{x} + zn)) &= u'(\hat{x} + zn) (\varphi' + zn') \\ \Rightarrow \nabla_{(z,\xi)} u(\hat{x} + zn) &= u'(\hat{x} + zn) (n, \varphi' + zn'). \end{aligned} \quad (34)$$

Mit der Beziehung $u(\hat{x} + zn) = u_0(\hat{x}) + z\beta(\hat{x})$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (u(\hat{x} + zn)) &= \frac{\partial}{\partial z} (u_0(\hat{x}) + z\beta(\hat{x})) \\ &= \beta(\hat{x}) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (u(\hat{x} + zn)) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (u_0(\hat{x}) + z\beta(\hat{x})) \\ &= u'_0(\hat{x})\varphi' + z\beta'(\hat{x})\varphi' \\ &= (u'_0(\hat{x}) + z\beta'(\hat{x}))\varphi' \\ \Rightarrow \nabla_{(z,\xi)} u(\hat{x} + zn) &= (\beta(\hat{x}), u'_0(\hat{x}) + z\beta'(\hat{x})\varphi'). \end{aligned} \quad (35)$$

Man muss aufpassen, wenn man von Ableitungen auf S redet. Dazu wird die Einbettung φ auf einen Diffeomorphismus erweitert, sodass man die Ableitungen berechnen kann und dann zurück auf die Tangentialebene projiziert. Durch Gleichsetzen von (34) und (35) erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(u(\hat{x} + zn)) = u'(\hat{x} + zn)(\varphi' + zn') = \nabla_{\tau} u_0 \varphi' + z \nabla_{\tau} \beta \varphi', \quad (36)$$

wobei ∇_{τ} die Tangentialableitung auf S bezeichnet.

Es wird folgendes Lemma über pseudoinverse Abbildungen benötigt.

3.3.1 Lemma. Es seien $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, $f_1 : W \rightarrow f(V)$ die Orthogonalprojektion auf $f(V)$ und $f_2 : f(V) \rightarrow V$ jene Abbildung, die jedem Vektor aus $f(V)$ sein einziges f -Urbild in $(\ker f)^{\perp}$ zuordnet. Dann ist

$$f^{\dagger} = f_2 \circ f_1$$

die Pseudoinverse von f . Insbesondere gilt

$$f \circ f^{\dagger} = f_1.$$

Beweis: Siehe z.B. [Hav08, S. 384]. ■

Nun wird die Pseudo-Inverse $(\varphi')^{\dagger}$ von rechts auf (36) angewendet. Unter Berücksichtigung von $\varphi' \circ \varphi'^{\dagger} = P_{\tau}$ gilt

$$\begin{aligned} u'(\varphi' \circ \varphi'^{\dagger} + zn' \circ \varphi'^{\dagger}) &= \nabla_{\tau} u_0 \varphi' \circ \varphi'^{\dagger} + z \nabla_{\tau} \beta \varphi' \circ \varphi'^{\dagger} \\ \Leftrightarrow u'(P_{\tau} + z \nabla_{\tau} n) &= \nabla_{\tau} u_0 + z \nabla_{\tau} \beta. \end{aligned}$$

Damit erhält man folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_{\tau}}(u(\hat{x} + zn)) &= u'(P_{\tau} + z \nabla_{\tau} n) = \nabla_{\tau} u_0 + z \nabla_{\tau} \beta \\ \frac{\partial}{\partial z}(u(\hat{x} + zn)) &= u'n = \beta \\ \nabla u(\hat{x} + zn) &= P_{\tau} \nabla u + P_n \nabla u = \nabla_{\tau} u_0 + z \nabla_{\tau} \beta + nn^T \nabla u = \nabla_{\tau} u_0 + z \nabla_{\tau} \beta + \beta n^T \\ P_n &= nn^T \\ P_{\tau} &= I - nn^T. \end{aligned}$$

P_{τ} bezeichnet dabei die Projektion auf die Tangentialebene $T(\hat{x})$ von S und P_n die Projektion auf die Normalenkomponente. Da nn^T eine symmetrische Matrix ist, sind P_n und P_{τ} symmetrisch und damit Orthogonalprojektionen.

Sei

$$C = (I + \nabla u)^T (I + \nabla u) = (I + \nabla_{\tau} u_0 + z \nabla_{\tau} \beta + \beta n^T)^T (I + \nabla_{\tau} u_0 + z \nabla_{\tau} \beta + \beta n^T)$$

der Cauchy-Greensche Verzerrungstensor.

Man kann C in den Koordinaten der beiden Tangentialvektoren τ_1, τ_2 und des Normalenvektors n angeben (Abbildung 8):

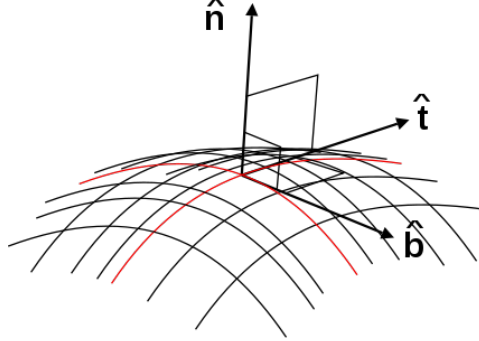


Abbildung 8: Tangential- und Normalenkomponente ([Mas11])

$$C = \begin{pmatrix} C_{\tau_1\tau_1} & C_{\tau_1\tau_2} & C_{\tau_1n} \\ C_{\tau_1\tau_2} & C_{\tau_2\tau_2} & C_{\tau_2n} \\ C_{\tau_1n} & C_{\tau_2n} & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Notation:

$$\begin{aligned} C_{\tau\tau} &:= P_\tau C P_\tau & C_{\tau n} &:= P_\tau C P_n \\ C_{n\tau} &:= P_n C P_\tau & C_{nn} &:= P_n C P_n \end{aligned}$$

$C_{\tau\tau}$ entspricht der linken, oberen 2×2 Teilmatrix von C . Damit wird beschrieben, wie sich die Mittellinie S verschiebt. Nun muss noch die Normalentransformation berücksichtigt werden.

Hier sind die Teilmatrizen $C_{\tau n} = \begin{pmatrix} C_{\tau_1 n} \\ C_{\tau_2 n} \end{pmatrix}$ und C_{nn} von Bedeutung. C_{nn} entspricht der Änderung der Dicke des Materials und $C_{\tau n}$ der Rotation des Normalenvektors.

Zuerst wird die Verschiebung der Mittellinie $C_{\tau\tau}$, welche der Membranspannung (engl.: membrane stretching) entspricht, betrachtet. Man beachte, dass auf der Tangentialebene $T(\hat{x})$ $z = 0$ gilt. Weiters ist $P_\tau n = 0$.

$$\begin{aligned} C_{\tau\tau} &= P_\tau C P_\tau \\ &= P_\tau (I + \nabla_\tau u_0 + z \nabla_\tau \beta + \beta n^T)^T (I + \nabla_\tau u_0 + z \nabla_\tau \beta + \beta n^T) P_\tau \\ &= (P_\tau + \nabla_\tau u_0^T) (P_\tau + \nabla_\tau u_0) \end{aligned}$$

Als nächstes wird der Term $C_{\tau n}$ untersucht. Dieser entspricht der Scherung (engl.: shear

strain) der Tangentialebene. Auch hier gilt $z = 0$.

$$\begin{aligned}
C_{\tau n} &= P_\tau C P_n \\
&= (P_\tau + \nabla_\tau u_0^T) (P_n + \nabla_\tau u_0 P_n + \beta n^T P_n) \\
&= (P_\tau + \nabla_\tau u_0^T) (n n^T + \beta n^T n n^T) \\
&= P_\tau (I + \nabla_\tau u_0)^T (n + \beta) n^T \\
&= \left(\nabla_\tau u_0^T n + \underbrace{(P_\tau + \nabla_\tau u_0)^T \beta}_{=: \tilde{\beta} \in T(\hat{x})} \right) n^T
\end{aligned}$$

Während β unstetig sein kann, ist $\tilde{\beta}$ zumindest tangentialstetig.

Wenn die Deformation Φ nur aus einer Translation und einer Rotation besteht, so sollte sich die Spannung und damit auch die Energie nicht ändern. Da dies bei der Translation sofort ersichtlich ist, wird der Fall betrachtet, bei dem die Deformation nur aus einer Rotation

$$\Phi(x) = Rx = x + u(x) \quad (37)$$

besteht, wobei $R \in \mathbb{O}^3$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
u(x) &= (R - I)(x) \\
\nabla u &= R - I \stackrel{!}{=} \nabla_\tau u_0 + \beta n^T \\
R - I &= (R - I) ((I - n n^T) + n n^T) = (R - I)(P_\tau + P_n) \\
\Rightarrow \nabla_\tau u_0 &= (R - I)P_\tau, \quad \beta = (R - I)n.
\end{aligned}$$

3.3.2 Satz. Es gelte $\Phi(x) = Rx$ mit $R \in \mathbb{O}^3$. Dann gilt $C_{\tau\tau} = P_\tau$ und $C_{\tau n} = 0$.
Beweis:

$$\begin{aligned}
P_\tau (I + \nabla_\tau u_0)^T (n + \beta) &= P_\tau (I + (R - I)P_\tau)^T (n + (R - I)n) \\
&= P_\tau R^T R n = P_\tau n = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P_\tau + \nabla_\tau u_0^T) (P_\tau + \nabla_\tau u_0) &= (P_\tau + ((R - I)P_\tau)^T) (P_\tau + (R - I)P_\tau) \\
&= P_\tau R^T R P_\tau = P_\tau
\end{aligned}$$

■

Mit der Membranenergie

$$E_{memb} = \|C_{\tau\tau} - I_{\tau\tau}\|_{L_2(S)}^2, \quad (38)$$

der Scherenergie

$$E_{shear} = \|C_{\tau n}\|_{L_2(S)}^2 \quad (39)$$

und der Biegeenergie

$$E_{bend} = t^2 \|\varepsilon_{\tau\tau}(\tilde{\beta})\|_{L_2(S)}^2, \quad (40)$$

wobei $\varepsilon_{\tau\tau}(\tilde{\beta})$ der linearisierte Verzerrungstensor, eingeschränkt auf die Tangentialebene, ist, kann folgendes Minimierungsproblem für dünnwandige Strukturen aufgestellt werden:

Finde ein $u \in [H_0^1(S)]^3$ und $\beta \in [H_0^1(S)]^3$, so dass

$$J(u, \beta) = \int_S (C_{\tau\tau} - I_{\tau\tau}) : (C_{\tau\tau} - I_{\tau\tau}) + C_{\tau n} : C_{\tau n} + t^2 \varepsilon_{\tau\tau}(\tilde{\beta}) : \varepsilon_{\tau\tau}(\tilde{\beta}) dx - \int_S f \cdot u dx \rightarrow \min! .$$

Bei Strukturen mit Übergängen, wie z.B. Ecken, ist die Rotation β nicht mehr stetig, da der Normalenvektor einen Sprung macht (vgl. Abbildung 10). Dies muss man beim Aufstellen der Variationsformulierung berücksichtigen und entsprechende Interface-Bedingungen fordern.

Wie man sofort erkennt, ist nur die Normalenkomponente von β unstetig, während die Tangentialkomponente weiterhin stetig ist.

Dies motiviert $\beta \in H(\text{curl})$ anzusetzen, um der Interface-Bedingung gerecht zu werden. In den nächsten Kapiteln wird eine entsprechende Variationsformulierung hergeleitet.

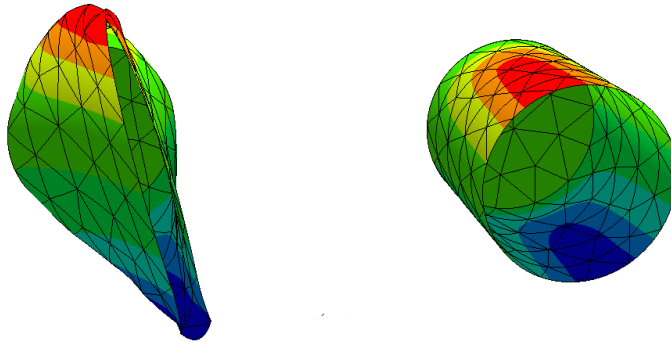


Abbildung 9: Schalenproblem numerisch berechnet

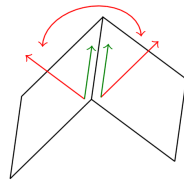


Abbildung 10: Struktur mit Ecke

Listing 2: shellenergy.py

```

from netgen.csg import *
from ngsolve import *

mesh = Mesh(MakeCylinderShell().GenerateMesh(maxh=1))

V1 = H1(mesh, order=2, dirichlet="dir", dim=3)
fes = FESpace([V1,V1])
u,beta = fes.TrialFunction()

n = specialcf.normal(3)
nmat = CoefficientFunction((n,), dims=(3,1))
Id = IdentityCF(mesh.dim)
Ptau = Id-nmat*nmat.trans

a = BilinearForm(fes)
# membrane energy
Ftau = u.Deriv().Trace().trans+Ptau
Ctautau = Ftau.trans*Ftau
Etautau = Ctautau-Ptau
a += SymbolicEnergy(InnerProduct(Etautau, Etautau), BND)

# shear energy
shear = u.Deriv().Trace()*nmat+Ftau.trans*beta.trans
a += SymbolicEnergy(InnerProduct(shear, shear), BND)

# bending energy
prod = InnerProduct(beta.Deriv().Trace(), beta.Deriv().Trace())
a += SymbolicEnergy(0.01*prod, BND)
bending = sym(Ftau.trans*beta.Deriv().Trace().trans)
a += SymbolicEnergy(0.01*InnerProduct(bending, bending), BND)

factorspace = FESpace("number", mesh)
factor = GridFunction(factorspace)
force = CoefficientFunction((0,1*y,0))
a += SymbolicEnergy(-factor * InnerProduct(force,u), BND)

u = GridFunction(fes, name="u")

Draw(u.components[1], mesh, "rot")
Draw(u.components[0], mesh, "disp")

for loadstep in range(20):
    factor.vec[:] = loadstep+1
    NewtonMinimization(a, u)
    Redraw()

```

4 Plattenmodelle

In diesem Kapitel werden einige Methoden vorgestellt, mit denen man Strukturen mit dünnen Wänden simulieren kann.

Dazu werden geeignete Finite Elemente benötigt, welche noch genauer beschrieben werden. Nach obigen Ausführungen soll die Verschiebung u global tangentialstetig sein. Um die Ecken der Strukturen zu erhalten, wird eine neue, tensorwertige Variable m eingeführt, welche die Biegemomente beschreibt. Deren normal-normal Komponente $m_{nn} = n^T m n$ soll stetig über die Elemente sein. Dies entspricht aus physikalischer Sicht der Drehmomentenerhaltung.

Für eine ausführliche Einführung und Analyse dieser Finiten Elemente wird auf [SS07] verwiesen.

Im Kapitel 5 werden Probleme mit dünnwandiger Struktur im \mathbb{R}^3 numerisch berechnet und eine Formulierung für Schalenmodelle hergeleitet. Dazu werden die Methoden zuerst für Platten vorgestellt und analysiert.

4.1 Hellinger-Reissner Methode

Ausgangspunkt ist das folgende Elastizitätsproblem:

$$A\sigma = \varepsilon(u) \quad \text{in } \Omega, \quad (41)$$

$$\operatorname{div} \sigma = -f \quad \text{in } \Omega. \quad (42)$$

Man betrachte nun die gemischte Methode nach Hellinger-Reissner:

Finde ein $\sigma \in L_2(\Omega)^{sym}$ und $u \in [H^1(\Omega)]^2$, so dass

$$\int_{\Omega} A\sigma : \tau \, dx - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(u) \, dx = 0 \quad \text{für alle } \tau \in L_2(\Omega)^{sym}, \quad (43)$$

$$- \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, dx = - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \text{für alle } v \in [H^1(\Omega)]^2. \quad (44)$$

Der Tensor A ist definiert als

$$A\sigma := \frac{1}{2\mu} \sigma^D + \frac{1}{\lambda + \mu} \operatorname{sp}(\sigma) I,$$

mit den Lamé-Konstanten μ und λ . σ^D bezeichnet dabei den Deviator von σ

$$\sigma^D := \sigma - \frac{1}{d} \operatorname{sp}(\sigma) I.$$

Durch partielle Integration erhält man die dazu duale Formulierung:

Finde ein $\sigma \in H(\operatorname{div})^{sym}$ und $u \in [L_2(\Omega)]^2$, so dass

$$\int_{\Omega} A\sigma : \tau \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau \cdot u \, dx = 0 \quad \text{für alle } \tau \in H(\operatorname{div})^{sym},$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \text{für alle } v \in [L_2(\Omega)]^2.$$

Es gibt nun drei Möglichkeiten, wie man $\int \operatorname{div} \sigma \cdot u$ interpretieren kann. Dadurch ergeben sich verschiedene Eigenschaften für die Verschiebung u und den Spannungstensor σ .

1. Als Dualitätsprodukt $\langle \operatorname{div} \sigma, u \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H^1(\Omega)} = -(\sigma, \varepsilon(u))_{L_2(\Omega)}$
Da hier gefordert wird, dass $u \in H^1(\Omega)$, ist die Verschiebung stetig über die Elemente. Der Spannungstensor $\sigma \in L_2(\Omega)^{sym}$ kann hingegen global unstetig sein.
2. Als Dualitätsprodukt $\langle \operatorname{div} \sigma, u \rangle_{H(\operatorname{curl})^* \times H(\operatorname{curl})}$
Die Verschiebung u ist nun in $H(\operatorname{curl})$ und damit global tangentialstetig. Bei dem Spannungstensor $\sigma \in L_2(\Omega)^{sym}$ wird zusätzlich noch gefordert, dass $\operatorname{div} \operatorname{div} \sigma \in H^{-1}(\Omega)$, womit die normal-normal Komponente σ_{nn} stetig über die Elemente ist.
3. Als Skalarprodukt $(\operatorname{div} \sigma, u)_{L_2(\Omega)}$
Hier muss die Verschiebung u nur noch in $[L_2(\Omega)]^2$ sein und ist damit global unstetig. Der Spannungstensor σ muss hingegen in $H(\operatorname{div})^{sym}$ sein und die Normalenkomponente σ_n ist global stetig.

4.1.1 Bemerkung. Die gemischte Methode ist für alle drei Möglichkeiten wohldefiniert.

Der zweite Punkt entspricht den oben gestellten Anforderungen am besten.

Zunächst stellt sich die Frage wie $H(\operatorname{curl})^*$ aussieht.

4.1.2 Satz. Der Dualraum von $H(\operatorname{curl})$ ist $H^{-1}(\operatorname{div})$.

Gesucht wird also ein $\sigma \in L_2(\Omega)^{sym}$ mit $\operatorname{div} \sigma \in H^{-1}(\operatorname{div})$. Dies ist äquivalent zu

$$\sigma \in H(\operatorname{div} \operatorname{div}) := \left\{ \sigma \in L_2(\Omega)^{sym} : \operatorname{div} \operatorname{div} \sigma \in H^{-1}(\Omega) \right\}, \quad (45)$$

mit

$$\operatorname{div} \operatorname{div} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \in H^{-1}. \quad (46)$$

4.1.3 Satz. Sei σ ein stückweise glatter Tensor auf der Triangulierung $\mathcal{T} = \{T\}$ mit $\sigma_{n\tau} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial T)$. Weiters sei σ_{nn} global stetig. Dann gilt $\operatorname{div} \sigma \in H(\operatorname{curl})^*$.

4.1.4 Satz. Unter der Annahme einer stückweise glatten Lösung ist das Elastizitätsproblem äquivalent zu folgendem gemischtem Problem:

Finde ein $\sigma \in H(\operatorname{div} \operatorname{div})$ und $u \in H(\operatorname{curl})$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A\sigma : \tau \, dx + \sum_T \int_T \operatorname{div} \tau \, dx - \int_{\partial T} \tau_{n\tau} u_{\tau} \, ds &= 0 && \text{für alle } \tau \in H(\operatorname{div} \operatorname{div}), \\ \sum_T \int_T \operatorname{div} \sigma \cdot v \, dx - \int_{\partial T} \sigma_{n\tau} v_{\tau} \, ds &= - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx && \text{für alle } v \in H(\operatorname{curl}). \end{aligned}$$

Bei der numerischen Berechnung werden die Elemente auf ein Referenzelement transformiert. Auf diesem wird dann z.B. die Divergenz ausgerechnet und wieder zurücktransformiert. Für die Transformation auf das Referenzelement wird die sogenannte Piola-Transformation verwendet.

4.1.5 Definition. Sei $\hat{T} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : \hat{T} \rightarrow T$ eine Abbildung vom Referenzelement \hat{T} auf das Element T , $F = \phi'$, $J = \det F$ und sei $\hat{\sigma} \in L_2(\hat{T})$. Dann ist die Piola-Transformation $\sigma = \mathcal{P}\{\hat{\sigma}\}$ definiert als

$$\sigma(\phi(\hat{x})) = \frac{1}{J} F \hat{\sigma}(x).$$

4.1.6 Satz. Sei $\hat{\sigma} \in H(\text{div}, \hat{T})$ und $\sigma = \mathcal{P}\{\hat{\sigma}\}$. Dann gilt

$$(\text{div } \sigma)(\phi(\hat{x})) = \frac{1}{J} \text{div } \hat{\sigma}.$$

Beweis: Siehe z.B. [Sch09, S. 106]. ■

4.1.7 Definition. Sei $\hat{T} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : \hat{T} \rightarrow T$ eine Abbildung vom Referenzelement \hat{T} auf das Element T , $F = \phi'$, $J = \det F$ und sei $\hat{\sigma} \in L_2(\hat{T}, \mathbb{R}_{sym}^{n \times n})$. Dann ist die Piola-Transformation $\sigma = \mathcal{P}\{\hat{\sigma}\}$ definiert als

$$\sigma(\phi(\hat{x})) = \frac{1}{J^2} F \hat{\sigma} F^T.$$

4.1.8 Satz. Sei $\hat{\sigma} \in H(\text{div}, \hat{T})$ und $\sigma = \mathcal{P}\{\hat{\sigma}\}$. Dann gilt

$$(\text{div } \sigma)(\phi(\hat{x})) = \frac{1}{J} F \hat{\sigma} \nabla \left(\frac{1}{J} \right) + \frac{1}{J^2} \left(\begin{array}{c} \nabla F_1 : \hat{\sigma} \\ \vdots \\ \nabla F_m : \hat{\sigma} \end{array} \right) + F \text{div } \hat{\sigma}.$$

Beweis: Sei $\hat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ beliebig und $\varphi(\phi(\hat{x})) = \hat{\varphi}(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_T \operatorname{div} \sigma \cdot \varphi \, dx &= - \int_{\phi(\hat{T})} \sigma : \nabla \varphi \, dx \\
&= - \int_{\hat{T}} (\sigma \circ \phi) : (\nabla \varphi \circ \phi) J \, d\hat{x} \\
&\stackrel{(I)}{=} - \int_{\hat{T}} (\sigma \circ \phi) : (\nabla \hat{\varphi} F^{-1}) J \, d\hat{x} \\
&= - \int_{\hat{T}} \frac{1}{J^2} ((F \hat{\sigma} F^T) : (\nabla \hat{\varphi} F^{-1})) J \, d\hat{x} \\
&\stackrel{(II)}{=} - \int_{\hat{T}} \frac{1}{J} ((F \hat{\sigma}) : \nabla \hat{\varphi}) \, d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{T}} \operatorname{div} \left(\frac{1}{J} F \hat{\sigma} \right) \cdot \hat{\varphi} \, d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{T}} \left(F \hat{\sigma} \nabla \left(\frac{1}{J} \right) + \frac{1}{J} \operatorname{div} (F \hat{\sigma}) \right) \hat{\varphi} \, d\hat{x} \\
&\stackrel{(III)}{=} \int_T \left(F \hat{\sigma} \nabla \left(\frac{1}{J} \right) + \frac{1}{J} \left(\begin{array}{c} \nabla F_1 : \hat{\sigma} \\ \vdots \\ \nabla F_m : \hat{\sigma} \end{array} \right) + F \operatorname{div} \hat{\sigma} \right) \frac{1}{J} \circ \phi^{-1} \varphi \, dx
\end{aligned}$$

$$(I) \quad \nabla \hat{\varphi} = (\nabla \varphi) \circ \phi F \Rightarrow (\nabla \varphi) \circ \phi = \nabla \hat{\varphi} F^{-1}$$

$$(II) \quad (F \hat{\sigma} F^T) : (\nabla \hat{\varphi} F^{-1}) = \operatorname{sp}(F \hat{\sigma} F^T (F^{-1})^T (\nabla \hat{\varphi})^T) = \operatorname{sp}(F \hat{\sigma} (\nabla \hat{\varphi})^T) = (F \hat{\sigma}) : (\nabla \hat{\varphi})$$

$$(III) \quad (F \hat{\varphi})_i = \left(\sum_{k=1}^n F_{ik} \hat{\sigma}_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^n F_{ik} \hat{\sigma}_{kn} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}((F \hat{\sigma})_i) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (F_{ik} \hat{\sigma}_{kj}) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_j} \hat{\sigma}_{kj} + F_{ik} \frac{\partial \hat{\sigma}_{kj}}{\partial x_j} = \nabla F_i : \hat{\sigma} + F_i \cdot \operatorname{div} \hat{\sigma}$$

Da C_0^∞ dicht in $L_2(T)$ ist, folgt damit die Behauptung. ■

4.1.9 Bemerkung. Wenn ϕ affin-linear ist, d.h. $\phi(x) = a + Bx$, vereinfacht sich Satz 4.1.8 auf

$$(\operatorname{div} \sigma)(\phi(\hat{x})) = \frac{1}{J^2} B \operatorname{div} \hat{\sigma}.$$

4.2 Hellan-Herrmann-Johnson Methode

Einen anderen Zugang zur Herleitung der benötigten Formeln bietet die Hellan-Herrmann-Johnson Methode angewandt auf die Kirchhoff-Platte.

Für genauere Beschreibungen wird auf [Com89] und [KZ14] verwiesen.

Man beginnt mit einem elliptischen Problem vierter Ordnung:

Gegeben sei eine Funktion $f \in L_2(\Omega)$. Gesucht ist ein $w \in H_0^2(\Omega)$, so dass

$$\Delta^2 w = f \quad \text{in } \Omega. \quad (47)$$

Mit dieser Gleichung wird eine dünne Platte modelliert, die vertikal mit einer Kraft f belastet wird (vgl. Abbildung 11).

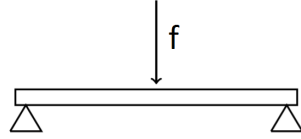


Abbildung 11: Platte, die von oben belastet wird

Nun wird eine schwache Formulierung für das Problem hergeleitet.

Sei dazu $v \in H_0^2(\Omega)$. Dann gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u v \, dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_i x_j x_j} v \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j x_j} v_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j x_j} v \nu_i \, ds \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} v_{x_i x_j} \, dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} v_{x_i} \nu_i \, ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx, \end{aligned}$$

da v und ∇v auf dem Rand von Ω verschwinden.

Die schwache Formulierung für das Problem lautet damit:

Finde ein $u \in H_0^2(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w : \nabla^2 v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^2(\Omega).$$

Definiert man nun $m := \nabla^2 w$, erhält man folgendes gemischtes System:

Finde ein $m \in L_2^{sym}(\Omega)$ und $w \in H_0^2(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m : \tau \, dx - \int_{\Omega} \nabla^2 w : \tau \, dx &= 0 && \text{für alle } \tau \in L_2^{sym}(\Omega), \\ - \int_{\Omega} m : \nabla^2 v \, dx &= - \int_{\Omega} f v \, dx && \text{für alle } v \in H_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

4.2.1 Bemerkung. Man erhält diese Formulierung auch, wenn man in den Gleichungen (43)-(44) anstatt der vektorwertigen Funktion u den Gradienten ∇u einer skalaren Funktion u einsetzt.

In dieser Form ist $w \in H^2(\Omega)$, wodurch man C^1 -stetige Elemente benötigen würde. Um dies zu vermeiden wird die Variationsformulierung durch partielles Integrieren umgeformt

$$\int_{\Omega} m : \tau \, dx - \int_{\Omega} \nabla^2 w : \tau \, dx = 0, \quad (48)$$

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{div} m v \, dx = - \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (49)$$

Unter der Annahme, dass τ und v stückweise glatt sind, folgt mittels elementweiser partieller Integration

$$\int_{\Omega} m : \tau \, dx + \sum_T \int_T \nabla w \cdot \operatorname{div} \tau \, dx - \int_{\partial T} \nabla w \cdot \tau_n \, ds = 0, \quad (50)$$

$$\sum_T \int_T \operatorname{div} m \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial T} (\operatorname{div} m) \cdot n v \, ds = - \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (51)$$

Gefordert wird, dass für alle τ die Normalenkomponente τ_{nn} stetig über die Elemente ist. Da ∇w als exakte Lösung stetig über den Rand der Dreiecke ist, gilt

$$\int_E \nabla w [\tau_n]_E \, ds = \int_E \nabla w_n [\tau_{nn}]_E + \nabla w_t [\tau_{nt}]_E \, ds = \int_E \nabla w_t [\tau_{nt}]_E \, ds.$$

Dabei bezeichnet

$$[\tau_n]_E := \tau_{n_1}|_{T_1} + \tau_{n_2}|_{T_2}, \quad E = T_1 \cap T_2$$

den Normalen-Sprung (engl.: normal jump) über die Kante E . Eingesetzt in Gleichung (50), ergibt dies

$$\int_{\Omega} m : \tau \, dx + \sum_T \int_T \nabla w \cdot \operatorname{div} \tau \, dx - \int_{\partial T} \nabla w_t \cdot \tau_{nt} \, ds = 0.$$

Da $v \in H^1(\Omega)$ stetig über die Kanten und ∇v tangentialstetig ist, sowie $\operatorname{div} m$ und m_{nt} als exakte Lösungen stetig über die Ränder der Dreiecke sind, gilt

$$\int_{\partial T} (\operatorname{div} m) \cdot n v \, ds = 0 = \int_{\partial T} \nabla v_t m_{nt} \, ds \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Gleichung (51) lässt sich damit folgendermaßen umformen:

$$\sum_T \int_T \operatorname{div} m \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial T} \nabla v_t m_{nt} \, ds = - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Zusammengefasst lautet die Variationsformulierung damit:
Finde ein $m \in H(\text{divdiv})$ und $w \in H^1(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} m : \tau \, dx + \sum_T \int_T \nabla w \cdot \text{div} \, \tau \, dx - \int_{\partial T} \nabla w_t \cdot \tau_{nt} \, ds = 0, \quad \forall \tau \in H(\text{divdiv}), \quad (52)$$

$$\sum_T \int_T \text{div} \, m \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial T} \nabla v_t m_{nt} \, ds = - \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (53)$$

4.3 Reissner-Mindlin Methode

Verwendet man die Gleichungen (52)-(53), wobei man ∇w durch eine neue Variable β ersetzt und einen zusätzlichen Term hinzufügt, kommt man zur Reissner-Mindlin Methode:

Finde ein $m \in H(\text{divdiv})$, $\beta \in H(\text{curl})$ und $u \in H^1(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} m : \tau \, dx + \sum_T \int_T \beta \cdot \text{div} \, \tau \, dx - \int_{\partial T} \beta_t \cdot \tau_{nt} \, ds = 0, \quad \forall \tau, \quad (54)$$

$$\sum_T \int_T \text{div} \, m \cdot \delta \, dx - \int_{\partial T} \delta_t m_{nt} \, ds - \frac{1}{t^2} \int_{\Omega} (\nabla u - \beta)(\nabla v - \delta) \, dx = - \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v, \delta. \quad (55)$$

Der zusätzliche Term beschreibt die Scherenergie, wobei $(\nabla u - \beta)$ der Scherung und $\frac{1}{t^2}(\nabla u - \beta)$ der Scherspannung entspricht.

4.4 Finite-Elemente-Räume

Wie im vorigen Abschnitt bereits beschrieben, werden die Räume $H(\text{divdiv})$, $H(\text{curl})$ und $H^1(\Omega)$ verwendet, jedoch wurden bisher die Randbedingungen noch nicht berücksichtigt. Auf dem Rand Γ_D sei die Verschiebung u und die Rotation β vorgegeben. Die Verschiebung ist wie üblich eine wesentliche Randbedingung, während Bedingungen an β_τ wesentlich und an β_n natürlich sind. Auf $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$ wird m_n vorgeschrieben. Dabei stellt sich heraus, dass m_{nn} die wesentliche und $m_{n\tau}$ die natürliche Randbedingung ist. Im Folgenden wird zur Vereinfachung $u = 0$, $\beta_\tau = 0$ und $m_{nn} = 0$ auf Γ_D und Γ_N gefordert.

Für die Diskretisierung werden für $k \geq 1$ folgende Finite-Elemente -Räume verwendet:

$$\begin{aligned} M_h &:= \{ \tau_h \in L_2^{\text{sym}}(\Omega) : \tau_h|_T \in \mathcal{P}^k, \tau_{h_{nn}} \in \mathcal{P}^{\max(1, k-1)} \text{ stetig}, \tau_{nn} = 0 \text{ auf } \Gamma_N \}, \\ V_h &:= \{ v_h \in L_2(\Omega) : v_h|_T \in \mathcal{P}^{k+1}, v_h \text{ stetig}, v_h = 0 \text{ auf } \Gamma_D \}, \\ B_h &:= \{ \delta_h \in [L_2(\Omega)]^n : \delta_h|_T \in \mathcal{P}^k, \delta_{h_\tau} \text{ stetig}, \delta_{h_\tau} = 0 \text{ auf } \Gamma_D \}. \end{aligned}$$

Die Elemente von B_h gehören dabei zur zweiten Familie der Nédélec Elemente.

Um nun einen Finite-Elemente-Raum für Strukturen mit dünnen Wänden zu konstruieren, werden die zweidimensionalen Elemente von M_h als Oberflächenelemente verwendet. Man erhält damit einen neuen Raum M_{Surf} , welcher ein leeres Inneres hat.

Die Verschiebung u und die Rotation β werden als gewöhnliche, dreidimensionale Elemente angesetzt.

Damit garantiert wird, dass nur auf dem Rand gerechnet wird, werden u und β auf die Oberfläche, also auf den Rand, eingeschränkt.

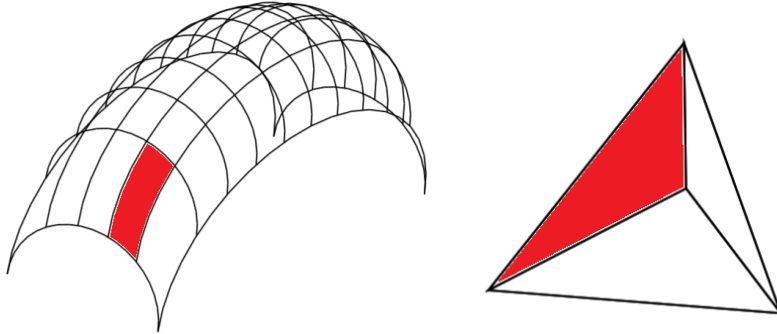


Abbildung 12: M_{Surf} und eingeschränktes 3D-Element

4.5 Minimierungsproblem für gemischte Methoden

Nun wird eine numerische Methode zum Lösen der gemischten Probleme des vorigen Abschnitts hergeleitet. Seien dazu V und Q zwei normierte Vektorräume, sowie eine stetige und koerzive Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, eine stetige Bilinearform $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ und eine stetige Linearform $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

4.5.1 Definition. Seien V ein normierter Vektorraum und $A(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. $A(\cdot, \cdot)$ heißt

1. koerziv (elliptisch) genau dann, wenn ein $\alpha_1 > 0$ existiert, so dass

$$A(u, u) \geq \alpha_1 \|u\|_V^2 \quad \text{für alle } u \in V,$$

2. stetig genau dann, wenn ein $\alpha_2 > 0$ existiert, so dass

$$A(u, v) \leq \alpha_2 \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Ziel ist es, das folgende gemischte Problem auf ein Minimierungsproblem zurückzuführen:

$$a(m, \tau) + b(\tau, u) = 0 \quad \text{für alle } \tau \in V, \quad (56)$$

$$b(m, v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in Q. \quad (57)$$

Man definiert dazu die Lagrange-Funktion

$$L(m, u) = \frac{1}{2}a(m, m) + b(m, u) - f(u).$$

4.5.2 Satz. Das Tupel (m, u) ist eine Lösung von (56)-(57) genau dann, wenn (m, u) ein kritischer Punkt von $L(\cdot, \cdot)$ ist.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \varepsilon}(m + \varepsilon\tau, u)|_{\varepsilon=0} = a(m, \tau) + b(\tau, u), \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \varepsilon}(m, u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = b(m, v) - f(v). \end{aligned}$$

■

L ist in m (strikt) konvex, da $a(\cdot, \cdot)$ elliptisch ist.

Das Minimum von $L(u, m)$ in m kann daher bestimmt werden. Dadurch erhält man das Energiefunktional

$$J(u) := \min_m L(u, m).$$

Nun wird die genaue Form von $J(u)$ hergeleitet.

Die Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ werden dazu als Operatoren interpretiert.

4.5.3 Definition. Sei $T : V \rightarrow W$ ein linearer Operator zwischen zwei normierten Vektorräumen V und W . Dann ist die Operatornorm definiert als

$$\|T\|_{V \rightarrow W} := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}.$$

Der konjugierte (duale) Operator $T^* : W^* \rightarrow V^*$ von T ist definiert mittels

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle \quad \text{für alle } v \in V, w \in W^*.$$

4.5.4 Satz. Eine stetige Bilinearform $A(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ induziert einen stetigen und linearen Operator $A : V \rightarrow V^*$ mittels

$$\langle Au, v \rangle = A(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Die Operatornorm $\|A\|_{V \rightarrow V^*}$ ist beschränkt mit der Stetigkeitskonstante α_2 von $A(\cdot, \cdot)$.

Beweis: Siehe z.B. [Sch09, S. 18 f].

■

Für die Linearform $f(\cdot)$ schreibt man $f \in V^*$ und

$$\langle f, v \rangle = f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Das gemischte System (56)-(57) lässt sich nun folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} Am + B^*u &= 0, \\ Bm &= f. \end{aligned}$$

Bezeichne m^* das Minimum

$$\min_m L(u, m) = -A^{-1}B^*u =: m^*.$$

Nun lässt sich J wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} J(u) = L(u, m^*) &= \frac{1}{2} \langle AA^{-1}B^*u, A^{-1}B^*u \rangle - \langle BA^{-1}B^*u, u \rangle - \langle f, u \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle BA^{-1}B^*u, u \rangle - \langle f, u \rangle. \end{aligned}$$

$J(u)$ ist auf Grund des negativen Vorzeichens strikt konkav, da A , und damit auch $BA^{-1}B^*$, symmetrisch und positiv definit sind. Das Maximum von $J(u)$ kann damit bestimmt werden.

4.5.5 Bemerkung. Bei nichtlinearen Problemen wird das Newton-Verfahren mit Liensuche zur Bestimmung der kritischen Punkte von der Lagrange-Funktion $L(m, u)$ verwendet.

4.5.6 Beispiel. Betrachte das gemischte Problem:
Finde ein $m \in H(\text{divdiv})$ und $w \in H^2(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m : \tau \, dx - \int_{\Omega} \nabla^2 w : \tau \, dx &= 0 && \text{für alle } \tau \in L_2^{\text{sym}}(\Omega), \\ - \int_{\Omega} \text{divdiv } mv \, dx &= - \int_{\Omega} f v \, dx && \text{für alle } v \in L_2(\Omega). \end{aligned}$$

Hierbei ist $B^* = \nabla^2$ und $B = \text{divdiv}$, sowie $A = Id$.
Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle BA^{-1}B^*u, u \rangle &= \langle A^{-1}B^*u, B^*u \rangle \\ &= \langle \nabla^2 u, \nabla^2 u \rangle \end{aligned}$$

und man erhält für $J(u)$

$$J(u) = -\frac{1}{2} \langle \nabla^2 u, \nabla^2 u \rangle - \langle f, u \rangle.$$

5 Schalenmodelle

In diesem Abschnitt wird nochmals die Problemstellung aus Kapitel 3 aufgegriffen und mit Hilfe der im vorigen Kapitel bereitgestellten Methode numerisch gelöst.

5.1 Problembeschreibung und Herleitung

Man definiert nach dem Vorbild der Gleichungen (52)-(53) die Bilinearformen

$$a(m, \tau) := -\frac{1}{t^2} \int_S m : \tau \, dx, \quad (58)$$

$$b(m, v) := -\sum_{T \in S} \int_T \operatorname{div} m \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial T} m_{nt} \cdot \nabla_t v \, ds. \quad (59)$$

Hier bezeichnet t , $0 < t \ll 1$, wieder den Dickeparameter und S die Mittelebene der dreidimensionalen, dünnwandigen Struktur.

Ausgangspunkt war die Gleichung (47), welche nur eine eindimensionale Belastung modelliert. Nun soll die Verschiebung u in allen drei Dimensionen simuliert werden, also $u \in [H^1(S)]^3$.

Es stellt sich heraus, dass man dazu den Gradienten ∇u mit dem Normalenvektor n multipliziert und dann in die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ einsetzen muss. Daher verändert sich diese zu

$$b(m, v) := \sum_{T \in S} \int_T \operatorname{div} m \cdot ((\nabla v)^T n) \, dx - \int_{\partial T} m_{nt} \cdot ((\nabla_t v)^T n) \, ds. \quad (60)$$

Während die Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ der Biegeenergie entsprechen, fehlt noch zumindest die Membranenergie

$$E_{\text{memb}} = \|C_{\tau\tau} - I_{\tau\tau}\|_{L_2(S)}^2,$$

um ein Schalenmodell zu beschreiben.

Diese wird im linearen Fall mit dem zusätzlichen Term

$$\int_S \varepsilon_{\tau\tau}(u) : \varepsilon_{\tau\tau}(v) \, dx$$

beschrieben, wobei

$$\varepsilon_{\tau\tau}(u) = \frac{1}{2}(P_\tau \nabla u + (\nabla u)^T P_\tau)$$

wieder der linearisierte Verzerrungstensor, eingeschränkt auf die Tangentialebene von S , ist.

Im nichtlinearen Fall wird der zu minimierende Term

$$\int_S E_{\tau\tau}(u) : E_{\tau\tau}(u) dx$$

hinzugefügt, wobei

$$\begin{aligned} E_{\tau\tau}(u) &= F_\tau^T(u)F_\tau(u) - P_\tau, \\ F_\tau(u) &= \nabla u + P_\tau \end{aligned}$$

der Greensche Verzerrungstensor, eingeschränkt auf die Tangentialebene von S , ist.

5.1.1 Bemerkung. Um die Stabilität des Systems zu gewährleisten, wurden die Gleichungen (52)-(53) mit -1 multipliziert, da der Membranenergieanteil E_{memb} ein positives Vorzeichen hat:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -A & -B^T \\ -B & E_{memb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\ m &= -A^{-1}B^T u \\ -Bm + E_{memb}u &= f \\ \Rightarrow (BA^{-1}B^T + E_{memb})u &= f. \end{aligned}$$

Dadurch wird eine mögliche Auslöschung beim Schur-Komplement verhindert. Wenn man nur an der Verschiebung u interessiert ist, kann man das Vorzeichen bei der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ unverändert lassen. Man erhält dann jedoch ein m mit einem falschen Vorzeichen.

5.1.2 Bemerkung. Während bei der Biegeenergie (40) der Term t^2 auftritt, wurde bei (59) der Term $\frac{1}{t^2}$ verwendet. Der Grund liegt wieder beim Schur-Komplement, da dort die assemblierte Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ invertiert wird.

5.2 Schubstarre Strukturen

Zuerst werden schubstarre Strukturen betrachtet, d.h. für die Scherenergie gilt

$$E_{shear} = \frac{1}{t^2} \|(\nabla u)^T n - \beta\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0.$$

Damit wird gewährleistet, dass $\beta = (\nabla u)^T n$ gilt.

Dieses Problem wird schon vollständig durch die oben besprochenen Terme beschrieben: Finde ein $u \in [V_h]^3$ und $m \in M_{Surf}$ mit der Lagrange-Funktion

$$L(m, u) = \frac{1}{2}a(m, m) + b(m, u) + E_{memb}(u) - f(u), \quad (61)$$

so dass

$$J(u) = \min_m L(m, u) \rightarrow \min!. \quad (62)$$

5.3 Schubweiche Strukturen

Nun muss die Scherung auch berücksichtigt werden.

Dazu wird eine neue Unbekannte β eingeführt, welche dem Scherwinkel entspricht.

Wie am Ende von Kapitel 3 bereits festgestellt, ist die Forderung $\beta \in [H^1(\Omega)]^3$ für die Rotation nicht optimal. Stattdessen wäre $\beta \in H(\text{curl})$ eine geeignetere Wahl, da dadurch β tangentialstetig wäre.

Durch Hinzufügen der Scherenergie

$$E_{shear} = \frac{1}{t^2} \|(\nabla u)^T n - \beta\|_{L_2(\Omega)}^2$$

und Abändern der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ zu

$$b(m, \delta) := \sum_{T \in \mathcal{S}} \int_T \text{div } m \cdot \delta \, dx - \int_{\partial T} m_{nt} \cdot \delta_t \, ds, \quad (63)$$

erhält man die finale Variationsformulierung.

Finde ein $u \in [V_h]^3$, $m \in M_{Surf}$ und $\beta \in B_h$ mit der Lagrange-Funktion

$$J(m, u, \beta) = \frac{1}{2} a(m, m) + b(m, \beta) + E_{memb}(u) + E_{shear}(u, \beta) - f(u), \quad (64)$$

so dass

$$J(u, \beta) = \min_m L(m, u, \beta) \rightarrow \min! . \quad (65)$$

Damit können nun auch Strukturen mit Ecken behandelt werden (vgl. Abbildung 14 auf der nächsten Seite).

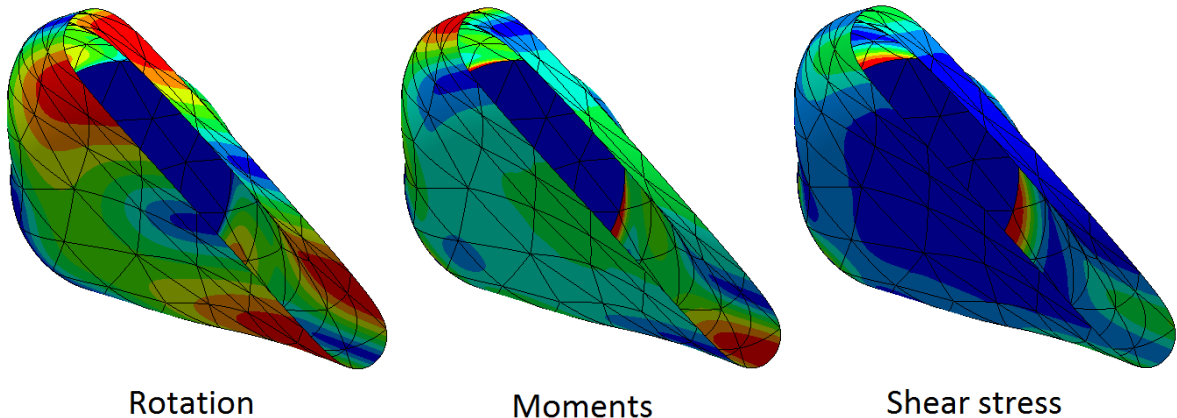
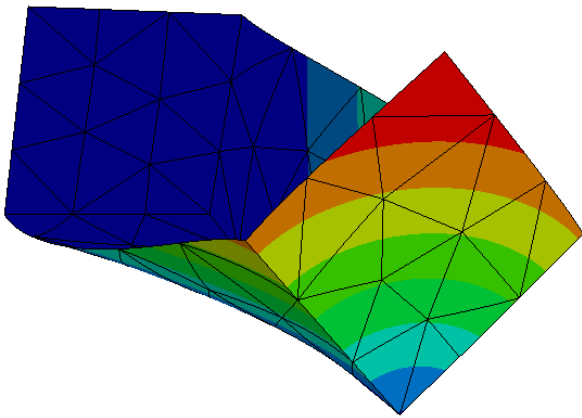
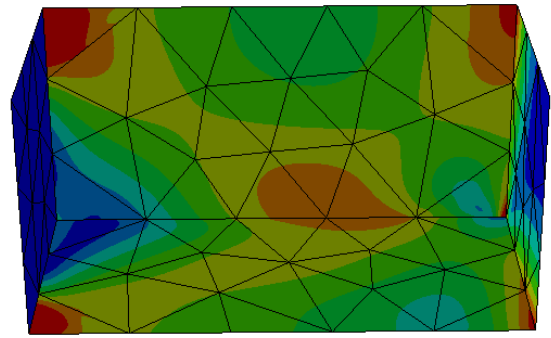


Abbildung 13: Rotation, Biegemomente und Scherspannung eines deformierten Zylinders



Displacement



Moments

Abbildung 14: Verschiebung und Biegemomente einer deformierten Struktur mit Ecken

Listing 3: hhjshellshear.py

```

from netgen.csg import *
from ngsolve import *
from ctypes import CDLL
mylngs = CDLL("libtdnns.so")

geo = CSGeometry()
cyl = Cylinder(Pnt(0,0,0),Pnt(1,0,0),0.4).bc("cyl")
left = Plane(Pnt(0,0,0), Vec(-1,0,0)).bc("left")
finitecyl = cyl * left * Plane(Pnt(1,0,0), Vec(1,0,0))

geo.AddSurface(cyl, finitecyl)
geo.AddSurface(left, finitecyl)

mesh = Mesh(geo.GenerateMesh(maxh=1))
mesh.Curve(2)

fes1 = FESpace("hdivsymsurf", mesh, order=1)
fes2 = H1(mesh, order=2, dirichlet="left")
fes3 = HCurl(mesh, order=1)
fes = FESpace([fes1,fes2,fes2,fes2,fes3])

sigma,u1,u2,u3,beta = fes.TrialFunction()
tau,v1,v2,v3,delta = fes.TestFunction()

sigma = sigma.Trace()
tau = tau.Trace()
beta = beta.Trace()
delta = delta.Trace()

sigmamat = CoefficientFunction((sigma[0],sigma[3],sigma[4],sigma[3],
    sigma[1],sigma[5],sigma[4],sigma[5],sigma[2]),dims=(3,3))
taumat = CoefficientFunction((tau[0],tau[3],tau[4],tau[3],tau[1],
    tau[5],tau[4],tau[5],tau[2]),dims=(3,3))

gradv = CoefficientFunction((grad(v1).Trace(),grad(v2).Trace(),
    grad(v3).Trace()),dims=(3,3))
gradu = CoefficientFunction((grad(u1).Trace(),grad(u2).Trace(),
    grad(u3).Trace()),dims=(3,3))

nsurf = specialcf.normal(3)
t = specialcf.tangential(3)

nel = Cross(nsurf, t)
nsurfmat = CoefficientFunction((nsurf,), dims=(3,1))

```

```

Id = IdentityCF(mesh.dim)
Ptau = Id-nsurfmtat*nsurfmtat.trans

def epstt(g):
    return 0.5*(Ptau*g+g.trans*Ptau)

ngradv = gradv.trans*nsurf
ngradu = gradu.trans*nsurf

sigman = sigmamat*nel
taun = taumat*nel

def tang(u):
    return (u*t)*t

a = BilinearForm(fes, symmetric=True)
a += SymbolicBFI(-100*(sigma[0]*tau[0]+sigma[1]*tau[1]+sigma[2]*tau[2]+
    2*sigma[3]*tau[3]+2*sigma[4]*tau[4]+2*sigma[5]*tau[5]), BND)
a += SymbolicBFI(-sigma.Deriv()*delta-tau.Deriv()*beta, BND)
a += SymbolicBFI(sigman*tang(delta)+taun*tang(beta), BND,
    element_boundary=True)
a += SymbolicBFI(1e-10*beta*delta*(u1*v1+u2*v2+u3*v3), BND)
a += SymbolicEnergy(0.5*(ngradu-beta)*(ngradu-beta), BND)

Ftau = gradu+Ptau
Ctautau = Ftau.trans*Ftau
Etautau = Ctautau-Ptau
a += SymbolicEnergy(InnerProduct(Etautau, Etautau), BND)

factorspace = FESpace("number", mesh)
factor = GridFunction(factorspace)

a += SymbolicEnergy(-factor*y*u2, BND)

u = GridFunction(fes, name="u")
uvec = CoefficientFunction(u.components[1:4])

Draw(uvec, mesh, "uvec")
Draw(u.components[4], mesh, "rotations")

for loadstep in range(20):
    factor.vec[:] = loadstep+1
    NewtonMinimization(a, u)
    Redraw()

```

Literatur

- [Bra13] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 5. 2013
- [BWBR04] BISCHOFF, M. ; WALL, W. A. ; BLETZINGER, K.-U. ; RAMM, E.: Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics* (2004)
- [CB11] CHAPELLE, Dominique ; BATHE, Klaus-Jürgen: *The finite element analysis of shells - fundamentals*. 2. 2011
- [Com89] COMODI, M. I.: The Hellan-Herrmann-Johnson method: some new error estimates and postprocessing. In: *Math. Comp.* 52 (1989), Nr. 185, 17–29. <http://dx.doi.org/10.2307/2008650>. – DOI 10.2307/2008650. – ISSN 0025–5718
- [Hav08] HAVLICEK, Hans: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. 2. 2008
- [KZ14] KRENDL, Wolfgang ; ZULEHNER, Walter: *A Decomposition Result for Biharmonic Problems and the Hellan-Hermann-Johnson Method*. 2014 https://www.dk-compmath.jku.at/publications/dk-reports/2014-08-11/at_download/file
- [Mas11] MASCHEN: Tangent normal binormal unit vectors. In: *Wikimedia Commons, the free media repository* (2011). https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tangent_normal_binormal_unit_vectors.svg
- [MH12] MARSDEN, Jerrold E. ; HUGHES, Thomas J. R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Reprint. 2012
- [Sch09] SCHÖBERL, Joachim: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2009 <http://www.asc.tuwien.ac.at/~schoeberl/wiki/lva/notes/numpde.pdf>
- [Sch15] SCHÖBERL, Joachim: NGSolve Finite Element Library. (2015). <https://sourceforge.net/projects/ngsolve/>
- [SS07] SCHÖBERL, Joachim ; SINWEL, Astrid: Tangential-Displacement and Normal-Normal-Stress Continuous Mixed Finite Elements for Elasticity. In: *Mathematics Subject Classification* (2007). http://www.hpfem.jku.at/publications/ricamreport_tdnns.pdf
- [Wri13] WRIGGERS, Peter: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. 2013